سلسلۂ مطبوعاتِ انجمنِ ترقیٔ اُردو (ہند) نمبر ۲۲۶

داستانِ ریاضی

از

ڈاکٹر رضی الدین صاحب صدیقی

پروفیسر ریاضیات جامعۂ عثمانیہ

حیدر آباد۔ دکن

شائع کردہ

انجمنِ ترقیٔ اُردو (ہند) دہلی

طبع اوّل　　سنہ ۱۹۳۵ء　　قیمت مجلد عسہ بلا جلد عہ

مطبوعہ ہمدرد برقی پریس دہلی

سلسلۂ مطبوعات انجمن ترقی اردو (ہند) نمبر ۲۲۶

داستانِ ریاضی

ڈاکٹر رضی الدین صاحب صدیقی

پروفیسر ریاضیات جامعہ عثمانیہ حیدرآباد دکن

شائع کردہ

انجمن ترقیٔ اردو (ہند) دہلی

طبع اول

۱۹۴۵ء

قیمت مجلد ے/ بلا جلد ۸/ع

138558

فہرستِ مضامین

پہلا باب

ریاضی انسانی تہذیب وتمدن کا آئینہ

دیدرو (Diderot) فرانسیسی انسائیکلوپیڈیا کا ایک مشہور مؤلف اور مادّہ پرست دہریہ تھا جس نے انقلاب فرانس کے قبل یورپ کے ذہنی نشاۃ میں نمایاں حصہ لیا۔ وہ روسی دربار میں ٹھیرا ہوا تھا اور اپنی طرح داری اور چرب زبانی سے درباریوں کی تفریح کا باعث بنا ہوا تھا اور ان کے مذہبی خیالات کو لغو ثابت کر رہا تھا۔ ملکہ روس کو یہ اندیشہ ہوا کہ دیدرو کے اثر سے درباریوں کے عقیدے بگڑ جائیں گے اس لیے اُس نے جرمنی کے مشہور ریاضی داں آئیلر (EULER) کو دیدرو سے خدا کے وجود پر مناظرہ کرنے کی غرض سے طلب کیا۔ دیدرو کو یہ اطلاع دی گئی کہ ایک ریاضی داں نے خدا کا وجود ثابت کیا ہے مناظرے میں حصہ لینے کے لیے جب دیدرو بھرے دربار میں آیا تو آئیلر نے بہت ہی متین لہجے میں اس کو اس طرح خطاب کیا: "$\frac{\text{ا} + \text{ب}^{\text{ن}}}{\text{ن}} = \text{لا}$، اس لیے خدا وجود رکھتا ہے۔ اس کے جواب میں آپ کیا کہتے ہیں؟" دیدرو جبر و مقابلہ سے قطعاً ناواقف تھا اس لیے وہ جبر و مقابلہ کی زبان سے، جو عددوں کی زبان کہی جاسکتی ہے، بہت مرعوب ہوگیا۔ اور آئیلر کے سوال کا کوئی جواب نہ دے سکا۔ درباریوں نے دیدرو کی

بہت ہنسی اڑائی اور وہ اس قدر شرمندہ ہوا کہ دربار سے اٹھ کر اپنے کمرے میں جا چھپا اور فوراً فرانس واپس ہو گیا۔ دیدرو کے لاجواب ہونے کی وجہ یہ تھی کہ وہ اس بات سے ناواقف تھا کہ عددوں کی ایک خاص زبان ہے جو معمولی زبان سے بالکل مختلف ہے۔ اگر وہ عددوں کی زبان سے واقف ہوتا تو آئیلر سے ہرگز مرعوب نہ ہوتا بلکہ اس سے عددوں کی زبان کے جملے (ا + بن) / ن = لا کا ترجمہ معمولی زبان میں کرنے کے لیے کہتا اور یہ دریافت کرتا کہ اس جملے کی بنا پر استدلال کا دوسرا حصہ یعنی خدا کا وجود کس طرح ثابت ہوتا ہے؟

آج کل بھی عوام کو، جو ریاضیات سے ناواقف ہیں، ریاضی داں عددوں کی زبان کے چند جملے کہہ کر نہ صرف مرعوب کر دیتے ہیں بلکہ مغالطے میں بھی ڈال دیتے ہیں۔ مثلاً ایک ہم عصر ہیئت داں نے اپنے گفرڈ لکچر (Gifford Lectures) میں یہ بیان کیا ہے کہ ڈیراک (Dirac) نے پ (p) اور ق (q) اعداد دریافت کیے ہیں۔ اس لیے خدا وجود رکھتا ہے[1]۔ ایک اور مشہور ہیئت داں ستاروں کے فاصلوں کے متعلق نہایت پیچیدہ حسابات سے عوام کو حیرت میں ڈالنے کے بعد کہتا ہے کہ اس سے ثابت ہوتا ہے کہ خدا بھی ریاضی داں ہے۔ ریاضیاتی معلومات کی مدد سے عوام کو مرعوب کرنے والے آئیلر اور دیدرو کے زمانے سے صدیوں قبل بھی موجود تھے۔ دنیا کے پہلے ریاضی داں وہ تقویم ساز کاہن تھے جو موسموں کی تبدیلیوں کا اندازہ لگاتے تھے۔ مصر کے مندروں میں دریائے نیل

---

[1] ان مثالوں سے ہمارا مدعا ہرگز یہ نہیں ہے کہ خدا کے وجود پر بحث کی جائے بلکہ صرف یہ بتانا مقصود ہے کہ ریاضی داں عددوں کی زبان کی مدد سے عوام کو کس طرح مغالطے میں ڈال سکتے ہیں۔

سے زیرِ زمین تعلق رکھنے والے ایسے آلات موجود تھے جن کے ذریعے کاہن دریائے نیل کے اتار چڑھاؤ کا قبل از قبل صحیح اندازہ لگا سکتے تھے اور اپنی مصلحت کی بنا پر، جو عوام سے بالکل مخفی رکھے جاتے تھے حیرت انگیز صحت کے ساتھ پیش گوئیاں کر کے عوام پر اپنی الہامی معلومات کا رعب جماتے تھے۔ مصر کی قدیم تحریروں (Papyrus) سے پتا چلتا ہے کہ مصر کے کاہن عددوں کی ایسی زبان سے ضرور واقف تھے جو اس بناوٹی اور مغالطہ آمیز زبان سے جس میں وہ اپنی پیش گوئیاں بیان کر کے عوام کو دھوکا دیتے تھے، بالکل جداگانہ تھی۔

موجودہ زمانے میں بنی نوع انسان کی خوش حالی کا انحصار زیادہ تر اس بات پر ہے کہ وہ مختلف قسم کے اعداد و شمار (Statistics) کی اہمیت کو اچھی طرح سمجھیں اور خود غرض جماعتوں کے غلط استدلال سے مرعوب ہوئے بغیر ان اعداد و شمار سے صحیح نتیجے اخذ کریں اس لیے ضروری ہے کہ ہم میں سے ہر شخص ریاضی یعنی عددوں کی زبان سے کافی طور پر واقف ہو جائے۔

وہ پہلے انسان جنھوں نے ابتدا میں بستیاں بسائیں صرف حیوان ناطق تھے لیکن موجودہ زمانے کے انسان حساب لگانے والے حیوان کہلانے کے مستحق ہیں۔ ہم ایسے دور میں ہیں کہ ہمارے چاروں طرف اعداد و شمار اور حساب کی گرم بازاری ہے۔ چناں چہ ہر آن اور ہر لحظہ ہمیں ریلوں کے وقت ناموں، بے روزگاری کے تخمینوں، سرکاری ٹکٹوں، جنگ کے قرضوں، بنکوں کی شرح سود، تعلیمی خرچ، کمپنیوں کے حصوں کے نرخ، بارش کے اوسط، روزانہ درجۂ تپش، پیدائش اور موت کی شرحوں سے اور اسی طرح نور کی موجوں کے طولوں، ریڈیو کی مختلف موجوں کے طولوں، بجلی کے میٹروں کی حرکتوں، ریلوں اور

جہازوں کے کرایوں وغیرہ سے دوچار ہونا پڑتا ہے۔ ہر روز جب کوئی شخص اپنی گھڑی کو چابی دیتا ہے تو وہ ایسا نازک اور صحیح آلہ استعمال کرتا ہے جو اسکندریہ کے عروج کے زمانے میں بھی بڑے سے بڑے حکیم یا کاریگر کے وہم وگمان میں نہ آسکتا تھا۔ ہمارے لیے جو باتیں روزمرہ کی بن گئی ہیں وہ قدیم زمانے کے حکیموں اور ریاضی دانوں کے لیے ناقابلِ حل عقدہ تھیں۔ اس کا یہ مطلب نہیں کہ ہم اُن بڑے حکما سے زیادہ ذہین اور فہیم ہوگئے ہیں۔ بلکہ اصل یہ ہے قدیم زمانے سے اب تک جو حکما گزرے ہیں ان کی ذہنی مساعی کے نتیجے ہیں ورثے کے طور پر ملے ہیں اور ہمارے معاشرتی نظام کا لازمی جزبن گئے ہیں۔ ہر انسان خواہ وہ کتنا ہی ذہین اور فہیم کیوں نہ ہو اپنے معاشرتی ماحول میں مقید ہوتا ہے اور ان پابندیوں سے نہیں نکل سکتا جو اس کے معاشرتی ماحول نے اس کے ذہن پر عائد کی ہیں۔ قدیم زمانے کے معاشرتی ماحول میں نسبت و تناسب، شرح رفتار، اسراع اور اسی طرح کے دوسرے تصور جو ہمارے لیے معمولی بن گئے ہیں موجود نہیں تھے۔ اس لیے ایسے سوالوں کے حل میں، جو ہمارے لیے بالکل آسان معلوم ہوتے ہیں، قدیم زمانے کے حکما کو بہت مشکلیں پیش آتی تھیں۔

اوپر کے بیان کو واضح کرنے کے لیے ایک دل چسپ مثال پیش کی جاتی ہے۔ یونان کی علمی ترقی کے زمانے میں حکیم زینو (ZENO) نے اپنے ہم عصروں کو محوِ حیرت کرنے کے لیے بہت سے معمے پیش کیے تھے جن میں سے ذیل کا معما بہت مشہور ہے۔

اکلیز (قدیم یونانی کہانیوں کا ایک مشہور بہادر) (ACHILLES) اور کچھوے میں دوڑ ہوتی ہے۔ اکلیز کی رفتار کچھوے کی رفتار سے دس گنی ہے

ابتدا میں کچھوا اکلیز سے سو گز آگے ہے۔ اب حکیم زینو کہتا ہے کہ اگر اکلیز سو گز دوڑ کر اس مقام پر پہنچے جہاں ابتدا میں کچھوا تھا تو اس عرصے میں کچھوا اپنے ابتدائی مقام سے دس گز آگے نکل جائے گا اور اس لیے کچھوا اکلیز سے دس گز آگے ہوگا۔ اگر اکلیز یہ دس گز طے کرے تو اس عرصے میں کچھوا ایک گز آگے بڑھ جائے گا یعنی کچھوا اکلیز سے ایک گز آگے ہوگا۔ اگر اکلیز یہ ایک گز طے کرے تو کچھوا $\frac{1}{10}$ گز آگے بڑھ جائے گا یعنی کچھوا اکلیز سے $\frac{1}{10}$ گز آگے ہوگا۔ اگر اکلیز یہ $\frac{1}{10}$ گز طے کرے تو کچھوا اکلیز سے $\frac{1}{100}$ گز آگے ہوگا۔ اس استدلال کو جاری رکھ کر حکیم زینو یہ کہتا ہے کہ کچھوا اکلیز سے ہمیشہ آگے رہے گا اگرچہ کہ کچھوے اور اکلیز کا درمیانی فاصلہ بہ تدریج گھٹتا جائے گا۔ اس لیے اکلیز کچھوے تک ہرگز نہیں پہنچ سکتا اور کچھوے سے آگے بڑھ نہیں سکتا

آپ یہ خیال نہ کریں کہ حکیم زینو اور اس کے ہم عصر اس بات سے واقف نہ تھے کہ اکلیز کچھوے تک ضرور پہنچے گا اور کچھوے سے آگے بھی بڑھ جائے گا۔ ان کے لیے حل طلب معمّا صرف یہ تھا کہ اوپر کے استدلال میں مغالطہ کہاں ہے۔ چوں کہ زینو اور اس کے ہم عصر عددوں کی زبان سے اچھی طرح واقف نہ تھے، اس لیے وہ اوپر کے استدلال کے مغالطے کی تحقیق سے قاصر رہے۔ ہمارے لیے جیسا کہ ہم ابھی دیکھیں گے، زینو کے معمے کا حل بہت آسان ہے کیوں کہ ہم میں اور قدیم یونانیوں میں دو بڑی تہذیبوں اور دو زبردست معاشرتی انقلابوں کا فصل ہے اور ہمیں اس زمانے سے اب تک انسان نے جو ذہنی ترقی کی ہے اس کے نتیجے معاشرتی ورثے کے طور پر ملے ہیں

زینو اور اس کے ہم عصر عددوں کی زبان سے کافی طور پر واقف

نہ تھے۔ ان کے لیے تقسیم کا عمل ضرب کے عمل کے مقابلے میں زیادہ مشکل تھا۔ حساب لگانے کے لیے وہ زیادہ تر گن تارے[1] (Ball frame) سے مدد لیتے تھے اور تقسیم کا عمل کافی صحت کے ساتھ نہیں کر سکتے تھے۔ زینو کے ہم عصروں کا یہ بھی خیال تھا کہ اگر عددوں کا ایک ایسا لامتناہی سلسلہ[2] ہو کہ اس کی ہر رقم اپنی رقم ما قبل سے کم ہو تو اس سلسلے کی رقموں کو کافی تعداد میں لینے سے ان کا مجموعہ جتنا بڑا چاہیں بنایا جا سکتا ہے۔ یہ بتانے کے لیے ان کا یہ خیال درست نہیں تھا، ہم اکلیز اور کچھوے کی دوڑ والی مندرجہ بالا مثال پر، موجودہ زمانے کی حسابی ترقیم کی مدد سے بحث کریں گے

کچھوا پہلے وقفے میں (جب کہ اکلیز اپنے اور کچھوے کی ابتدائی مقاموں کا درمیانی فاصلہ یعنی ایک سو گز طے کرتا ہے) دس گز طے کرتا ہے، دوسرے وقفے میں ایک گز طے کرتا ہے، تیسرے وقفے میں $\frac{1}{10}$ گز طے کرتا ہے۔ چوتھے وقفے میں $\frac{1}{100}$ گز طے کرتا ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔ اگر ہم کسر اعشاریہ کی ترقیم استعمال کریں تو متعدد وقفوں میں کچھوے نے جو فاصلے طے کیے ان کا مجموعہ حسب ذیل ہوتا ہے:-

طے شدہ فاصلہ $= 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots\ldots$ وغیرہ گز

$= 10 + 1 + 0.1 + 0.01 + \ldots\ldots$ وغیرہ گز

$= 11.\dot{1}$ گز (جہاں $\dot{1}$ سے مراد یہ ہے کہ علامت اعشاریہ کے بعد ۱، ۱، ۱ . . . جتنے مقاموں تک چاہیں لیے جا سکتے ہیں۔)

---

[1] یہ ایک چوکھٹا ہوتا ہے جس میں افقی تاروں میں دس دس منکے ہوتے ہیں۔

[2] لامتناہی سلسلہ سے مراد نہ ختم ہونے والا سلسلہ ہے۔ یعنی لامتناہی سلسلے میں ہر رقم کے بعد ایک اور رقم ہوتی ہے۔

اگر آپ کو اپنی ابتدائی تعلیم کے زمانے کا حساب یاد ہو تو آپ فوراً بتائیں گے کہ $0.\dot{1}$ دراصل $\frac{1}{9}$ کے مساوی ہے۔

پس معلوم ہوا کہ متعدد وقفوں میں (جن کی تعداد لامتناہی ہے) کچھوے نے جو کل فاصلہ طے کیا وہ $11\frac{1}{9}$ گز ہے۔ [غور سے دیکھا جائے کہ یہ سب وقفے مساوی نہیں ہیں بلکہ ہر وقفہ اپنے ماقبل وقفے کا $\frac{1}{10}$ ہے۔ نیز اکلنیز کے کچھوے تک پہنچنے کے وقفے لیے گئے ہیں] اس سے ظاہر ہے کہ اکلنیز کچھوے تک پہنچے گا جب کہ اکلنیز کا طے شدہ فاصلہ $111\frac{1}{9}$ گز ہو اور اس کے بعد اکلنیز کچھوے سے آگے بڑھ جائے گا۔

پس معلوم ہوا کہ زینو کے معمے میں جو مغالطہ ہے اس کی تحقیق اس بات کے جاننے پر منحصر ہے کہ گھٹنے والے عددوں کے لامتناہی سلسلے: $10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots$ کی جتنی بھی رقمیں لی جائیں ان کا مجموعہ محدود ہے اور $11\frac{1}{9}$ سے ہرگز بڑا نہیں ہے۔ برخلاف اس کے زینو اور اس کے ہم عصروں کا یہ غلط خیال تھا کہ اوپر کے لامتناہی سلسلے کی رقمیں کافی تعداد میں لی جائیں، تو ان کا مجموعہ جتنا بڑا چاہیں بنایا جاسکتا ہے چوں کہ اوپر کے لامتناہی سلسلے کے مجموعے کے متعلق ان کا خیال درست نہیں تھا اس لیے وہ زینو کے معمے کے مغالطے کو سمجھنے سے قاصر تھے۔ چوں کہ ہمیں عددوں کی زبان معاشرتی ورثے کے طور پر ملی ہے اس لیے زینو کے معمے کے حل میں ہمیں کوئی زیادہ مشکل پیش نہیں آتی۔

ہم آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ لامتناہی سلسلہ

$$10 + 1 + 0.1 + 0.01 + \ldots\ldots\ldots$$

کی رقموں کو کافی تعداد میں لینے سے اُن کا مجموعہ $11\frac{1}{9}$ کے جتنا قریب چاہیں لایا جا سکتا ہے۔ چناں چہ پہلی چار رقموں کے مجموعے اور $11\frac{1}{9}$ میں جو فرق ہے وہ ۰۰۲. ہے یعنی $\frac{1}{500}$ سے کم ہے۔ نیز پہلی دس رقموں کے مجموعے اور $11\frac{1}{9}$ کا فرق $\frac{2}{100000000}$ سے کم ہے۔ اس معمولی مفہوم کو ریاضی داں اس طرح بیان کرتے ہیں کہ لامتناہی سلسلہ

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

مستدق[1] ہے اور اس کا مجموعہ $11\frac{1}{9}$ ہے۔

اس موقع پر یہ بتا دینا ضروری ہے کہ ہر ایسا لامتناہی سلسلہ جس کی ہر رقم ماقبل سے کم ہو لازماً مستدق نہیں ہوتا۔ اس کی مثال ہم آئندہ مناسب موقع پر دیں گے۔ ایسا لامتناہی سلسلہ جو مستدق نہیں ہے متبع سلسلہ کہلاتا ہے۔

تمدن کی تاریخ سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ کسی زمانے کے قابل ترین افراد کی ذہنی کاوشوں کے ثمرات بھی علم کے اُس ذخیرے کے مرہون منت ہوتے ہیں جو اُن کے زمانے کے لوگوں کا مشترک معاشرتی ورثہ ہے۔ ذہین سے ذہین افراد بھی اپنے زمانے کی معاشرتی تہذیب کے حدود سے بہت آگے نہیں بڑھ سکتے۔ اگر چند ذہین افراد عوام سے اپنی بے تعلقی پر فخر کرنے لگیں تو خود ان کی قابلیت مشتبہ ہو جاتی ہے۔ اس کتاب کے مطالعہ سے ہمیں معلوم ہوگا کہ جب کسی قوم کی تہذیب عوام سے بے تعلق ہو جاتی ہے اور صرف چند بے کار افراد کی تفریح طبع کا باعث بن جاتی ہے تو وہ تہذیب ملاگیری (Priesthood) کی شکل اختیار کر لیتی ہے اور آخر میں اس کا خاتمہ توہم پرستی ہوتا ہے۔ عوام سے ذہنی طور پر بے تعلق ہونا اور اس بے تعلقی پر فخر کرنا

---

[1] ہر اگلی منزل پر گھٹنے والا یا کمی پذیر۔

نہ صرف ایک اہم فریضے سے غفلت کرنا ہے بلکہ ایک نہایت احمقانہ جرم ہے اور اس سے انسان کی علمی ترقی کا خاتمہ ہوجاتا ہے۔ تاریخ سے اس بات کا پتا چلتا ہے کہ توہمات کی بنیاد عوام نہیں بلکہ غیر متوازن اعصاب رکھنے والے (New rotics) انسان ڈالتے ہیں۔ ریاضی داں اور عامی ایک دوسرے کا ساتھ چھوڑ نہیں سکتے کیوں کہ معاشرتی ترقی صرف اس وقت یقینی ہوگی جب کہ ریاضی سے سماج کا ہر فرد مستفید ہو۔

موجودہ زمانے میں اقتصادی مظالم اعداد و شمار اور حساب کی آڑ میں کیے جاتے ہیں۔ ان مظالم کو جڑ پیڑ سے اکھاڑنے کے لیے ضروری ہے کہ سماج کا ہر فرد ریاضی سے، جو ناپ اور ترتیب کے قواعد پر مشتمل ہے، بہ خوبی واقف ہو اور ایسے سماج کی تعمیر میں حصہ لے جو موجودہ سماج کے عیبوں سے پاک ہو اور جس میں ہر شخص کو کچھ نہ کچھ فرصت ہو اور کوئی بھی محتاج نہ ہو۔ اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ اگر ریاضی سماج کے ہر فرد کے لیے اس قدر ضروری اور مفید ہے تو پھر کیا وجہ ہے کہ نہ صرف مدرسوں کے متعلم بلکہ عوام بھی ریاضی کے نام سے بھاگتے ہیں؟ ریاضی سے اس شدید نفرت کی وجہ یہ ہے کہ ریاضی کی تعلیم ایسے طریقے پر دی جاتی ہے کہ عمرانی زندگی سے اس کا کوئی تعلق ظاہر نہیں کیا جاتا اور یہ بتانے کی ہرگز کوشش نہیں کی جاتی کہ کس طرح متمدن انسان زندگی کے ہر شعبے میں ریاضی کا محتاج ہے۔ بچوں یا بڑوں کو کبھی یہ بتانے کی کوشش نہیں کی جاتی کہ اس علم نے بار بار انسان کو توہمات سے آزاد کرنے میں کس طرح مدد دی ہے اور کس طرح سے انسانوں کی آزادی کا محافظ رہا ہے۔ اس غلط طریقۂ تعلیم کے اسباب حسب ذیل معلوم ہوتے ہیں۔

شمال مغربی یورپ کا نظامِ تعلیم، اصلاحِ مسیحیت (Reformation) کے زمانے میں تین اہم اثرات کے تحت عمل میں آیا۔ ایک اثر کا تعلق صرف زبان سے تھا۔ کلیسا کے اقتصادی اثر کو توڑنے کے لیے یہ ضروری تھا کہ عوام کے دلوں سے کلیسا کا روحانی اور علمی اقتدار اٹھ جائے۔ پروٹسٹنٹ مصلحین نے یہ ثابت کرنے کے لیے کہ کیتھولک عبادتیں اور مذہبی رسمیں محض بدعتیں ہیں۔ انجیل سے حوالے پیش کیے۔ تحریک کو کامیاب بنانے کے لیے ہر ایک کو انجیل پڑھنے کی ترغیب دینی ضروری تھی۔ علاوہ اس وقت حُسنِ اتفاق سے یورپ میں چھاپے کی ایجاد ہوئی اس سے کتابوں اور پڑھنے والوں کی تعداد بڑھ گئی۔ اس لیے پاپائے روم کے روحانی اور علمی اقتدار پر کاری ضرب لگی۔ انجیل کے پڑھنے اور سمجھنے کے لیے یہ ضروری تھا کہ لاطینی اور یونانی زبانوں کی تعلیم رواج پائے۔ یہی وجوہ تھے جن کی بنا پر قرونِ وسطیٰ میں لاطینی اور یونانی علوم کی تحصیل عزت کی نگاہوں سے دیکھی جانے لگی۔

مغربی تعلیم میں عددوں کی زبان یعنی ریاضی کی تعلیم دو مختلف اثرات کے تحت داخل ہوئی۔ صلیبی لڑائیوں نے اہلِ یورپ کی توجہ عربوں کی عظیم الشان علمی ترقیوں کی طرف مبذول کی۔ سوداگروں اور صنعت و حرفت کے کارخانے والوں نے عربوں کے نئے طریقہ حساب یعنی عشری ترقیم (Decimal notation) کو اپنے کاروبار میں مفید پایا اور رائج کیا۔ جرمنی میں تجارتی ضرورتوں کو پورا کرنے کے لیے عربوں سے سیکھے ہوئے نئے حساب کی تعلیم کے لیے نئے مدرسے قائم کیے گئے۔ چھاپے خانے کی ایجاد کے فوراً بعد تجارتی علم حساب پر بہت سی کتابیں شائع کی

گئیں۔ تجارتی حساب کی تعلیم کو اور بھی تقویت حاصل ہوئی جب کہ مارٹن لوتھر (Martin Luther) نے یہ فتوا دیا کہ ہر عیسائی لڑکے پر فرض ہے کہ وہ تجارتی حساب کے چار اساسی قاعدے (یعنی جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم) سیکھے۔ اسی طرح عددوں کی زبان کے گوناگوں معاشرتی اطلاقات پر غور کرنے سے قبل ہی علم حساب کو تجارت کے ساتھ مربوط کر دیا گیا۔

علم ہندسہ جس کو یونانی ریاضی دانوں نے محض نظری علم بنا رکھا تھا یورپ کے نظام تعلیم میں ایک دوسرے راستے سے داخل ہوا۔ چوں کہ انجیل کی تعلیم کے لیے یونانی اور لاطینی زبانوں کا سیکھنا ضروری تھا اس لیے یونانی فلاسفہ اور حکما کی تصنیفوں کے مطالعے کی ترغیب دلائی گئی۔ یہی وجہ ہے کہ تاجر اور متوسط طبقے کے لوگ یونانی حکما کے جمہوری نظریوں کی طرف مائل ہونے لگے۔ اور یونانی فلاسفہ کے نقطۂ نظر کے گرویدہ ہو گئے۔ چوں کہ یونان کے خوشحال طبقے کے لوگ نظری علم ہندسہ کو صرف ذہنی مشغلے کے طور پر، تفریح طبع کے لیے سیکھتے تھے، اس لیے علم ہندسہ یورپ کے نظام تعلیم میں مثل دیگر یونانی حکما اور فلاسفہ کی تصنیفوں کے داخل ہوا اور اس بات پر غور ہی نہیں کیا گیا کہ سماجی ضرورتوں کی تکمیل کے لیے اس علم سے کیا استفادہ کیا جا سکتا ہے۔ کئی پشتوں تک علم ہندسہ کو مدرسوں میں ایسے ناکارہ طریقوں سے سکھایا گیا ہے کہ طلبہ کو یہ تک نہ معلوم ہونے پایا کہ اسی علم ہندسہ سے ایک نئے اور کارآمد علم کی کس طرح بنیا دپڑی جو پیمائش اور جہازرانی کے حسابات میں ازحد مفید ثابت ہوگا اور اپنی ارضی وسماوی پیمائشوں کی مدد سے اصنام اور کواکب پرستی کے پرخچے اڑا دے گا۔

افلاطون نے ریاضیات کو ایک عالی شان اور پُراسرار مذہبی رسم کا

رتبہ دیا۔ تہذیب کے ایام طفولیت میں دیگر علوم کی طرح ریاضیات کی بھی بنیادیں اُن تاریک توہمات پر قائم تھیں جن میں اس زمانے کے لوگ جکڑے ہوئے تھے۔ چناں چہ اس زمانے کے ذہین افراد بھی عدد ۱۳ کے ایک مفرد عدد ہونے اور ایک منحوس عدد ہونے میں امتیاز نہیں کرسکتے تھے۔ افلاطون کے اثر سے ریاضیات پر وہ پردۂ راز جو فیثا غورث اور اس کے شاگردوں نے ڈالا تھا، قائم ہوگیا اور فیثا غورثیوں کی عجیب و غریب خفیہ رسموں کو تقویت حاصل ہوئی فیثا غورث کے شاگرد اپنی علمی برادری کے باہر ریاضیات کے معمولی مسئلے بھی ہرگز نہیں بیان کرتے تھے اور اس دستور کی خلاف ورزی کرنے والے کو نہ صرف اپنی برادری سے خارج کردیتے تھے بلکہ اکثر سزائے موت بھی دیتے تھے۔ اس پردۂ راز کی وجہ سے مبتدی کے لیے ریاضیات کا سیکھنا نہ صرف مشکل بن جاتا تھا بلکہ طلبہ کو اس مضمون سے ہمیشہ کے لیے نفرت پیدا ہو جاتی تھی۔

افلاطون کا شان دار کارنامہ یہ تھا کہ اس نے ان لوگوں کی نفسیاتی ضرورت کو پورا کرنے کے لیے۔ جو اپنے سماجی ماحول سے بے ربط ہوں اور اس سماجی ماحول سے نجات حاصل کرنے کے لیے جبوانی لذتوں میں ڈوبنا نہ چاہتے ہوں ایک ایسا مذہب ایجاد کیا جس کی رُو سے مادّی دُنیا کی ہر چیز روحانی دنیا میں بالکل مختلف شکل اختیار کرتی ہے۔ چناں چہ اس نے مکالمہ ٹی میوس (Timaeus) سے جو فلسفیانہ موشگافیوں کا بہت عمدہ مجموعہ ہے، یہ معلوم ہوتا ہے کہ روحانی دنیا میں زمین کو مساوی الاضلاع مثلث سے، پانی کو قائمۃ الزاویہ مثلث سے، ہوا کو مختلف الاضلاع مثلث سے اور آگ کو مساوی الساقین مثلث سے تعبیر کیا جاتا تھا۔ خود افلاطون نے بھی علم ہندسہ کی مدد سے انسان کی

تخلیق کے متعلق عجیب و غریب نظریے اخذ کیے ہیں ۔ چناں چہ وہ لکھتا ہی کہ چوں کہ کائنات کی شکل کروی ہی اس لیے خدائے تعالیٰ نے انسان کی تخلیق کے وقت اس کا سر بھی کروی بنایا اور سر کو دنیا میں اِدھر اُدھر لڑھکنے سے بچانے کے لیے انسان کو چار اعضا یعنی دو ہاتھ اور دو پانو دیے تاکہ وہ نقل و حرکت کر سکے ۔ افلاطون کے یہ خیالات ان لوگوں کے لیے جو دماغ کو جسم پر فوقیت دینے کے عادی ہو گئے تھے تسکین قلب کا باعث بن سکتے تھے لیکن جو لوگ زندگی کے اہم مسئلوں کا حل ڈھونڈ چاہتے ہیں اُن کے لیے یہ خیالات محض بے کار ہیں ۔ تعلیم کے اس نظام میں جو افلاطون کے نظریوں پر مبنی ہو، ریاضیات کی تعلیم لازماً ان اساتذہ کے سپرد کی جاتی ہی جو ذہنی تخیلات کو انسان کی تمام مادّی ضرورتوں پر ترجیح دیتے ہیں اور دنیا و مافیہا سے بالکل بے خبر ہیں ۔ ایسے اساتذہ ریاضی کو انسان کی سماجی ضرورتوں سے بالکل جدا کر کے طلبہ کے رو بہ رو پیش کرتے ہیں ۔ اس کا لازمی نتیجہ یہ ہوتا ہی کہ نہ صرف طلبہ بلکہ عوام کو بھی اس نہایت کار آمد مضمون سے نفرت ہو جاتی ہی ۔

دوسری غلطی جس کا ارتکاب ریاضیات کی تعلیم میں کیا جاتا ہی وہ یہ ہی کہ ریاضیات میں ہر نئے اصول یا مفروضہ کو اس طرح پیش کیا جاتا ہی کہ وہ بالکل واضح یا از خود حاضر ہی ۔ طلبہ کو ہرگز یہ نہیں بتایا جاتا کہ انسان نے ہزاروں سال کی کاوش کے بعد یہ معلوم کیا کہ استدلال کا فلاں حصّہ یا مفروضہ ایک بدیہی چیز ہی ۔ مثال کے طور پر ہم کہ سکتے ہیں کہ مصر کے مندروں میں رہنے والے کاہنوں کو یہ تو واضح طور پر معلوم تھا کہ آرشیل پیما کس طرح عمل کرتا ہی لیکن اس شخص کے لیے جو ان مندروں

کے باہر ہو اور نیل پیما کے عمل کے متعلق براہ راست معلومات نہ رکھتا ہو، آلۂ نیل پیما کا عمل صرف اس صورت میں ذہن نشین ہو سکتا ہے جب کہ اس کو زیر زمین نالیوں سے آگاہ کیا جائے جو آلۂ نیل پیما کو دریائے نیل سے ملاتی ہیں۔ بعینہٖ اسی طرح طلبہ پر ریاضیات کی افادیت صرف اس وقت ظاہر ہوتی ہے جب کہ وہ ان واسطوں کو ملاحظہ کریں جن کے ذریعے ہزار ہا سال کی کاوشوں اور ذہنی جدوجہد کے بعد انسان نے اپنے مادی ماحول اور فطری قوتوں پر قابو حاصل کیا۔ اکثر اساتذہ جنھوں نے افلاطون کے نظریوں کے مطابق تعلیم پائی ہے، طلبہ کو ریاضیات کے ارتقا اور اس کے معاشرتی پہلو سے بے خبر رکھتے ہیں اور افلاطون کی طرح اس کے پیرو بھی اس بات کو پسند نہیں کرتے کہ ریاضیات کو مشاہدات کی تحلیل و ترتیب سے کارآمد نتیجے اخذ کرنے کے لیے استعمال کیا جائے۔

اس کتاب کا مقصد اس بات کو واضح کرنا ہے کہ پیمایش اور گنتی کے قواعد انسان کی روز افزوں معاشرتی اور عمرانی ضرورتوں کی وجہ سے کیوں کر ترقی کرتے رہے ہیں اور کس طرح اکثر واقعات رسم ورواج نے اس ترقی کی راہ میں روڑے اٹکائے ہیں۔ یہ بھی واضح کرنے کی کوشش کی گئی ہے کہ ریاضیات کی مدد سے انسان نے کائنات کا خاکہ کس طرح مرتب کیا اور کس طرح طبعی قوتوں کو ان کے عمل کے قواعد سمجھنے کی وجہ سے، اپنا مطیع بنایا اور ثابت کیا کہ طبعی قوتیں بے معنی رسموں اور قربانیوں کی مدد سے ہرگز مہربان نہیں بنائی جا سکتیں۔ ریاضی کی اس دل چسپ کہانی کو ایسے موثر پیرائے میں پیش کرنے کی کوشش کی گئی ہے کہ مبتدی کو ریاضیات کے سیکھنے میں جو مشکلات پیش آتی ہیں وہ بتدریج دور ہو جائیں۔ اس سلسلے میں

یہ بھی واضح کیا گیا ہے کہ ریاضیات کی ترقی کا اصل مقصد پیمایش اور گنتی کی عملی مشکلات کو دور کرنا تھا۔ جوں جوں ہم آگے بڑھیں گے۔ یہ واضح ہوتا جائے گا کہ کس طرح ہر دور میں سابقہ مشکل طریقوں کی جگہ پیمایش اور گنتی کے نئے اور آسان طریقے ایجاد کیے گئے اور قدیم طریقے کس طرح متروک ہونے گئے حتیٰ کہ جدید ریاضیات میں قدیم ریاضیات کی بہت کم ضرورت پیش آتی ہے۔ اس کا مطلب یہ نہیں ہے کہ جدید ریاضیات قدیم ریاضیات کی مرہون منت نہیں ہے۔ اس میں کوئی شک نہیں کہ جدید ریاضیات کی ہر تحقیق اور ترقی دراصل قدیم ریاضیات کی کسی نہ کسی شاخ پر مبنی ہے لیکن ساتھ ہی ساتھ یہ بھی ذہن نشین کرنا ضروری ہے کہ زیادہ کار آمد طریقوں کی ایجاد کے بعد پرانے بھدے طریقوں کی کوئی ضرورت باقی نہیں رہتی۔ اگرچہ کہ جبر و مقابلہ، علم مثلث، نزسیمات اور احصا یونانی علم ہندسہ پر مبنی ہیں لیکن اقلیدس کے مقالوں کے تقریباً دو سو مسئلوں میں سے چند ہی مسئلے ریاضیات کی ان نئی اور کار آمد شاخوں کے سمجھنے کے لیے کافی ہوتے ہیں۔ اقلیدس کے بقیہ مسئلے عوام کے لیے محض بے کار ہیں کیوں کہ ان مسئلوں میں جن نتیجوں کو مشکل طریقوں سے حاصل کیا گیا ہے وہ جدید ریاضیات کی مدد سے آسان طریقوں سے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ اس شخص کے لیے جو ریاضیات اور موجودہ تہذیب کے باہمی ارتباط کا مطالعہ کرنا چاہتا ہے۔ اقلیدس کے یہ غیر ضروری مسئلے صرف پریشانی اور ہمت شکنی کا باعث ہوتے ہیں۔ اس لیے ان مسئلوں کو نظر انداز کرنا ہی مناسب ہے یہ کتاب خاص طور پر ان لوگوں کے لیے لکھی گئی ہے جو ریاضیات کے مروجہ غلط طریقۂ تعلیم سے پریشان ہو کر ہمت ہار چکے ہیں اور جو کچھ یاد ہے اس کے

اصل مقصد اور استعمال سے بے خبر ہیں اس لیے ہم بالکل ابتدائی حدود سے اپنے موضوع پر بحث کریں گے اور استدلال کی مختلف کڑیوں کو سلسلہ وار بیان کریں گے۔

ریاضی کی ماہیت کے متعلق دو مختلف نقطۂ نظر اختیار کیے جاتے ہیں۔ ایک نقطۂ نظر جو افلاطون نے اختیار کیا ہے وہ یہ ہے کہ ریاضی کے نتیجے لازمی اور ابدی حقائق پیش کرتے ہیں۔ دیدرو اور دوسرے دہریوں کے خلاف مشہور جرمن فلسفی کانٹ (Kant) نے اس نقطۂ نظر کو دہریت کی تردید میں استعمال کیا ہے۔ کانٹ کا یہ خیال ہے کہ علم ہندسہ کے اصول اور نتیجے ابدی اور پورے پورے طور پر صحیح ہیں اور اس لیے یہ نتیجے ہمارے حواس خمسہ سے بے نیاز ہیں۔ کانٹ کی اس تحریر کے تھوڑے ہی عرصے بعد ماہرین حیاتیات نے یہ ثابت کیا کہ کان کے اندرونی حصے میں ایک اور قوت حاسہ ہے جو جاذبہ کی کشش سے متاثر ہوتی ہے۔ اس نئی تحقیق کی اہمیت کا احساس سب سے پہلے جرمن ماہر طبعیات ارنسٹ ماخ (Ernst Mach) کو ہوا۔ آئن سٹائن (Einstein) نے نظریۂ اضافیت کے سلسلے میں یہ بتایا کہ وہ علم ہندسہ جس کو افلاطون نے فلک ہفتم پر چڑھایا تھا اور جس کے نتیجوں کو کانٹ ابدی حقائق تصور کرتا تھا عملی تجربوں میں صرف تقریباً درست پائے جاتے ہیں۔ اس نظریۂ اضافت نے قدیم طریقے کے ریاضی دانوں کو بہت پریشان کیا ہے۔ بعض ریاضی داں اب یہ رائے پیش کرتے ہیں کہ ریاضی صرف ذہنی کھیل ہے جس میں چند فرضی قاعدے اختیار کیے جاتے ہیں جو اور عملی دنیا میں یہ قاعدے درست ہوں یا نہ ہوں۔ یہ رائے کہ ریاضی صرف ایک ذہنی کھیل ہے ان ریاضی دانوں کی ذہنیت کو بے نقاب

کرتی ہے اور ریاضیات کی حقیقی ماہیت اور سماج کے لیے ریاضیات کی ضرورت سے ہمیں آگاہ نہیں ہونے دیتی۔ اگر یہ مان لیا جائے کہ ریاضی صرف ایک ذہنی کھیل ہے تو ہماری رائے میں سماج کے ہر فرد کے لیے ہرگز یہ ضروری نہیں کہ وہ اس علم کو سیکھے۔ دوسرے کھیلوں کی طرح اس کھیل کو بھی جس کا جی چاہے ترک کر سکتا ہے۔

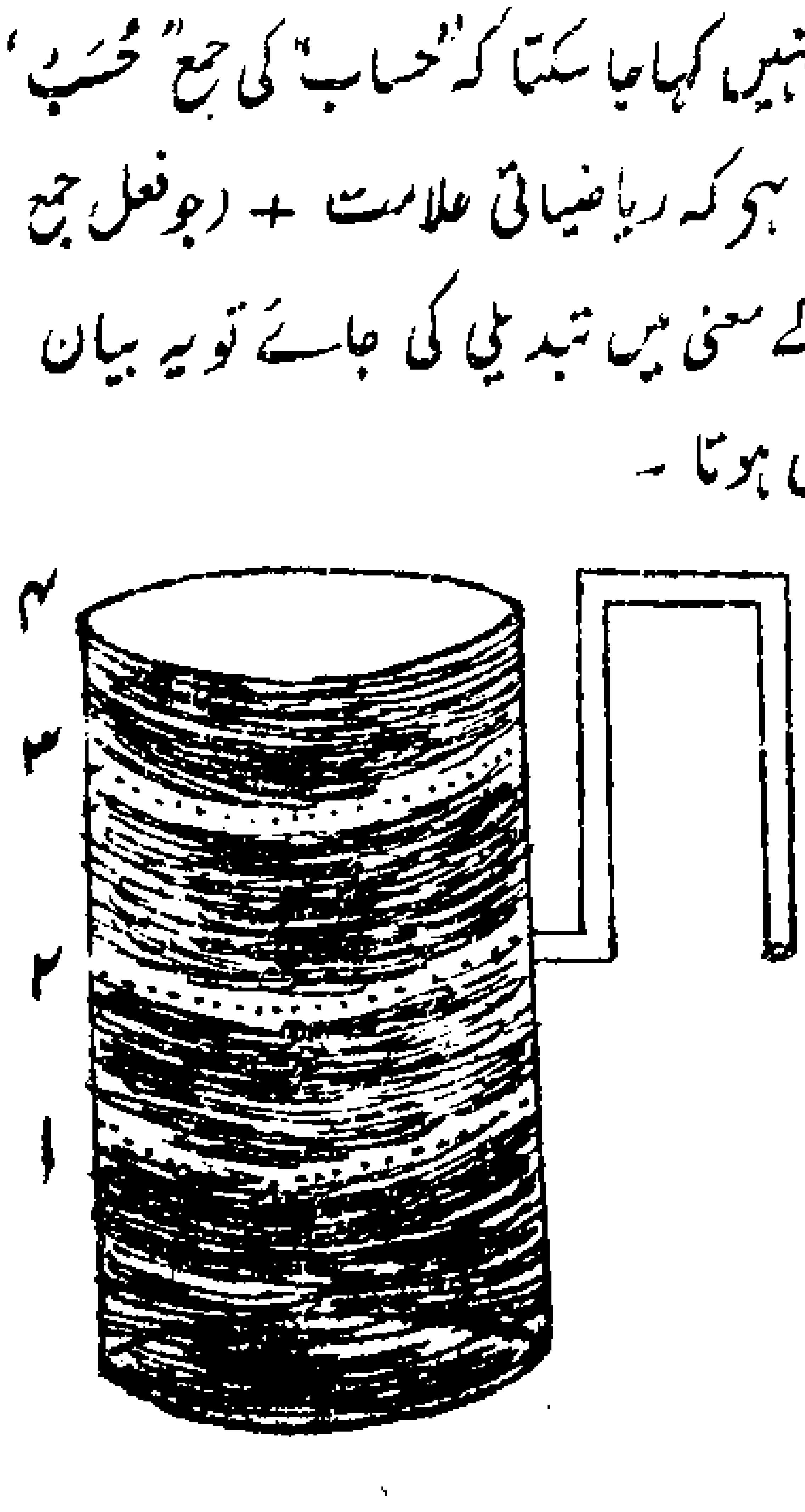
ریاضیات کے متعلق دوسرا اور ہماری رائے میں زیادہ صحیح نقطۂ نظر یہ ہے کہ ریاضیات عددوں اور پیمائش کی زبان ہے جس کے قاعدوں کا سیکھنا سماج کے ہر فرد کے لیے ضروری ہے تاکہ وہ سماج کا کارآمد رکن بن سکے۔ ان قاعدوں کا تعلق مادی دنیا کے عملی تجربوں سے ایسا ہی ہے جیسا کہ صرف ونحو کے قاعدوں کا زبان سے ہے جس طرح زبان کے قاعدے ابدی حقائق نہیں ہیں اسی طرح ریاضی کے قاعدے بھی ابدی نہیں ہیں۔ بلکہ ایسی مناسب قرار دادیں ہیں جن کی مدد سے انسان پیمائش اور گنتی کے متعلق واضح طور پر ایک دوسرے سے تبادلۂ خیال کر سکتے ہیں جس طرح اپنے خیالات کو صحیح طور پر دوسروں کے سامنے پیش کرنے کے لیے زبان کے قاعدوں، الفاظ کے صحیح معنی اور ان کے بامحاورہ استعمال کا سیکھنا ضروری ہے اسی طرح سماج کے ہر فرد کے لیے یہ ضروری ہے کہ وہ پیمائش اور گنتی کی زبان کے قاعدوں کو اچھی طرح سیکھے۔ تاکہ سماج کے قوانین، اعداد و شمار، آبادی، تجارت کے حساب اور موازنہ وغیرہ کو خود سمجھ سکے اور ماہرین کے فریب سے بچ کر ان کے استدلال اور نتیجوں کی تنقیح کر سکے۔

عام طور پر یہ کہا جاتا ہے کہ اس سے زیادہ کوئی بات یقینی نہیں ہے کہ "دو اور دو چار ہوتے ہیں" یہ کہنا کہ "دو اور دو چار ہوتے ہیں"

کسی ریاضیاتی حقیقت کا بیان نہیں ہو وہ ریاضیاتی جملہ جس کی طرف اشارہ کیا جاتا ہو حسب ذیل ہو:- ۲ + ۲ = ۴

اس کے یہ معنی ہیں کہ عدد ۲ کو عدد ۲ میں جمع کرنے سے عدد ۴ حاصل ہوتا ہو۔ ریاضیاتی جملہ ۲ + ۲ = ۴ سے فعل "جمع کرو" کے معنی بیان ہوتے ہیں جب کہ اس فعل کی ریاضیاتی علامت + ہو۔ یہ ضروری نہیں ہو کہ عملی دنیا میں بھی یہ نتیجہ ہمیشہ درست ہو جملہ ۲ + ۲ = ۴ دراصل ایک قرارداد ہو جو ریاضی دانوں نے فعل "+" اور اسم "۲" اور "۴" کے متعلق قاعدے کے طور پر اختیار کی ہو۔ اس ریاضیاتی قرارداد کی نوعیت بالکل وہی ہو جو یہ کہنے کی ہو کہ "کتاب کی جمع کتب ہو" یا یہ کہنے کی کہ ایک کتاب اور ایک کتاب کو جمع کرنے سے کتب حاصل ہوتی ہیں لیکن یہ اچھی طرح سمجھ لینا چاہیے کہ اوپر کے قاعدے کی بنا پر جو کتاب کی جمع حاصل کرنے کے لیے دیا گیا ہو یہ نہیں کہا جا سکتا کہ "حساب" کی جمع "حسب" ہو۔ ذیل کی توضیح سے یہ بتایا جا سکتا ہو کہ ریاضیاتی علامت + (جو فعل جمع کرو کے لیے استعمال کی گئی ہو) کے معنی میں تبدیلی کی جائے تو یہ بیان کہ "۲ + ۲ = ۴" ہمیشہ درست نہیں ہوتا۔

اس کی تمثیل میں ایک شکل پیش کی گئی ہو۔



اس میں ایک نلی دار برتن دکھایا گیا ہے جس پر لگے ہوئے نشانات ۱، ۲، ۳، ۴ حجم کی ۱، ۲، ۳، ۴ اکائیوں کو تعبیر کرتے ہیں۔ اگر علامت ۲ + ۲ سے مراد لی جائے کہ اس برتن میں ۲ اکائی حجم پانی ڈالو اور پھر ۲ اکائی حجم پانی ڈالو تو ظاہر ہے کہ ۲ + ۲ کا نتیجہ یہ ہوگا کہ برتن میں صرف ۲ اکائی حجم پانی رہے گا کیوں کہ بقیہ پانی نکاسی نلی کے ذریعے باہر بہ جائے گا۔ یہاں علامت + سے برتن میں پانی ڈالنے کے معنی لیے گئے ہیں اس لیے + کے متعلق اوپر کی قرارداد سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ۲ + ۲ = ۲

اسی طرح آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ اس برتن کے لیے جمع کے قاعدے حسب ذیل ہیں:-

۱ + ۱ = ۲

۱ + ۲ = ۲

۱ + ۳ = ۲

۲ + ۲ = ۲

۳ + ۱ = ۲

چوں کہ علامتوں کے معنی بدلنے سے مختلف نتیجوں میں اختلاف ہوتا ہے اس لیے التباس کو دور کرنے کی غرض سے ہر عمل کے قاعدے مرتب کیے جاتے ہیں تاکہ علامتوں اور لفظوں کا استعمال باقاعدہ اور واضح ہے۔

کسی زبان کا ایک جملہ زبان کے قواعد کے لحاظ سے تو درست ہو سکتا ہے لیکن ممکن ہے کہ وہ ایک امر واقعہ کے لحاظ سے غلط ہو۔ مثلاً یہ کہنا کہ "بمبئی دریائے نیل کے کنارے پر واقع ہے" اردو زبان کے قواعد کے لحاظ سے تو درست ہے لیکن ایک امر واقعہ کے طور پر بالکل غلط ہے۔ اسی طرح

ممکن ہے کہ ریاضی کے قاعدوں کی رُو سے جو قاعدے حاصل ہوں وہ عملی دنیا میں درست نہ ہوں۔ ایسی صورتوں میں ریاضی کے قاعدوں میں ترمیم اور تبدیلی کی ضرورت پیش آتی ہے چناں چہ سمتی احصار (Vector Analysis) میں علامت "+" کے استعمال کے قاعدے ابتدائی ریاضی کے قاعدوں سے بالکل جداگانہ ہیں۔

اگر معمولی بول چال کی زبان میں انسان کی تدریجی معاشی ترقی کی اہم منزلوں کو پیش کیا جاسکتا ہے تو اس سے زیادہ آسانی کے ساتھ ہم اس معاشی ارتقا کا نقشہ پیش کرسکتے ہیں جب کہ ہم ریاضی کے قاعدوں سے مدد لیں۔ معمولی زبان جس میں مختلف اشیا کی صرف قسموں کو بیان کیا جاسکتا ہے۔ اس قدر باضابطہ اور واضح نہیں ہے جیسی کہ عددوں کی زبان ہے۔ انسان کو ۲۰۰۰ سال قبل مسیح سے فیراڈے (Faraday) اور ہرٹز (Hertz) کے زمانے تک معمولی زبان میں بہت کم تبدیلی اور وسعت کی ضرورت پیش آئی۔ لیکن اس کے برعکس عددوں کی زبان میں یعنی ریاضی کی مختلف شاخوں میں فطری ماحول پر انسان کے روز افزوں تسلّط پر قابو رکھنے کی غرض سے عظیم الشان ترقی اور تبدیلی ہوئی۔ تاریخی زمانے سے بہت قبل برقی اور مقناطیسی کششیں دریافت ہوچکی تھیں۔ ساتویں صدی ق۔م میں طالیس (Thales) کو یہ معلوم تھا کہ کہربا کو رگڑنے سے اس میں چھوٹے چھوٹے تنکوں کو اپنی طرف جذب کرنے کی قوت پیدا ہوجاتی ہے۔ اس سے قبل چینیوں کو بھی مقناطیس کے خواص معلوم تھے۔ ایک ہزار سال ق۔م میں انسان نے پہلی دفعہ تصویری تحریروں کو چھوڑ کر رمزی (Symbolic) حروفِ تہجی اختیار کیے اور اس زمانے سے آٹھویں صدی تک اشیا کی قسموں کے

13858

بیان کرنے کے طریقے میں صرف ایک قابل لحاظ اضافہ ہوا وہ یہ کہ اٹھارویں صدی میں ماہرین حیاتیات نے یورپ کی مختلف زبانوں میں دواؤں میں کام آنے والے پودوں کے مختلف ناموں کی وجہ سے جو انتشار پیدا ہوگیا تھا اس کو دور کرنے کے لیے علمی اصطلاحات کا ایک بین الاقوامی لغت تقریباً غیر مستعمل اور مشکل لاطینی اور یونانی لفظوں کی مدد سے تیار کیا اور ان نئی اصطلاحوں کو پودوں اور جانوروں کے معمولی اور مشہور ناموں کی بجائے اختیار کر لیا۔ اس طریقے سے یورپ کے ماہرین حیاتیات کی علمی زبان بین الاقوامی ہوگئی۔ جس سے ان کی تحریروں میں صحت اور وضاحت کا بہت اضافہ ہوا۔

ریاضیات کی زبان میں اور معمولی بول چال کی زبان میں اہم فرق یہ ہے کہ ریاضیات کی زبان نہایت احتیاط اور صحت کے ساتھ مرتب کی گئی ہے۔ عددوں کی زبان میں کسی فرد یا قوم کے ذاتی جذبات کو کوئی دخل نہیں ہوتا۔ یہ زبانیں، حیاتیات کی علمی زبان کی طرح، بین الاقوامی صورت اختیار کر چکی ہیں اور جن امور کو ان زبانوں میں بیان کیا جاتا ہے اُن میں خطا یا شبہ کا امکان کم ہوتا ہے۔

پیمائش اور گنتی کے فنی طریقے تجارت کے بری اور بحری راستوں کے ذریعے دنیا میں پھیلے ہیں۔ ریاضی کی ترقی اور تشکیل بہت تدریجی اور سست رہی ہے۔ تقریباً چار ہزار سال قبل ہیئت داں سورج گرہنوں کا قبل از وقت اندازہ لگا سکتے تھے۔ لیکن صرف حال ہی میں یہ معلوم ہو سکا کہ سورج میں ریڈیم کی مقدار کتنی ہے۔ کہربا کو فلالین یا ریشم سے رگڑنے سے جو برقی قوت پیدا ہوتی ہے اس کی دریافت میں اور ایک برقائے ہوئے جسم کی کشش کی مقدار معلوم کرنے کے طریقے کی ایجاد میں تقریباً دو ہزار سال کا وقفہ ہے۔ اسی

طرح مقناطیسی کشش کی مقدار کی پیمائش سے کئی ہزار سال قبل انسانوں کو سنگ مقناطیس (یعنی طبعی مقناطیس) کا علم ہو چکا تھا۔ انسان نے سب سے پہلے مختلف چیزوں میں ان کی قسموں کے لحاظ سے تمیز کرنا سیکھا کیوں کہ یہ عمل نسبتاً آسان تھا اور بعد ازاں اشیا کو ان کی مقدار کے لحاظ سے ترتیب دینا سیکھا کیوں کہ یہ عمل بہت مشکل ہے۔ پیمائش کے طریقوں میں انسان کی ترقی اس کی فطری قوتوں پر نہیں بلکہ اس کی معاشرتی ترقیوں پر منحصر رہی ہے۔ ہم بغیر آلات کی مدد کے صرف آنکھوں اور کانوں کی مدد سے دور کی چیزوں میں ان کی قسموں کے لحاظ سے امتیاز کر سکتے ہیں لیکن دور کی کسی چیز کو ناپنے کے لیے انسان کو مختلف آلات مثلاً اصطرلاب، دور بین اور میکروفون ایجاد کرنا پڑا۔ نیز انسان نے ایسی ترازوئیں ایجاد کیں جو وزن کے ایسے فرق کو بتا سکتی ہیں جسے ہمارے ہاتھ کسی طرح بھی محسوس نہیں کر سکتے۔ پیمائش کے آلات کی ایجاد کی ہر منزل پر انسان نے عددوں کی زبان کے قاعدوں اور طریقوں میں مناسب اور کارآمد تبدیلی کی۔ ابتدا میں انسان کو ریاضی کی ضرورت اپنے گلے کی بھیڑوں اور مویشیوں کی تعداد معلوم کرنے کے لیے پیش آئی تھی۔ لیکن اس منزل سے گزر کر انسان نے مندروں کی تعمیر کی اور اس سلسلے میں عددوں کی زبان میں نئے حصوں کا اضافہ ہوا۔ جب تمدن اور آگے بڑھا تو انسان نے تیرہ و تار سمندروں میں بے جان مادے کے زور سے بڑے بڑے جہاز چلائے اور جہاز رانی کے حسابات کے لیے ریاضی کی نئی شاخیں ایجاد ہوئیں۔ ریاضی کے اسی ارتقا کی ہر منزل پر سابقہ طریقوں کی جگہ نئے اور زیادہ کارآمد طریقوں نے لی اور پیمائش کے قاعدوں میں

نئے نئے اصولوں کا اضافہ ہوتا گیا ۔

عددوں کی زبان یعنی ریاضی کی ابتدا مصری اور سُمیری (Sumerians) مذہبی تہذیبوں کے زمانے میں ہوئی ۔ ان قدیم مذہبی تہذیبوں کے علوم تجارتی قافلوں کے ذریعے نہ صرف چین تک پہنچے بلکہ بحیرۂ روم کو عبور کرکے سامی قوموں سے (جو قلعی اور رنگوں کی تجارت کے لیے سمندروں کی سیاحت کرتے تھے) جاملے ۔ اس کے کچھ عرصے بعد شمالی یورپ کی وحشی قومیں ان سامیوں کے مقبوضات پر جو یونان اور ایشیائے کوچک میں تھے حملہ آور ہوئیں ۔ ان وحشی قوموں نے ان علاقوں کو تو فتح کرلیا لیکن ساتھ ہی سامیوں کے علم سے خود مفتوح ہوکر وہیں رہنا سہنا شروع کیا اور سامیوں کے علمی خزانوں میں اپنی طرف سے بھی اضافہ کیا ۔ جیسے جیسے یونانیوں کی خوش حالی میں اضافہ ہوا علم ہندسہ ان کے لیے صرف ایک ذہنی مشغلہ اور کھیل بن گیا ۔ قدیم زمانے کی کواکب پرستی کی وجہ سے یونانیوں کا فلسفہ اور ان کی علمی ترقی برباد ہوگئی اور عین اس وقت جب کہ علم ہندسہ ایک نئی شکل اختیار کرنے کے لیے تیار تھا تمام ترقی یک دم رک گئی ۔ اس کے بعد علوم و فنون اور جہاز رانی کا مرکز مصر کا مشہور شہر اسکندریہ بن گیا اور جوان ہمت افراد میں [illegible] کے سلسلے میں دنیا کے نامعلوم حصوں کی دریافت کا شوق پیدا ہوا ۔ علم ہندسہ کو اجرام فلکی اور زمین کی پیمائش کے سبب استعمال کیا گیا اور علم مثلث وجود میں آیا ۔ سورج اور چاند کے فاصلے دریافت کیے گئے زمین کی مساحت عمل میں آئی اور علمی دنیا ستارہ پرستی کی غلامی سے آزاد ہوئی ۔

اسکندریہ میں علم ہیئت کی ترقی اور تشکیل کے ساتھ ایسے بڑے بڑے عددوں کی ضرورت پیش آئی جو یونانیوں کے وہم و گمان میں بھی نہیں آسکتے تھے۔ حکیم انکسا گوراس (Anaxagoras) نے پیریکلز کے درباریوں کو یہ کہہ کر حیران کر دیا کہ سورج کی ٹکیا کا رقبہ سرزمین یونان کے رقبے کے تقریباً مساوی ہے اس کے بعد ایراسٹوتھینیز (Erastothenes) اور پوسیڈونیس (Posaidonius) نے زمین کے محیط کا طول دریافت کیا اور یہ بتایا کہ کرۂ ارض کے رقبے کے مقابلے میں سرزمین یونان کا رقبہ بالکل بے حقیقت ہے علم ہیئت کے بڑے بڑے عددوں پر حساب لگانے کے لیے نئے طریقوں کی جستجو ہونے لگی۔ ڈیوفانٹس (Diophantus) اور تھیون (Theon) جیسے ذہین افراد نے ہندسی شکلوں کی مدد سے حساب کے نئے طریقے ایجاد کیے اور ایسا معلوم ہوتا تھا کہ بہت جلد جبرو مقابلہ وجود میں آنے والا ہے لیکن اسکندریہ کے ریاضی دانوں کو اس کوشش میں کامیابی حاصل نہیں ہوئی کیوں کہ علم کا جو ذخیرہ انھیں معاشرتی ورثے کے طور پر ملا تھا اس میں اس نئی سمت میں ترقی کرنے کی صلاحیت نہ تھی۔

مشرق میں ہندستانیوں نے (جو یونانیوں کے ابجدی ہندسوں سے ناواقف تھے) عددوں کی ترقیم کا ایسا طریقہ ایجاد کیا جس کے ذریعے آلات کی مدد کے بغیر آسانی کے ساتھ بڑے بڑے عددوں پر حساب لگایا جاسکتا تھا۔ ہندستانیوں کا شاندار کارنامہ ہندسوں کی مقامی قیمت اور صفر کی ایجاد ہے۔ اس ایجاد کے تھوڑے ہی عرصے بعد اسلامی تہذیب دنیا کے بہت بڑے حصے پر چھا گئی اور عرب ریاضی دانوں نے یونانیوں اور مصریوں کے طریقہ حساب اور پیمائش میں ہندستانیوں کی ایجاد کردہ

عشری ترقیم (Decimal notation) کو داخل کیا۔ خوارزمی اور عمر خیام جیسے حکما نے جبر و مقابلہ کی بنیادیں قائم کیں۔ آج کل بھی یورپ کی تمام زبانوں میں خوارزمی اور عمر خیام کے ایجاد کردہ علم کو عربی اصطلاح "الجبرا" سے موسوم کر کے متمدن دنیا پر ان حکما کے احسان عظیم کی یاد تازہ رکھی جاتی ہے۔ مسلمانوں نے مساحت، علم مثلث، جبر و مقابلہ اور علم ہیئت میں قابل لحاظ ترقی کی۔ خاص طور پر علم ہیئت اور جہاز رانی کے متعلق ان کے حسابات میں حیرت انگیز صحت پائی جاتی ہے۔

ہسپانیہ میں عربوں نے تمام علوم کے لیے جامعات (Universities) قائم کیں اور علم کے دروازے ہر طالب علم کے لیے بلا لحاظ مذہب و ملت کھول دیئے۔

تجارتی شاہراہوں سے گزر کر عربوں کے علوم اور خاص طور پر ان کے حساب کا نیا طریقہ یہودی عالموں کے توسط سے یورپ میں پھیلا۔ صلیبی لڑائیوں نے، یورپی قوموں اور مسلمانوں کے میل جول کی وجہ سے، یورپی قوموں کے ذہنی نقطۂ نظر میں بلا ارادہ توسیع کی۔ عربوں کے تیار کردہ کوکبی جدولوں اور بحری نقشوں کی مدد سے جہاز رانی کے نئے اور عظیم الشان دور کی بنیادیں تیار ہوئیں۔ سوداگر روز افزوں تجارت سے مالا مال ہوئے اور بڑے بڑے عددوں سے حساب لگانے کی ضرورت کا احساس قوی ہو گیا۔ بحری سفروں میں کوکبی جدولوں کے ذریعے آسانی کے ساتھ حساب لگانے کے لیے الخوارزمی کا ایجاد کردہ نیا طریقہ (جو آج تک اسی کے نام پر الگورتم یا لوگارتم کا طریقہ کہلاتا ہے)، نہایت مفید ثابت ہوا۔ ریاضی دانوں نے طول بلد، عرض بلد اور بحری نقشوں کی مدد سے جہاز رانی کے متعلق

کارآمد مسئلے حل کیے۔ ان تحقیقات کا لازمی نتیجہ یہ ہوا کہ ایک نیا علم ہندسہ (جس کو معمولی زبان میں تر سیمات کہتے ہیں) وجود میں آگیا۔ اس نئے علم ہندسہ میں اس کے موجد ڈے کارٹ (Descartes) نے ایسے تخیل داخل کیے جو یونانی علم ہندسہ میں موجود نہ تھے۔ بحری سیاحت کے اس زمانے میں وقت ناپنے کے لیے گھڑیاں ایجاد ہوئیں اور وقت کی صحیح پیمائش کی وجہ سے (جو اب تک مذہبی فرقے کے سپرد تھا) علم ہندسہ میں وقت کا تخیل داخل ہوا اور رقاص اور سیاروں کی حرکت کے سلسلے میں ریاضی کی ایک نئی شاخ ایجاد ہوئی جو احصا کہلاتی ہے۔

فی الحال ہم ریاضی کے ارتقا اور انسانی تمدن، معاشرتی ترقی، مفید ایجادوں اور مذہبی عقیدوں کے ساتھ ریاضی کے ارتباط کی اس دل چسپ کہانی کے خاکے کو اس دور پر ختم کرتے ہیں جب کہ نیوٹن نے انتقال کیا۔ اس کے بعد کے دور میں ریاضی کی کئی نئی شاخیں ایجاد ہوئیں، اور ان کے ذریعے انسان کی سماجی زندگی پر گہرا اثر پڑا۔ ریاضی کی ان نئی اور کارآمد شاخوں کا ذکر مختلف ابواب میں مناسب موقع پر آئے گا۔

دوسرا باب

تاریخی زمانے سے پہلے کی ریاضیات

یعنی

گننے اور ناپنے کی ابتدائی کوششیں

بعض لوگوں کا یہ غلط خیال ہے کہ ریاضی کی ابتدا صرف اسی وقت ہوئی جب کہ ایک خوش حال طبقہ، جس کو ہندسی شکلوں اور عددوں سے کھیلنے کے لیے کافی فرصت تھی، وجود میں آیا۔ جیسے جیسے ہم ریاضی کے ارتقا کی دل چسپ کہانی کا مطالعہ کرتے جائیں گے۔ ہمیں معلوم ہوگا کہ ریاضی کی ترقی زیادہ تر اس وقت ہوئی جب کہ ریاضی دانوں کو کسی حقیقی اور مفید کام میں ریاضی کی ضرورت پیش آئی اور یوں ہی ریاضی ایک بے کار خوش حال طبقے کا، جو روزمرہ زندگی سے کوئی دل چسپی نہیں رکھتا تھا، ذہنی کھیل بن گئی تو اس میں انحطاط اور جمود پیدا ہوگیا۔

ہر زمانے میں ریاضی کی ترقی انسان کی حیاتیاتی معاشری حیثیت پر اور اس زمانے کے ذہنی ماحول پر منحصر رہی ہے۔ سب سے پہلے ریاضی پر اچھی کتابیں قدیم یونانی علما نے تصنیف کیں۔ ان کے ماحول میں ایسے

لوگ تھے جو قطب تارے کے مقام اور ستاروں کے درمیانی زاوی فاصلوں کی مدد سے بحری سفر کرتے تھے۔ ریت پر کھینچے ہوئے خاکوں کی مدد سے عبادت خانے بناتے تھے اور سایوں کی مدد سے میناروں کی بلندیاں محسوب کرتے تھے۔ اس ماحول نے قدیم یونانی علما اور خوش حال ذہین لوگوں کو اس بات کی طرف مائل کیا کہ وہ اس دنیا پر غور کریں جس میں لوگوں کی محنت سے دن بہ دن مفید ترقیاں ہو رہی تھیں۔

یونانیوں سے پہلے بابل اور مصر والوں نے ریاضی میں قابل لحاظ ترقی کی تھی۔ چنانچہ اہلِ بابل گنتی کے ایسے طریقوں سے واقف تھے جو قدیم (اِتی کائی) یونانیوں کے طریقوں سے بہتر تھے۔ ریاضی کی ابتدا کے متعلق صحیح معلومات حاصل کرنے کے لیے ہمیں نمرود (Nimrud) کی تختیوں اور چیوپس (Cheops) کے ہرم سے پہلے کے زمانے کی ترقیوں پر، جو سماجی ضرورتوں کے تحت ہوئیں غور کرنا ہوگا۔ ریاضی کی قدیم ترین کتابوں کی تصنیف سے بہت پہلے ہی انسان ایسے سوالوں کے حل کے طریقے معلوم کر چکا تھا جن کا جواب ایک عدد ہوتا ہے۔ ذیل کے سوالوں کی تحقیق سے ہمیں معلوم ہوگا کہ کن سماجی ضرورتوں کے تحت قدیم زمانے میں ریاضی میں ترقی ہوئی۔

(۱) کسی دیے ہوئے گروہ میں کتنے افراد ہیں؟

تسمانیہ کے قدیم باشندے انسانی تمدن کے ابتدائی دور کے یادگار تھے۔ بہ صرف چار تک گن سکتے تھے۔ یہ بات قرینِ قیاس ہے کہ بڑے عددوں کی ضرورت انسان کو صرف اس وقت پیش آئی جب کہ اس نے مویشیوں کے گلّے پالنے شروع کیے کیوں کہ مویشیوں کے مالک کے لیے

یہ جاننا ضروری ہوتا ہے کہ اس کے گلّے میں کتنے جانور ہیں اور آیا ان میں سے کوئی جانور غائب تو نہیں ہوگیا۔ انسان نے شہر بسانے سے بہت پہلے اپنی مویشیوں کو دس دس کی جماعتوں میں گننا سیکھا۔ اس کو ہم ریاضی کی جدید زبان میں یوں کہتے ہیں کہ گنتی کا اساس دس کا عدد مقرر کیا گیا ہے گنتی کے اکثر نظاموں میں پانچ یا اس کا کوئی مناسب ضعف بھی اساس کے طور پر استعمال کیا جاتا تھا۔ اس انتخاب کی وجہ یہ معلوم ہوتی ہے کہ قدیم انسان، چھوٹے بچوں کی طرح اپنے ہاتھ اور پانو کی انگلیوں سے مدد لیتا تھا۔ دونوں ہاتھ اور دونوں پانو کی انگلیوں کی مدد سے گننے کے طریقے کا نشان انگریزی لفظ (Score) میں بھی پایا جاتا ہے جو بیس کے لیے استعمال ہوتا ہے اور بجائے اکیس بائیس وغیرہ کے بیس اور ایک، بیس اور دو وغیرہ اور ستر کی بجائے تین بیس اور دس کہا جاتا ہے۔

(۲) کوئی واقعہ کتنے زمانے پہلے گزرا؟

تحقیق کے ساتھ یہ نہیں بتایا جا سکتا کہ انسان نے پہلے مویشیوں کے گلّوں میں جانوروں کی تعداد کو گننا سیکھا۔ یا موسموں کی تبدیلی اور وقت کی پیمائش سیکھی۔ جب انسان شکار کے ذریعے خوراک کی فراہمی کے دور سے گزرا تو اس نے اپنے کھیتوں میں اناج بونا سیکھا اور یہ بھی معلوم کیا کہ اناج بونے اور کھیتی کاٹنے کے خاص موسم ہوتے ہیں اور اس کے جانور صرف خاص موسموں میں بچے دیتے ہیں۔ اس ضرورت کے تحت انسان کو موسموں کی تبدیلی کا اندازہ لگانا پڑا۔ مشاہدے سے اس نے یہ معلوم کیا کہ ایک بدر (Full moon) سے دوسرے بدر تک چاند کے طلوع و غروب ہونے کے اوقات، سورج کے لحاظ سے، بتدریج دیر سے

واقع ہوتے ہیں۔ یعنی چاند مغرب سے مشرق کی طرف ہٹتا جاتا ہی اور ۲۹ یا ۳۰ دن کے بعد سورج کے لحاظ سے پھر اپنے ابتدائی مقام پر آجاتا ہی۔ بدر سے بدر یا ہلال سے ہلال تک کے وقفہ کو جو ۲۹ یا ۳۰ دن کا ہوتا ہی ایک مہینے سے موسوم کیا گیا۔ مشاہدے سے یہ بھی معلوم کیا گیا کہ ستاروں کے جتھے موسموں کی تبدیلی کے ساتھ اپنا مقام بدلتے جاتے ہیں۔ چناں چہ وہ جتھے جو کبھی آدھی رات کے وقت عین سر پر تھے تین مہینے بعد آدھی رات کو افق پر غروب ہوتے نظر آتے ہیں اور ستاروں کے وہ جتھے جو آدھی رات کو طلوع ہوتے تھے تین مہینے بعد آدھی رات کو عین سر پر ہوتے ہیں۔ (مندرجہ بالا مشاہدہ سے یہ ظاہر ہوتا ہی کہ کوکبی یوم یعنی کسی ستارے کے طلوع سے طلوع تک کا وقفہ شمسی یوم یعنی سورج کے طلوع سے طلوع تک کے وقفہ سے چھوٹا ہوتا ہی)۔ اس بنا پر یہ معلوم ہوا کہ موسموں کی تبدیلی کے ساتھ رات کے وقت آسمان کا کوکبی منظر بھی بدلتا جاتا ہی اور اس تبدیلی کی مدد سے موسموں میں امتیاز کیا جاسکتا ہی۔ سورج کے طلوع کے وقت آسمان پر ستاروں کے مختلف جتھوں کے مقاموں کا مشاہدہ کرکے اہل مصر نے تقریباً (۴۰۰۰) سال قبل مسیح یہ معلوم کرلیا تھا کہ ایک سال کے ۳۶۵ دن ہوتے ہیں۔ سال کے طول کے متعلق یہ نتیجہ اس مشاہدہ پر مبنی تھا کہ اگر کسی دن ستارہ شعریٰ یمانی سورج کے طلوع ہونے سے عین قبل نکلتا ہو تو پھر ۳۶۵ ہی دن کے بعد سورج کے عین قبل طلوع ہوتا ہی۔ اس طرح انھوں نے یہ معلوم کیا کہ آسمان پر ستاروں کے لحاظ سے، سورج ایک کامل چکر ۳۶۵ دن میں لگاتا ہی اور بارش کے ایک موسم سے بارش کے دوسرے موسم تک بھی ۳۶۵ دن کا وقفہ ہوتا ہی۔ اس وقفہ یا مدت کا نام ایک شمسی سال رکھا گیا ہی۔

سال کا تخیل ایک سلاخ کے سایے میں کمی بیشی دیکھنے سے بھی پیدا ہوتا ہے۔ اگر کسی دن ایک سلاخ کے سایے کے طول کی تبدیلی کا مشاہدہ کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ سایہ جب انتہائی طور پر اس روز کم ہو تو ایک معین سمت میں واقع ہوتا ہے اور اس کا یہ اقل طول عین نصف النہار کے وقت (یعنی اس آن پر جو سورج کے طلوع اور غروب کے عین درمیان ہے) حاصل ہوتا ہے۔ اقل طول والے سایے کی یہ وہ سمت ہے جو شمال اور جنوب کے نقطوں میں سے گزرنے والے افقی خط کے سمت ہوتی ہے (شمال اور جنوب کے نقطوں میں سے گزرنے والے خط کی سمت تعین..... کا ایک اور آسان طریقہ سوال ۳ کے ضمن میں بیان کیا جائے گا) اگر اس خط پر عمود وار ایک اور افقی خط کھینچا جائے تو یہ مشرق اور مغرب کے نقطوں میں سے گزرنے والا خط ہوگا [مشرق اس طرف ہوتا ہے جدھر سے سورج طلوع ہوتا ہے اور مغرب اس کی مخالف جانب یعنی سورج کے غروب ہونے کی طرف] مختلف موسموں میں مشرقی افق پر سورج کے طلوع ہونے کے مقام بھی مختلف ہوتے ہیں۔

اعتدال ربیع (۲۱ مارچ) اور اعتدال خریف (۲۳ ستمبر) کے دن سورج عین مشرق میں طلوع ہوتا ہے اور عین مغرب میں غروب ہوتا ہے۔ ان دونوں دنوں کے لیے دن اور رات کے طول مساوی ہوتے ہیں۔ یعنی سورج کے طلوع سے غروب تک کا وقفہ غروب سے طلوع تک کے وقفے کے برابر ہوتا ہے۔ اسی خاصیت کی بنا پر ان دونوں دنوں کو اعتدالین کہتے ہیں ان دونوں دنوں میں فصلوں کے خاص تہوار اور جشن منائے جاتے تھے۔

اعتدال ربیع کے بعد سورج کے طلوع ہونے کا مقام بتدریج شمال کی طرف ہٹتا جاتا ہے اور ۲۱ جون کو شمال کی طرف انتہائی نقطے پر پہنچتا ہے۔

اس کے بعد سورج کے طلوع ہونے کا مقام پھر مشرق کی طرف ہٹتا جاتا ہے اور ۲۳ ستمبر کو سورج پھر عین مشرق کی سمت میں طلوع ہوتا ہے۔ ۲۳ ستمبر سے ۲۱ دسمبر تک سورج کے طلوع ہونے کا مقام جنوب کی طرف ہٹتا جاتا ہے اور ۲۱ دسمبر کو اپنے انتہائی نقطہ پر پہنچتا ہے۔ اس کے بعد سورج کے طلوع ہونے کا مقام پھر مشرق کی طرف ہٹتا ہے اور ۲۱ مارچ کو سورج پھر عین مشرق میں طلوع ہوتا ہے۔ اس طرح ایک سال میں سورج کے طلوع ہونے کے مقام کی سمت کا کامل دور ختم ہوتا ہے

سال کے دوران میں سورج کے طلوع ہونے کی سمت کی تبدیلی کے ساتھ ساتھ سلاخ کے نصف النہاری سایہ کا طول بھی بدلتا جاتا ہے اور سایہ کے طول کی تبدیلی کی دوری مدت بھی ایک سال ہوتی ہے۔

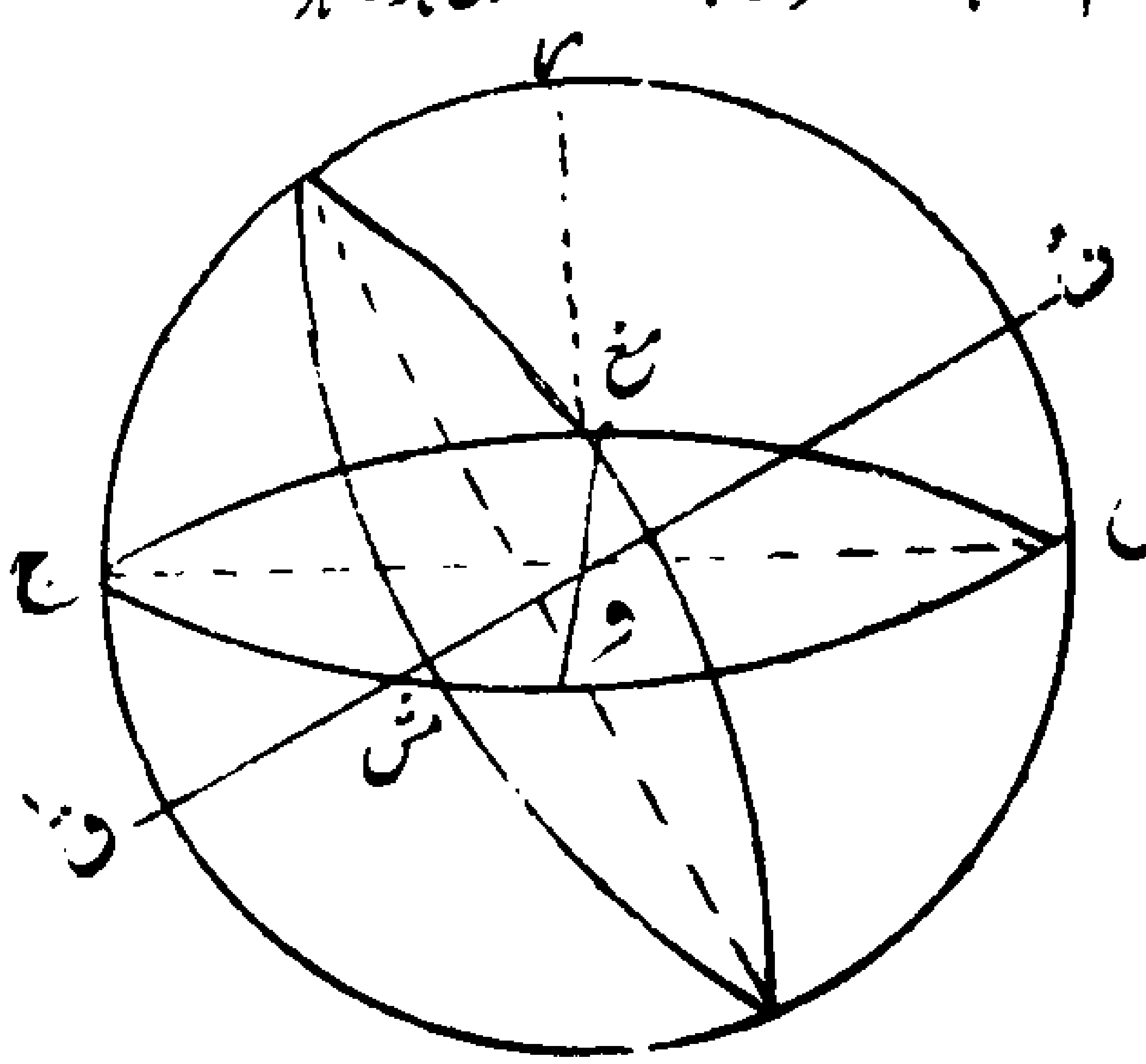
اگر کسی دن کرۂ سماوی[1] پر یعنی آسمان پر سورج کے مقام کی تبدیلی کا مشاہدہ احتیاط کے ساتھ کریں تو معلوم ہوگا کہ سورج ایک معین خط (جو محور سماوی کہلاتا ہے) کے گرد یکساں زاوی رفتار سے مشرق سے مغرب کی طرف گھومتا ہے۔ اگر ستاروں کی حرکت کا بھی اسی طرح مشاہدہ کیا جائے تو معلوم ہوتا ہے کہ ستارے بھی اسی محور سماوی کے گرد یکساں زاوی رفتار سے جو سب ستاروں کے لیے ایک ہی ہے، گھومتے ہیں لیکن ستاروں کی یہ زاوی رفتار سورج کی زاوی رفتار سے کسی قدر زیادہ ہوتی ہے (کیوں کہ ہم دیکھ چکے ہیں کہ کوکبی یوم شمسی یوم

---

[1] کرہ سماوی سے مراد ایک ایسا کرہ ہے جو مشاہدہ کنندہ یا مقام مشاہدہ کو مرکز مان کر کھینچا جائے، کرہ سماوی پر کسی فلکی جرم (ستارہ، سیارہ، سورج، چاند) کا مقام اس نقطہ سے تعبیر ہوتا ہے جس پر کرۂ سماوی کے مرکز کو فلکی جرم سے ملانے والا خط کرہ سماوی کو قطع کرتا ہے۔

سے چھوٹا ہوتا ہے) اگر مشاہدہ کنندہ میں سے یعنی کرۂ سماوی کے مرکز میں سے محورِ سماوی پر عمود وار ایک مستوی سطح کھینچی جائے تو یہ سطح کرۂ سماوی کو ایک کبیر دائرہ پر قطع کرتی ہے جو استوائے سماوی کہلاتا ہے استوائے سماوی مشرق اور مغرب کے نقطوں میں سے گزرتا ہے۔ کرۂ سماوی پر کا وہ کبیر دائرہ جو شمال اور جنوب کے نقطوں میں سے افقی سطح پر عمود وار کھینچا جائے نصف النہاری دائرہ کہلاتا ہے وہ نقطہ جس پر کرۂ سماوی کے مرکز میں سے افقی سطح پر عمود وار کھینچا ہوا خط کرۂ سماوی سے ملتا ہے راس کہلاتا ہے۔ نصف النہاری دائرہ محورِ سماوی اور راس میں سے بھی گزرتا ہے۔ محورِ سماوی کرۂ سماوی کو دو نقطوں پر قطع کرتا ہے جو سماوی قطب کہلاتے ہیں۔

افقی سطح کے ساتھ محورِ سماوی کا میلان مقامِ مشاہدہ کے عرض بلد کے مساوی ہوتا ہے۔ اگر استوا نصف النہاری دائرہ کو ع پر قطع کرے اور ر راس ہو تو قوس ع ر کے مقابل سماوی کرہ کے مرکز و پر بننے والا زاویہ بھی مقامِ مشاہدہ کے عرض بلد کے مساوی ہوتا ہے۔



اوپر کی شکل میں و مقام مشاہدہ ہو۔ ش اور ج ترتیب وار شمال اور جنوب کے نقطے ہیں مش اور مغ ترتیب وار مشرق اور مغرب کے نقطے ہیں ق اور قَ ترتیب وار قطب شمالی اور قطب جنوبی ہیں۔ افقی سطح ش مش ج مغ ہو اور مقام مشاہدہ کا عرض بلد ش ؤ ق کے مساوی ہوتا ہو ظاہر ہو کہ ش ؤ ق = ع ؤ ز

ساوی قطبوں میں سے ایک افق کے اوپر ہوتا ہو اور دوسرا افق کے نیچے۔ شمالی نصف کرہ ارض پر رہنے والوں کے لیے قطب شمالی ق افق کے اوپر کی طرف ہوتا ہو اور جنوبی نصف کرۂ ارض پر رہنے والوں کے لیے قطب جنوبی قَ افق کے اوپر کی طرف ہوتا ہو اگر کسی دن نصف النہار پر سورج کا مقام س ہو تو ع ؤ س سے اس دن سورج کا میل تعبیر ہوتا ہو یہ میل شمالی یا جنوبی ہوگا بہ موجب اس کے کہ نقطہ س نقطہ ع کے شمال کی طرف ہو یا جنوب کی طرف۔

سال کے دوران میں سورج کے طلوع ہونے کے مقام کی تبدیلی کے ساتھ ساتھ نقطہ س کا مقام بھی بدلتا رہتا ہو، اعتدال ربیع اور اعتدال خریف کے دن سورج نصف النہار کو نقطہ ع پر عبور کرتا ہو۔ یعنی نقط س نقطہ ع پر واقع ہوتا ہے۔ اس دن سورج کا میل صفر ہوتا ہو اور کرۂ سماوی پر سورج کا طریق استوا پر منطبق ہوتا ہو۔ اعتدال ربیع (۲۱ مارچ) سے سورج کا میل شمال کی طرف بڑھتا ہو اور ۲۱ جون کو اپنی انتہائی قیمت یعنی $\frac{1}{2}$ ۲۳° شمال اختیار کرتا ہو۔ ۲۱ جون سے سورج کا شمالی میل گھٹنے لگتا ہو اور ۲۳ ستمبر کو یعنی اعتدال خریف کے دن پھر صفر ہو جاتا ہو۔ ۲۳ ستمبر سے سورج کا میل جنوبی ہوتا ہو اور اس جنوبی میل

کی انتہائی قیمت یعنی ۲۳½° جنوب ۲۱ دسمبر کو حاصل ہوتی ہے۔ اس کے بعد جنوبی میل گھٹنا شروع ہوتا ہے اور پھر اعتدال ربیع کے دن سورج کا میل صفر ہو جاتا ہے۔ چوں کہ ۲۱ جون کو سورج کا شمالی میل اپنی انتہائی قیمت کو پہنچتا ہے۔ اس لیے یہ دن انقلاب گرما کہلاتا ہے۔ اسی طرح چوں کہ ۲۱ دسمبر کو سورج کا جنوبی میل اپنی انتہائی قیمت کو پہنچتا ہے۔ اس لیے یہ دن انقلاب سرما کہلاتا ہے

اس موقع پر یہ واضح کر دینا ضروری ہے کہ ان مقامات کے لیے جن کے عرض بلد ۲۳½° شمال اور ۲۳½° جنوب کے درمیان ہیں، سال میں دو دن سورج عین راس پر نصف النہار کو عبور کرتا ہے اور اس وقت کسی انتصابی سلاخ کے سایہ کا طول صفر ہوتا ہے۔ ظاہر ہے کہ اس دن جب کہ سورج نصف النہار کو راس پر عبور کرتا ہے۔ سورج کا میل مقام مشاہدے کے عرض بلد کے مساوی ہوتا ہے۔ مثلاً حیدرآباد کا عرض بلد ۱۷½° شمال ہے۔ اس لیے اگر حیدرآباد میں افقی سطح پر ایک سیدھی سلاخ قائم کی جائے تو نصف النہار کے وقت اس سلاخ کے سایہ کا طول صفر ہوگا جب کہ سورج کا میل ۱۷½° شمال ہے۔ بحری جدول سے معلوم ہوتا ہے کہ سورج کا میل ۱۷½° شمال بتاریخ ۱۰ مئی اور بتاریخ ۱؟ ... ہوتا ہے۔ اس لیے یہی دو مطلوبہ دن ہیں۔

اگر مقام مشاہدہ کا عرض بلد ۲۳½° سے بڑا ہو تو سلاخ کے نصف النہاری سایہ کا طول کسی دن بھی صفر نہیں ہو سکتا۔

یہ بھی دیکھا جائے کہ نصف النہار کے سوائے کسی اور وقت کسی سلاخ کے سایہ کا طول کسی مقام پر صفر نہیں ہو سکتا۔

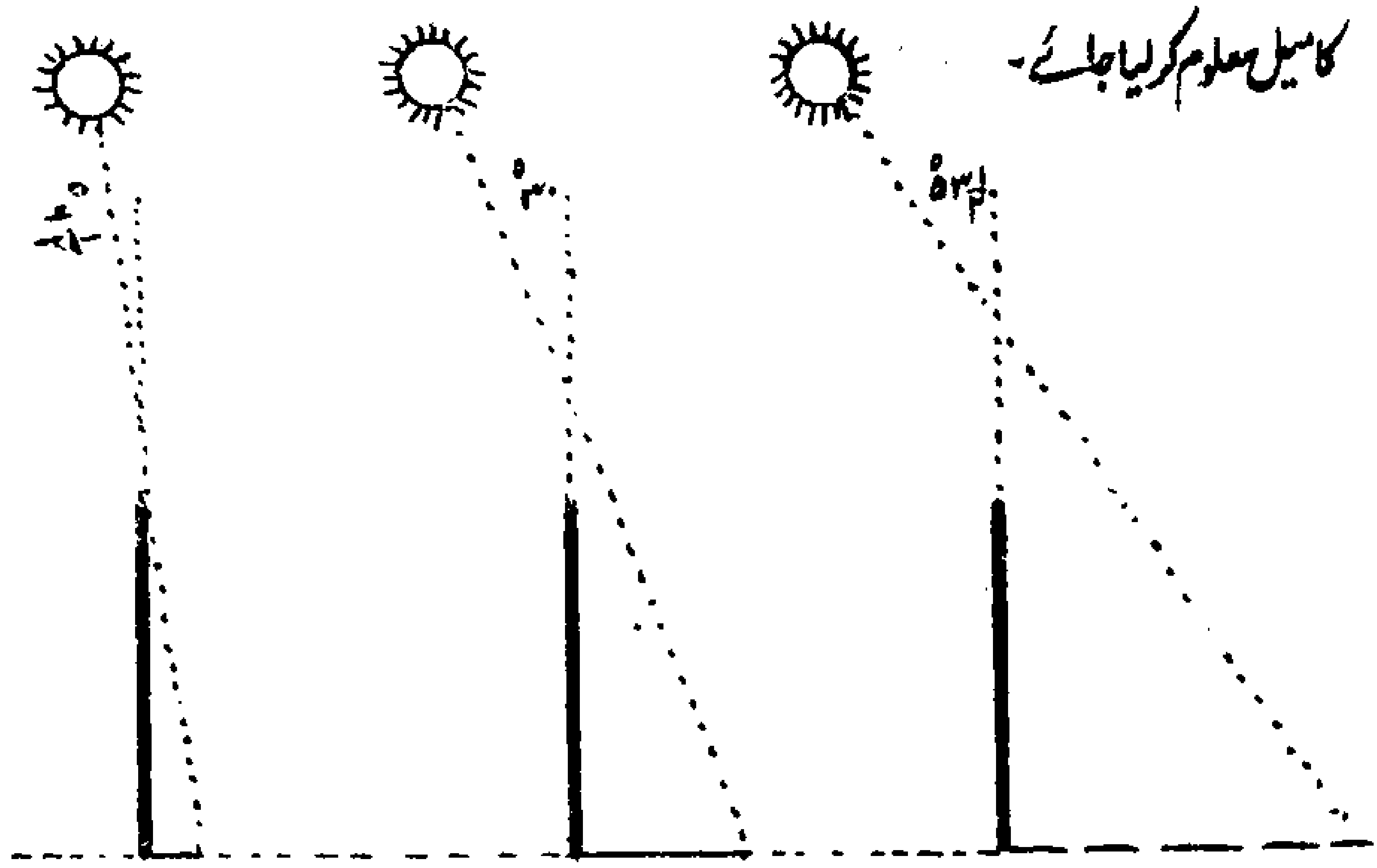
شمالی نصف کرۂ ارض کے اُن مقامات کے لیے جن کے ارض بلد ۲۳½° سے بڑے ہیں انتصابی یعنی سیدھی گڑی ہوئی سلاخ کے نصف النہاری سایہ کا طول اس دن کم سے کم ہوتا ہے جب کہ سورج کا شمالی میل اپنی انتہائی قیمت پر پہنچے یعنی انقلاب گرما (۲۱ جون) کے دن۔ اسی طرح جنوبی نصف کرۂ ارض کے ان مقامات کے لیے جن کے عرض بلد ۲۳½° سے بڑے ہیں۔ انتصابی سلاخ کے نصف النہاری سایہ کا طول انقلاب سرما (۲۱ دسمبر) کے دن کم سے کم ہوتا ہے۔

آسانی سے یہ بھی دیکھا جاسکتا ہے کہ شمالی نصف کرۂ ارض کے مقامات کے لیے انتصابی سلاخ کے نصف النہاری سایہ کا طول انقلاب سرما کے دن بڑے سے بڑا ہوتا ہے اور جنوبی نصف کرۂ ارض کے مقامات کے لیے متناظر تاریخ انقلاب گرما کے دن واقع ہوتی ہے۔

ذیل کی شکلوں میں ایسے مقام کے لیے جس کا عرض بلد ۳۰° شمال ہے (۱) انقلاب سرما کے دن (۲) اعتدالین کے دن اور (۳) انقلاب گرما کے دن انتصابی سلاخ کے سایہ کے نصف النہاری طول دکھائے گئے ہیں۔ یہ عمل بالکل عام ہے۔ اس لیے کسی مقام کے لیے کسی دن انتصابی سلاخ کے نصف النہاری سایہ کا طول معلوم کرنے کے لیے اس کو استعمال کیا جاسکتا ہے بہ شرطے کہ بحری جدول کی مدد سے مشاہدے کے دن سورج

لہ شمالی نصف کرۂ ارض میں رہنے والوں کے لحاظ سے ہم ۲۱ دسمبر کو انقلاب سرما کہتے ہیں۔ جنوبی نصف کرۂ ارض میں رہنے والوں کے لیے ۲۱ دسمبر کو انقلاب گرما واقع ہوتا ہے۔

کا میل معلوم کر لیا جائے۔



شکل ۱ شکل ۲ شکل ۳

انقلاب سرما کے دن سورج نصف النہاری دائرے کو ایک ایسے نقطے پر عبور کرتا ہے جو ع سے ۲۳½° جنوب کی طرف ہوتا ہے۔ اس لیے سورج کا نصف النہاری راسی فاصلہ (۲۳½° + ۳۰°) یعنی ۵۳½° جنوب ہوتا ہے اعتدالین کے دن سورج نصف النہاری دائرے کو نقطہ ع پر عبور کرتا ہے اس لیے سورج کا نصف النہاری راسی فاصلہ ۳۰° جنوب ہوتا ہے۔ انقلاب گرما کے دن سورج نصف النہاری دائرے کو ایک ایسے نقطے پر عبور کرتا ہے جو ع سے ۲۳½° شمال کی طرف ہوتا ہے۔ اس لیے اس دن سورج کا نصف النہاری راسی فاصلہ (۳۰° - ۲۳½°) یعنی ۶½° جنوب ہوگا۔
ان نتیجوں کی بنیاد پر مندرجہ بالا شکلیں ۱ ۲ ۳ کھینچی گئی ہیں۔ اگر سلاخ کا طول کسی مناسب پیمانے کے لحاظ سے کھینچا جائے اور چاندے کی مدد سے زاویے صحت کے ساتھ بنائے جائیں تو سلاخ کے سایے کا طول ناپ کر معلوم کیا جا سکتا ہے۔

انتصابی سلاخ یا مینار کے نصف النہاری سایے کے طول کے تغیرات کی مدد سے سال کے مختلف موسموں کے تعین کے ساتھ ساتھ عہد حجری متاخر (   ) میں انسان دن کے وقت انتصابی سلاخ کے سایے کی طول کی تبدیلی کے مشاہدے سے اپنے کھانے اور کام کے اوقات متعین کرتا تھا۔ جیسے جیسے انسان مویشیوں کی پرورش اور کاشتکاری میں ترقی کرتا گیا۔ اسے وقت کی تقسیم کا احساس بھی زیادہ ہوتا گیا اور اس احساس کی وجہ سے تین اہم نتیجے مرتب ہوئے۔

قدیم قوموں میں موسموں کی تبدیلی اور اناج بونے اور غلّہ جمع کرنے کے اوقات کے تعین کا کام قبیلے کے معمر اور عقلمند افراد یا ایک خاص خاندان کے سپرد کیا جاتا تھا جنھیں فلکی اجرام کے مقام کی تبدیلی کا خاص علم ہوتا تھا۔ اسی طرح تقویم ساز کاہنوں کی ایک جماعت وجود میں آئی جس کے سپرد تقسیم عمل کے اصول کے مطابق موسموں کے تعین اور تقویم کی حفاظت کا اہم سماجی کام تھا۔ تقویم ساز کاہنوں کی ایسی جماعت کو موجودہ زمانے کی کسی مذہبی جماعت کے مماثل خیال کرنا فاش غلطی ہے۔ قدیم زمانے میں کاہنوں کا حلقہ اثر صرف مذہب تک محدود نہ تھا بلکہ ان کا اہم ترین فریضہ ایک اقتصادی اور سماجی ضرورت کو پورا کرنا تھا۔ اگرچہ کہ اس جماعت کے فرائض میں غلط توہمات اور بے بنیاد عقیدے شامل کیے گئے تاہم باضابطہ اور علمی معلومات کی بنیاد اسی جماعت کے ہاتھوں رکھی گئی۔ ان کے عقائد جو موجودہ معلومات کی روشنی میں بالکل لغو ہیں۔ دراصل مظاہرات فطرت کی عقلی توجیہہ کی پہلی منظم کوشش کا نتیجہ تھے۔

قدیم انسان نے آسمانوں پر سورج چاند اور ستاروں کے مقاموں کی تبدیلی کے ساتھ خواب اور بیداری، بہار اور خزاں، اناج بونے اور غلہ جمع کرنے کے اوقات، مویشیوں کے بچے دینے کے موسم اور عورت کی صنعتی زندگی (Sexual cycle) کے ماہانہ دور کا گہرا تعلق پایا۔ چوں کہ عوام کو فلکی اجرام کے مقاموں کی تبدیلی کے قواعد کا علم نہ تھا اس لیے ان کے دلوں میں تقویم ساز کاہنوں کی جماعت کے متعلق یہ خیال پیدا ہوا کہ ان کے وسیلے کے بغیر آسمانی دیوتاؤں کو خوش نہیں کیا جا سکتا۔ اس لیے کاہنوں کے توسط سے آسمانی دیوتاؤں کی خدمت میں نذر اور قربانیاں پیش ہونے لگیں۔ چوں کہ عوام کے اس غلط عقیدے سے کاہنوں کا نہ صرف مالی فائدہ تھا بلکہ اقتدار اور اثر بھی بڑھتا تھا اس لیے انھوں نے اس مقدس رشوت دہی کی خوب تائید کی۔

تقریباً پانچ ہزار سال قبل کلدانی یا خالدیہ (Chaldeans) کے کاہن چاند اور سورج گرہنوں کے متعلق پیش گوئیاں کر سکتے تھے۔ چوں کہ ان کا علم عوام سے بالکل مخفی رکھا جاتا تھا اس لیے وہ اپنی پیش گوئیوں کی بنا پر عوام کو مرعوب کرتے تھے۔ اس طرح فلکی اجرام کا علم صرف ایک خاص جماعت تک محدود رہا اور بجائے خدمت خلق کے لیے کام آنے کے عوام پر ظلم و ستم کا ایک زبردست آلہ بن گیا۔

کئی صدیوں تک یہ تقویم ساز کاہن موسموں کی تعین اور تقویم کی حفاظت کی اہم سماجی ضرورت کو پورا کرتے رہے اور اسی عرصے میں انھوں نے عددوں کی تحریر کا طریقہ ایجاد کیا۔ مویشیوں کی تعداد محفوظ رکھنے کی کوئی ضرورت نہ تھی۔ اعداد محفوظ رکھنے کی ضرورت اس وقت

پیش آئی جب کہ موسموں کے متعلق باضابطہ مشاہدات ہونے لگے ۔ تحریر کے ذریعے پیغاموں کو ایک شخص سے دوسرے تک پہنچانے کا طریقہ بہت بعد کی ایجاد ہے ۔ سب سے پہلے موسموں اور دیگر آسمانی مظاہروں کی تاریخوں کو محفوظ رکھنے کے لیے انسان نے مختلف طریقے ایجاد کیے ۔ انسان کی سب سے پہلی تحریریں مذہبی تہواروں اور قربانیوں کی یادداشتیں ہیں جو اس نے پتھروں اور لکڑی کے ٹکڑوں پر مختلف نشانوں کی صورت میں کندہ کیں ۔

عددوں کے طرز تحریر کے قدیم طریقوں میں سے ہر ایک میں انسان کی دس انگلیوں کا اثر پایا جاتا ہے ۔ چناں چہ بحیرہ روم کے کنارے جو قدیم قومیں آباد تھیں ان کے رسم الخط میں اعداد ایک تا نو ۹ کو انگلیوں کی شکلوں کے ذریعے تعبیر کیا جاتا تھا ۔ اس کے بعد فونیقیوں (Phoenicians) نے تجارتی اغراض کے لیے عددوں کی تحریر کا جو طریقہ ایجاد کیا اس میں اکائی کے لیے ایک علامت تھی جو نو تک دہرائی جاسکتی تھی ۔ جیسا کہ رومی طرز تحریر (I ، II ، III . . .) میں کیا جاتا ہے ۔ اکائی کی علامت کے علاوہ دس اور سو کے لیے بھی جدا جدا علامتیں تھیں جو حسب سابق دہرائی جاسکتی تھیں جس طرح کہ رومی طرز تحریر میں دس کی علامت X اور سو کے لیے علامت C استعمال کی جاتی ہے ۔ . . . یہ فینیقی (Phoenician ، طرز تحریر طولانی تھا لیکن اس کے بعد کی ایجادوں سے زیادہ باضابطہ تھا ۔ شمالی اٹلی کی ایک قدیم قوم ایٹروسکن (Etruscan) نے فینقی طرز تحریر کو کسی قدر مختصر اور کم طولانی بنانے کے لیے ایک ہاتھ کی گنتی کی طرف رجوع کیا اور رومی ہندسوں کی

طرح اعداد پانچ، پچاس اور پانچ سو کے لیے علامتیں داخل کیں۔ جیسا کہ رومی طرز تحریر میں علامتیں V، L اور D ہیں ان کے بعد یونانیوں نے عددوں کے اس طرز تحریر کو ترک کر کے حروف تہجی کی مدد سے عددوں کی تحریر کا ایسا طریقہ ایجاد کیا جس میں تمام حروف تہجی استعمال ہوتے تھے۔ عددوں کی تحریر کا یہ طریقہ مختصر تو تھا لیکن اس کی مدد سے معمولی حسابی عمل بھی آلات کی مدد کے بغیر نہیں کیے جا سکتے تھے۔ اس لیے یہ طرز تحریر حساب کی ترقی کی راہ میں سنگ گراں ثابت ہوا۔ نیز حروف تہجی کی مدد سے عددوں کو ظاہر کرنے کی وجہ سے ریاضی میں دو مضر اثر داخل ہوئے۔ جن کا ذکر آئندہ ابواب میں کیا جائے گا۔

علم حساب کی قدیم ترین کتابوں میں ایک چینی کتاب ہے جس کا نام "کتاب ترتیبات"[1] ہے جو تقریباً ۱۱۰۰ سال قبل مسیح لکھی گئی تھی۔ اس کتاب سے معلوم ہوتا ہے کہ چینیوں نے صحیح عددوں کو طاق اور جفت عددوں کی دو جماعتوں میں تقسیم کیا تھا۔ طاق اعداد ۱، ۳، ۵، ۷ . . . . . . میں سے ہر ایک "نر" عدد کہلاتا تھا اور جفت اعداد ۲، ۴، ۶، ۸ . . . . . . میں ہر ایک "مادہ" عدد کہلاتا تھا۔ "نر" اور "مادہ" عددوں کے کامل ازدواج سے صحیح عددوں کا سلسلہ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ . . . . حاصل ہوتا ہے۔

یہ اعداد کسی جماعت میں افراد کی تعداد کو ظاہر کرنے کے لیے تو کارآمد

---

[1] The Chinese Book of Permutations

تھے لیکن ان کے ذریعے کسی پیمائش کو تعبیر کرنے میں بہت سی مشکلیں پیش آئی تھیں۔ مثلاً قدیم زمانے کے ریاضی دانوں کے لیے $\sqrt{2}$ [۱] ناقابل فہم عدد تھا کیوں کہ $\sqrt{2}$ کی قیمت نر اور مادہ اعداد کے رقوم میں ہرگز نہیں بیان کی جا سکتی۔

عددوں کی اس بہ ظاہر بے معنی تذکیر و تانیث پر ہمیں حیرت نہیں ہونی چاہیے کیوں کہ قدیم زمانے میں انسان کو اپنی اور اپنی مویشیوں کی نسل کی افزائش سے جو گہری دل چسپی تھی اسی کی وجہ سے موسموں کا حساب رکھنے کے لیے باضابطہ تقویم کی ضرورت پیش آئی اور اس تقویم سازی کا ضمنی نتیجہ عددوں کے طرز تحریر کی ایجاد ہے۔ یہ امر کہ عددوں کی تذکیر و تانیث کا یہ رجحان در اصل لنگ پرستی کا نتیجہ تھا۔ اس بات سے بھی ظاہر ہوتا ہے کہ اکثر قدیم تہذیبوں میں عدد تین کو، جو مرد کے ظاہری اعضائے تناسل کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے خاص اہمیت حاصل تھی۔ چناں چہ عددوں کی رومی ترقیم میں تین تین کے وقفے کے بعد ترقیم بدل جاتی ہے۔ جیسا کہ ذیل میں دکھایا گیا ہے۔

I	II	III	IV	V
VI	VII	VIII	IX	X
۴	۴۴	۴۴۴	۴D	D

عددوں کی ترقیم کے قدیم فینقی (Padenician) اور سمیری (Sumerlan) طریقوں میں بھی عددوں کی علامتوں کو تین تین

---

[۱] وہ عدد ہے جس کو اسی سے ضرب دینے سے عدد دو حاصل ہوتا ہے

کی جماعتوں میں ترتیب دینے کی طرف میلان پایا جاتا ہے - عدد چار کے لیے رومی ترقیم IV دراصل پانچ منفی ایک کو ظاہر کرتی ہے - یہ طریقہ بالکل ایسا ہے جیسا کہ چار گھنٹے پچاس منٹ کہنے کی بجائے دس منٹ کم پانچ گھنٹے کہنے کا طریقہ - عددوں کی اس غیر موزوں ترقیم کی وجہ سے رومی ریاضی دان حساب کے آسان طریقوں کی ایجاد سے قاصر رہے -

انسانی تہذیب کے ارتقا کی تاریخ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ حساب کے آسان اور زود عمل قاعدوں کی ضرورت پیش آنے کے بہت پہلے موسموں کی تبدیلیوں کی یاد داشت مرتب کرنے کے لیے عددوں کے لیے تحریری علامتیں ایجاد ہوئیں - عددوں کی ترقیم کی ایجاد کے وقت انسان کو اس امر کا اندازہ ہی نہ تھا کہ آیندہ چل کر اسے حساب کے آسان قاعدوں کی ضرورت پیش آنے والی ہے - جیسے جیسے انسان کو سماجی ضرورتوں کے لیے بڑے بڑے عددوں پر حساب لگانے کی ضرورت پیش آئی تو اس نے ایسے آلات سے مدد لی جن سے اس کے حساب کی کل فضا بالکل مقید اور محصور ہو گئی - حساب کے ان قدیم آلات کے جمود نے انسان کی دماغی قوتوں کو ترقی کرنے سے روک دیا - سب سے پہلے حساب رکھنے کے لیے غالباً لکڑیوں پر نشانات لگائے جاتے تھے - اس منزل سے جب انسان آگے بڑھا تو اس نے کوڑیوں اور سیپیوں سے مدد لینی شروع کی - اس طریقے میں یہ بھی سہولت تھی کہ کوڑیوں اور سیپیوں کو کئی دفعہ استعمال کیا جا سکتا تھا - کوڑیوں اور سیپیوں کے استعمال سے انسان کی توجہ گنتارے کی ایجاد کی طرف مبذول ہوئی سب سے پہلے غالباً کسی ہموار سطح پر متعدد نالیاں بنا کر ان میں حساب کی کوڑیاں اور سیپیاں رکھی جاتی تھیں -

اس کے بعد شاید کھڑی لکڑیوں پر سوراخ دار کوڑیاں یا سیپیاں پروئی جاتی تھیں۔ آخر میں گنتارا ایک چوکھٹے کی شکل میں بنایا گیا جس میں کئی افقی تار لگے ہوئے ہوتے ہیں اور ہر تار پر دس دس کوڑیاں یا منکے پروے ہوئے ہوتے ہیں۔ گنتارے کی ان صفوں میں سب سے نچلی صف اکائیوں کو تعبیر کرتی ہے۔ دوسری صف دہائیوں کو، تیسری صف سیکڑوں کو اور چوتھی صف ہزاروں کو اور علیٰ ہذا القیاس۔ یہ گنتارا انسان کی قدیم ترین ایجادوں میں سے ہے کئی ہزار قبل مسیح اہل مصر اور اہل چین گنتاروں کے استعمال سے واقف تھے رومیوں کے گنتارے کا استعمال ایٹروسکن قوم سے سیکھا حضرت مسیح کے زمانے تک گنتارے کے سوا حساب کا کوئی اور آلہ نہ تھا۔

ہمارے لیے اعداد ایسی علامتیں ہیں جن کی مدد سے حساب کے سوال حل کیے جا سکتے ہیں۔ لیکن عدد کی اس تصور سے قدیم یونان کے بہترین ریاضی داں بھی ناآشنا تھے۔ عددوں کی ترقیم کے قدیم طریقوں کا مقصد صرف یہ تھا کہ گنتارے کی مدد سے حاصل کیے ہوئے نتیجوں کو قلم بند کیا جائے۔ انھیں قلم سے حسابی سوال حل کرنے کا خیال تک نہ آسکتا تھا۔ ریاضی کی قدیم تاریخ میں سب سے زیادہ انقلاب انگیز ایجاد علامت کی ایجاد ہے۔ یہ علامت گنتارے کی خالی صف کو تعبیر کرنے کے لیے ایجاد کی گئی۔ ساتویں باب میں وضاحت کے ساتھ یہ بتایا جائے گا کہ علامت صفر کی ایجاد کس قدر اہم ہے اور اس کی مدد سے حساب کے آسان طریقے کس طرح دریافت کیے گئے۔ یہاں ہم عدم محض یعنی صفر کی ایجاد کے متعلق سرسری طور پر صرف دو باتوں کا ذکر کریں گے۔ پہلی بات یہ ہے کہ اگر ہماری ترقیم کا اساس دس ہو تو ہمیں صفر کی علامت کے علاوہ ایک سے نو تک کے عددوں کے لیے نو علامتوں کی ضرورت

پیش آتی ہے اور صرف ان دس علامتوں کی مدد سے کسی بڑے سے بڑے عدد کو تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ برخلاف اس کے کہ رومی طریقے میں دس کے لیے ایک علامت، سو کے لیے دوسری علامت اور ہزار کے لیے تیسری علامت کی ضرورت پیش آتی ہے یعنی ہم دس کو جتنی دفعہ ضرب دیں گے اتنی نئی علامتوں کی ضرورت پیش آئے گی۔ صفر کی ایجاد کے متعلق دوسری اہم بات یہ ہے کہ اس کے ذریعے عددوں کی جو ترقیم حاصل ہوتی ہے اس کی مدد سے صرف کاغذ اور قلم سے تمام حسابی عمل آسانی سے کیے جا سکتے ہیں اور کسی آلے کی ضرورت نہیں پیش آتی۔ اس سلسلے میں یہ واضح کرنا ضروری ہے کہ قدیم زمانے کے ریاضی داں ایسے سماجی ماحول میں پرورش پاتے تھے جس میں بڑے عددوں کے استعمال اور اُن پر حساب لگانے کی ضرورت پیش آنے سے قبل ہی عددوں کی ترقیم ایجاد ہو چکی تھی اور اس ترقیم کی وجہ سے حساب لگانے کے لیے وہ گنتارے کے استعمال پر مجبور تھے۔ موجودہ زمانے میں صرف چھوٹے بچوں کو حساب سکھانے کے لیے گنتارا استعمال کیا جاتا ہے۔

عام طور پر دو قسم کے عددوں میں امتیاز کیا جاتا ہے۔ پہلی قسم میں اسم عدد ہوتے ہیں جیسے ایک، دو، تین وغیرہ جو کسی جماعت یا گروہ میں افراد کی تعداد کو تعبیر کرتے ہیں۔ دوسری قسم میں صفت عدد ہوتے ہیں جیسے پہلا، دوسرا، تیسرا وغیرہ جن سے کسی چیز کا ایک گروہ میں محل وقوع ظاہر کیا جاتا ہے۔ عددوں کی ان دو قسموں کا فرق اس قدر اہم نہیں ہے جتنا کہ ایک اور فرق جو ساعت شماری کے سلسلے میں پیش آتا ہے۔ اب ہم عددوں کے اس نئے استعمال کا مختصر ذکر کریں گے۔ جب ہم کہتے ہیں کہ ایک گلے میں سو بھیڑیں ہیں تو ہمارا مطلب یہ ہوتا ہے کہ اگر ان بھیڑوں کو ایک صف میں

کھڑا کیا جائے تو آخری بھیڑ سوویں ہوگی۔ قدیم زمانے میں موسموں کی یادداشت بھی گنتی کی چھڑی پر نشانات کے ذریعے بالکل اسی طرح رکھی جاتی تھی جس طرح ایک گلے کی بھیڑوں کو ایک صف میں کھڑا کیا جاتا تھا۔ جب ہم بھیڑوں کی گنتی کرتے ہیں تو ہم فرض کر لیتے ہیں کہ گنتی کی خاطر اس گلے کی سب بھیڑیں یکساں ہیں۔ گو ہم جانتے ہیں کہ قد میں، عمر میں، وزن میں اور اون کی مقدار میں کوئی ایک بھیڑ بھی دوسری کی مانند نہیں ہے۔ اس طرح قدیم تقویمیں وقت کی ایسی تقسیم پر مبنی نہ تھیں جن کے تمام وقفے مساوی ہوں۔ قدرتی مشاہدوں کی مدد سے واقعات کی ترتیب کو قلم بند کیا جاتا تھا مثلاً مختلف دنوں کا شمار کیا جاتا تھا۔ مگر اس بات کا خیال نہیں رکھا جاتا تھا کہ یہ مختلف دن بالکل ایک دوسرے کے معادل یا مساوی ہیں یا نہیں۔ جس طرح کہ ایک بھیڑ کو دوسری بھیڑ کی مانند خیال کیا جاتا تھا۔ اسی طرح ایک دن کو دوسرے دن کی مانند یا مساوی مان لیا جاتا تھا۔ اب یہ غور سے دیکھا جائے کہ اس بیان میں کہ ایک سال میں ۳۶۵ دن ہوتے ہیں اور اس بیان میں کہ ایک دن اور رات میں ۲۴ گھنٹے ہوتے ہیں۔ زمین آسمان کا فرق ہے، پہلے بیان میں محض گنتی ظاہر ہوتی ہے اور دوسرے بیان سے یہ بتانا مقصود ہے کہ دن اور رات کی تقسیم ریت گھڑی یا کسی دوسرے مناسب آلے کی مدد سے ۲۴ مساوی حصوں میں کی گئی ہے اس تشریح سے معلوم ہوتا ہے کہ جب انسان نے دن اور رات کی تقسیم ریت گھڑی یا سلاخ کے سایے کے طول یا کسی اور آلے کی مدد سے کرنی شروع کی تو اس نے عدد کا ایک نیا استعمال دریافت کیا۔ غور سے دیکھا جائے تو ایک گھنٹے اور دوسرے گھنٹے میں کوئی ایسی قدرتی حد فاصل نہیں ہے۔ جیسے ایک

دن اور دوسرے دن میں یا ایک اعتدال ربیع اور دوسرے اعتدال ربیع میں ہے یعنی کسی قدرتی واقعہ کی بنا پر ایک گھنٹے کو دوسرے گھنٹے سے جدا نہیں کیا جا سکتا، صرف ایک مصنوعی پیمانے کی بنا پر ہم وقت کو گھنٹوں اور منٹوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ گھنٹے اور منٹ ایک مصنوعی پیمانے پر کی پیمائشوں کو تعبیر کرتے ہیں۔ ان پیمائشوں میں صرف اس قدر صحت ہو سکتی ہے جتنی پیمانہ مرتب کرنے میں اور پیمانے پر نمائندہ (POINTER) کے مقام کا اندازہ لگانے میں ہو سکتی ہے۔ جیسے جیسے پیمانے کی درجہ بندی اور نمائندے کے مقام کے تعین میں صحت حاصل ہوگی ویسے ہی ہماری پیمائش میں بھی صحت حاصل ہوگی۔

(۳) ایک دیا ہوا مقام کس سمت میں واقع ہے؟

مستقل شہری زندگی کے لیے وقت کا شمار اولین شرط تھی اور وقت شماری ہی کے سلسلے میں انسان کو زیادہ صحیح پیمائش کی ضرورت پیش آئی۔ یہ امر تقریباً یقینی ہے کہ انسان نے طول اور فاصلہ کی پیمائش سے بہت پہلے ہی سمت کی پیمائش شروع کر دی تھی۔ دریائے نیل کے کنارے پر مستقل شہری زندگی کے بالکل ابتدائی زمانے میں ایک سال میں دنوں کی تعداد کا تعین شعرای یمانی کے شمسی طلوع[1] (HELIACAL RISING) کی مدد سے لیا گیا تھا کسی خاص ستارے کے طلوع کا مشاہدہ کرنے کے لیے یہ ضروری ہے کہ اس کے طلوع ہونے کے مقام کی سمت معلوم کی جائے۔ اس بات کے باور کرنے کی قوی دلیلیں موجود ہیں کہ عہد حجری جدید میں، جب کہ کسی قابلِ ذکر شہری زندگی کی

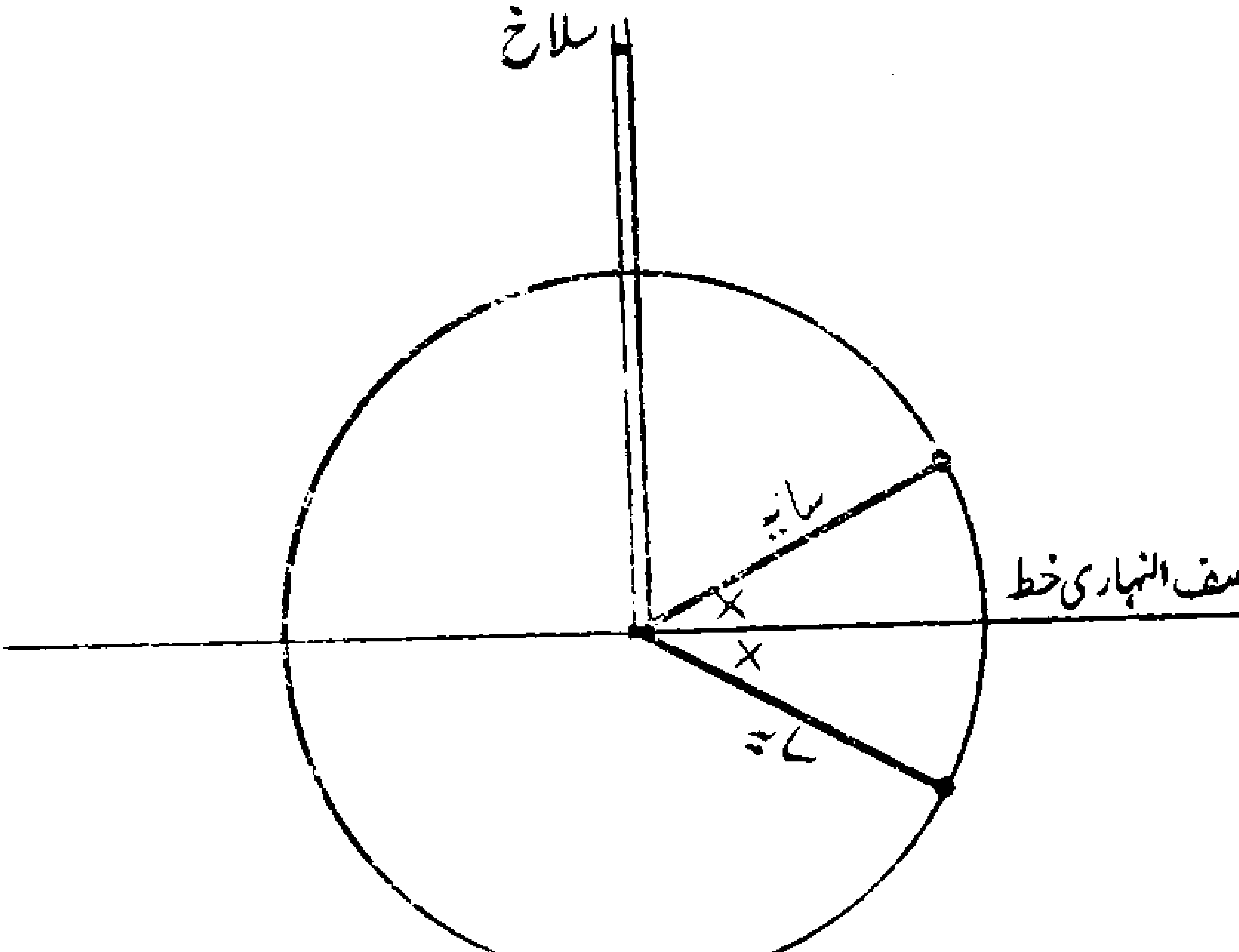
---

[1] شمسی طلوع سے مراد ستارے کا وہ طلوع جو طلوع شمس کے عین قبل واقع ہو۔

ابتدا بھی نہ ہوئی تھی، انسان نے ناتراشیدہ پتھروں سے ایسے نشان بنائے تھے جن سے آسمانی مظاہروں کی سمتوں کا تعین ہو سکتا تھا۔ کسی جسم کی سمت کے تعین کے لیے ضروری ہے کہ اسے ایک ثابت نقطے سے دیکھا جائے اور اس کے محلِ وقوع کا تعین ایک ثابت خط کی مدد سے کیا جا سکے۔ اس ضرورت کو پورا کرنے کے لیے تقویمی تہذیبوں کے وجود میں آنے سے بہت پہلے انسان نے دو ثابت خط متعین کیے تھے جن میں سے ایک نصف النہاری خط ہے جو شمال اور جنوب کے نقطوں میں سے گزرتا ہے اور دوسرا اِس نصف النہاری خط پر عمود وار کھنچا ہوا خط ہے جو مشرق اور مغرب کے نقطوں میں سے گزرتا ہے۔ ان دو ثابت خطوں کے تعین سے ریاضی کی بنیاد قائم ہوئی جو سماجی زندگی کے لیے ضروری اور کارآمد تھی۔

شمال اور جنوب کے نقطوں میں سے گزرنے والے نصف النہاری خط کا انتخاب اس لیے کیا گیا تھا کہ کسی دن کسی انتصابی سلاخ کے سایے کا طول سب سے چھوٹا ہوتا ہے جب کہ سایہ اس خط پر ہو۔ نیز نصف النہاری دائرے پر وہ سماوی محور واقع ہے جس کے گرد تمام ستارے گھومتے ہوئے نظر آتے ہیں۔ اہرامِ مصر کی تعمیر کے زمانے میں ستارہ ع۔ ڈریکونس (α - DRACONIS) شمالی قطب سماوی کے گرد ایک چھوٹے دائرے میں (جس کا نصف قطر تقریباً ۳° تھا) گھومتا تھا۔ ہزارہا سال میں ستاروں کے لحاظ سے قطب سماوی کے مقام میں خفیف سی تبدیلی ہوئی ہے اور موجودہ زمانے میں قطب سماوی کی شناخت قطب تارے کی مدد سے ہو سکتی ہے جو قطب سماوی سے صرف ایک درجے کے فاصلے پر ہے۔ ہمارے پاس اس امر کی اثری شہادتیں موجود ہیں کہ قدیم زمانے میں انتصابی سلاخ کے

نصف النہاری سایے کی سمت یعنی شمال اور جنوب میں سے گزرنے والے خط کی سمت ذیل کے طریقے سے معلوم کی جاتی تھی۔ ریت یا نرم زمین پر ایک سیدھی چھڑی گاڑ دی جاتی تھی یا ایک ستون بنایا جاتا تھا۔ اس چھڑی یا ستون کے پائیں کو مرکز مان کر ایک ڈوری کی مدد سے ایک دائرہ کھینچا جاتا تھا۔ ایک دن میں صرف دو وقت چھڑی یا ستون کے سایے کا سرا اس دائرے پر واقع ہوتا ہے۔ سایے کے سرے کے ان مقامات کو دائرے



کے مرکز سے ملانے والے خطوں کے درمیانی زاویے کا ناصف یعنی اس زاویے کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرنے والا خط شمال اور جنوب کے نقطوں میں سے گزرنے والا خط ہوتا ہے۔ اس نصف النہاری خط پر عمود وار کھنچا ہوا خط مشرق اور مغرب کے نقطوں میں سے گزرنے والا خط ہوتا ہے۔

مشرق اور مغرب کے نقطوں میں سے گزرنے والے خط کا تعین سورج کے طلوع ہونے کی انتہائی شمالی اور انتہائی جنوبی سمتوں کی مدد سے بھی

آسانی سے کیا جا سکتا ہے۔ اگر انقلابِ گرما اور انقلابِ سرما کے وقت سورج کے طلوع ہونے کی سمتیں معلوم کی جائیں تو ان سمتوں کے درمیانی زاویے کا تاسف مشرق اور مغرب کے نقطوں میں سے گزرنے والا خط ہوتا ہے اور اس طرح سے وہ سمتیں حاصل ہوتی ہیں جن میں اعتدالین کے دن سورج طلوع اور غروب ہوتا ہے۔ قدیم زمانے میں زرخیزی کا تہوار اعتدال ربیع کے دن بڑی شان وشوکت سے منایا جاتا تھا۔ نیز قدیم قبروں کی سمتوں سے بھی اس بات کا پتا چلتا ہے کہ قبروں کی تعمیر میں مشرق اور مغرب کی سمت کو ملحوظ رکھا جاتا تھا۔

اسٹون ہینج (STONEHENGE) اور دیگر مقاموں پر ایسے قدیم آثار موجود ہیں جن کی مدد سے ہزارہا سال پہلے انقلابِ گرما کے دن سورج کے طلوع ہونے کی سمت کا تعین کیا جاتا تھا۔ اس غرض کے لیے دو ستون، جن کی بلندیاں مختلف ہوں، اس طرح قائم کیے جاتے تھے کہ اُن کے سروں کو ملانے والے خط کی سمت سے انقلابِ گرما کے دن سورج کے طلوع ہونے کی سمت ظاہر ہوتی تھی۔ اسی طرح انقلابِ سرما کے دن کے لیے بھی سورج کے طلوع ہونے کی سمت کا تعین کیا جاتا تھا۔

اُس زمانے سے بہت قبل جس کے تہذیبی کارناموں کے متعلق ہمیں تحریری شہادتیں ملتی ہیں، تقویم ساز کاہن ستاروں کے نصف النہاری مرور کی سمتوں سے اچھی طرح واقف تھے۔ مصر کے سب سے بڑے ہرم کا (جو تقریباً ۲۸۰۰ سال قبل مسیح تعمیر ہوا تھا) جنوبی رُخ اس طرح بنایا گیا تھا کہ مرور کے وقت شعرائے یمانی کی شعاعیں ہرم کے جنوبی رُخ پر عمود دار ہوتی تھیں اور شعرائے یمانی اس روشن دان کی عین سیدھ میں

دکھائی دیتا تھا جو جنوبی رُخ سے فرعون کی شاہی آرام گاہ تک بنایا گیا تھا۔ ہرم کا صدر دروازہ اور ایک اور روشن دان اس طرح بنائے گئے تھے، نچلے مرور کے وقت عء۔ ڈریکونس (DRACONIS - یے) ان کی سمت میں دکھائی دیتا تھا۔ ان تعمیری کمالات کی حیرت انگیز صحت دراصل صدیوں کی تحقیق اور مشاہدے کا نتیجہ تھی اور یہ اس بات کا بیّن ثبوت ہے کہ سمت کے تعین کی حقیقی ضرورت کے تحت زاویے کی پیمائش وجود میں آئی۔

قدیم مذہبی روایتوں کے مطابق کرہ سماوی محور سماوی کے گرد گھومتا ہے اور تمام اجرام فلکی اس کرہ کے اندر متوازی دائروں میں گردش کرتے ہیں۔ ہر روز سورج کے لحاظ سے چاند تھوڑا سا پیچھے کی طرف پھسل جاتا ہے جس کی وجہ سے اس کی ہیئتوں کی تبدیلی کے ساتھ ساتھ اس کے طلوع اور غروب کے وقت بھی پیچھے ہٹتے جاتے ہیں۔ نیز ستاروں کے لحاظ سے سورج بھی کرہ سماوی پر ایک ایسے دائرے پر پھسلتا ہے جو استوائے سماوی کے ساتھ ایک مستقل زاویہ ($23\frac{1}{2}^\circ$) بناتا ہے۔ سورج کی اس حرکت کی وجہ سے ستارے سابقہ دن کی نسبت ذرا پہلے طلوع ہوتے ہیں۔ استوائے سماوی کے لحاظ سے سورج کے اس مائل طریق (یعنی طریق الشمس) کی مدد سے سال کے دوران میں سورج کے نصف النہاری ارتفاع کی تبدیلی کی توجیہہ کی جا سکتی ہے۔ سال کے طول کے تعین کے لیے نہایت صحیح پیمائشوں کی ضرورت ہوتی ہے۔ اس لیے ہمیں اس بات پر تعجب نہ ہونا چاہیے کہ سال کے طول کی ابتدائی پیمائشیں کچھ زیادہ صحیح نہیں تھیں۔ جوں جوں وقت اور زاویے کی پیمائش کے طریقے زیادہ صحیح ہوتے گئے سال کے طول کا تعین بھی زیادہ صحت کے ساتھ ہونے لگا۔

پہلے پہل اہلِ بابل کے ہاں ایک سال صرف ۳۶۰ دن کا ہوتا تھا اور بعد میں جب اس غلطی کا احساس ہوا تو انھوں نے تیس تیس دن کے بارہ مہینوں کے سال میں تہواروں کے پانچ دن کا اضافہ کرکے سال میں ۳۶۵ دن مقرر کیے۔ سال کی ابتدائی پیمائش یعنی ۳۶۰ دن کی بنا پر اہلِ بابل نے طریق الشمس کو ۳۶۰ مساوی حصّوں میں تقسیم کیا اور اس طرح ایک درجے کا تخیل وجود میں آیا۔ سورج اپنے طریق پر ستاروں کے لحاظ سے روزانہ تقریباً ایک درجہ مغرب سے مشرق کی طرف حرکت کرتا ہے۔

حضرت مسیح سے دو ہزار سال قبل ہی بحیرۂ روم کے کناروں پر بسنے والی متمدن قومیں کرۂ سماوی پر طریق الشمس اور استوا کے درمیانی زاویہ (یعنی طریق الشمس کے میلان) سے واقف تھیں۔ قدیم آثار سے یہ پتا چلتا ہے کہ اہلِ بابل اصطرلاب کی قسم کے آلات اور بالکل ابتدائی قسم کے سمت پیماؤں سے کام لیتے تھے اور دوربین کی ایجاد کے زمانے تک صرف انھی آلات سے ہیئتی مشاہدے کیے جاتے تھے۔ ان ابتدائی آلات کی مدد سے انھوں نے مقامی آسمان کا نقشہ تیار کیا تھا۔

اُوپر کے بیان سے یہ ظاہر ہو گیا ہو گا کہ کس طرح سمت کی پیمائش سے عددوں کے استعمال کا ایک نیا طریقہ دریافت ہوا۔ ابتدا میں عددوں کے ذریعے کسی گروہ کے افراد کی تعداد کو ظاہر کیا جاتا تھا اور اس عمل میں پوری صحت ممکن تھی۔ لیکن کسی پیمائش میں جو آلات کی مدد سے کی جائے کسی طرح پوری صحت حاصل نہیں ہو سکتی۔ دائرے کے محیط کو، ممکنہ احتیاط کے باوجود، ۳۶۰ بالکل مساوی حصّوں میں ہرگز تقسیم نہیں کیا جا سکتا۔ صحت صرف اس حد تک حاصل ہو سکتی ہے جس کی ہمارے آلات میں

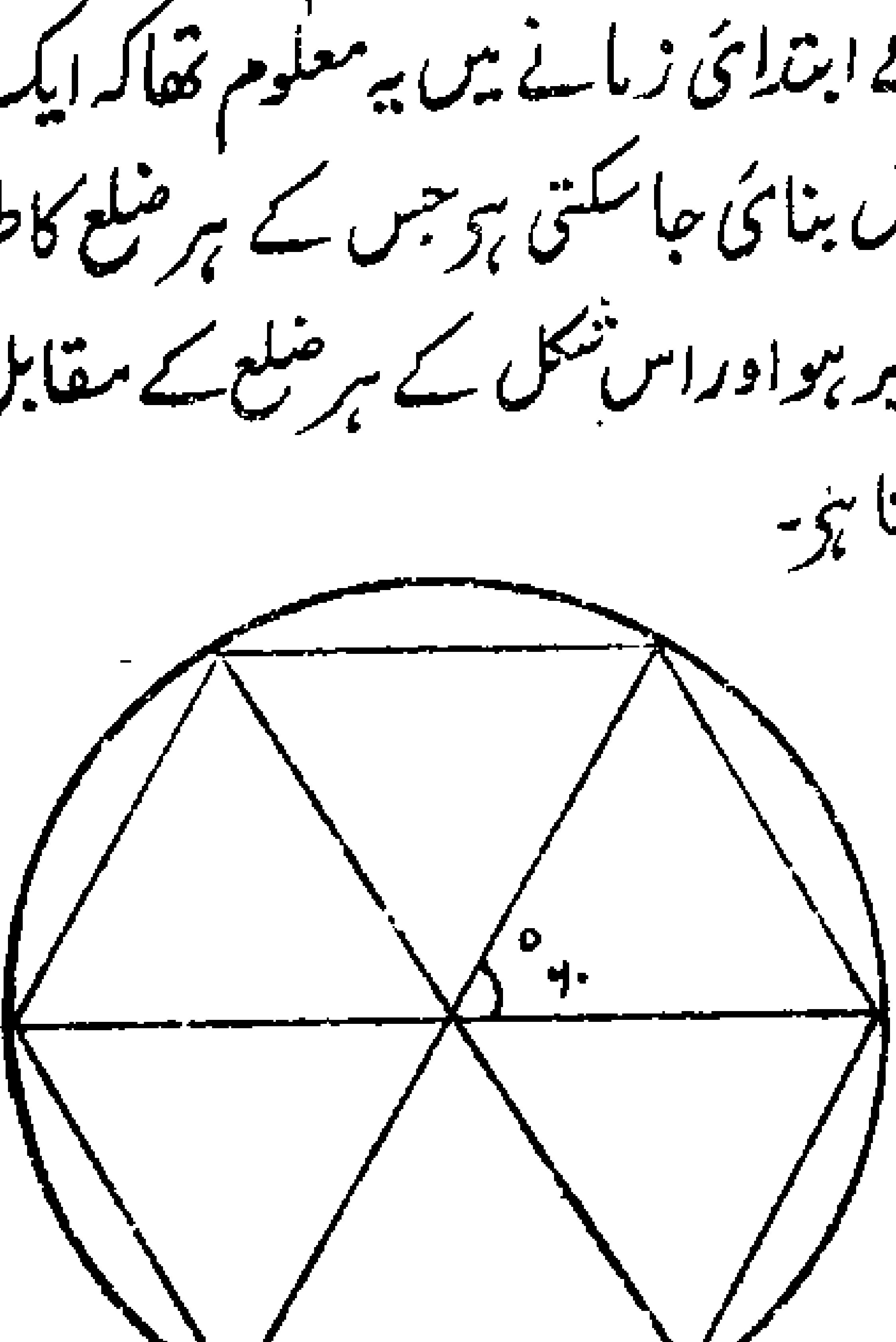
گنجایش ہے۔ نیز سمت کی پیمائش میں ایک اور شکل یہ ہے کہ اکثر اوقات مطلوبہ سمت ہمارے آلہ کے کسی نشان پر پوری طرح منطبق نہیں ہوتی بلکہ دو نشانوں کے درمیان کہیں نہ کہیں ہوتی ہے اور زاویے کا تعین اس نشان کے ذریعے کیا جاتا ہے جس سے یہ سمت قریب تر ہے یعنی ہر صورت میں جب کہ پیمانہ استعمال کیا جائے صِرف تقریبی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔ البتہ آلات کی درجہ بندی میں صحت کے اضافے کے ساتھ ساتھ پیمائش میں خطا بھی کم ہوتی جاتی ہے۔ عددوں کے استعمال کی یہ دقّت اور پیچیدگی نہ صِرف زاویے کی پیمائش میں بلکہ اس باب کے دیگر سوالوں کے جوابوں میں بھی پیش آئے گی۔

۴۔ کسی مقام کا فاصلہ یا کسی خط کا طول کیا ہے؟

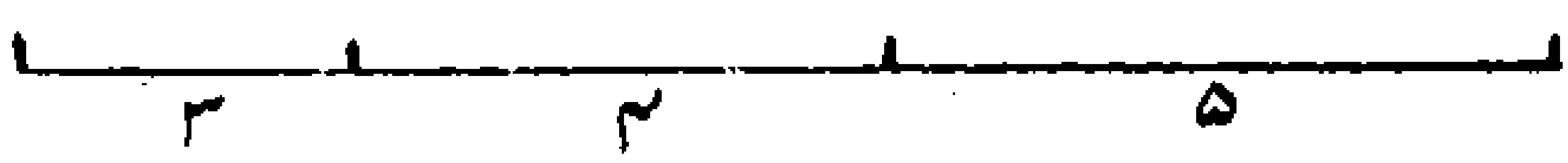
انسان نے اپنی سکونت کے قابل گھر بنانے سے بہت پہلے اپنے آسمانی مہمانوں (یعنی دیوتاؤں) اور ان کے ارضی نمایندوں (یعنی کاہنوں) کے لیے نہایت عالی شان محل (یعنی مندر) بنائے۔ اجرامِ سماوی کے مشاہدے کے لیے رصد گاہوں اور مصر کے فرعونوں کی محفوظ کردہ لاشوں کے لیے عظیم الشان مقبروں کی تعمیر کے لیے فاصلے کی نہایت صحیح پیمائش کی ضرورت تھی۔ جیوپس اور نفیرو نامی ہرموں کی تعمیر ایک ہی ہندسی خاکہ کے مطابق ہوئی ہے اور یہ دونوں ہرم آپس میں متشابہ ہیں۔ ان ہرموں کی تعمیر کی حیرت انگیز صحت کی وجہ یہ ہے کہ انسان کی عمرانی اور سماجی ضرورتیں اُن سے وابستہ تھیں۔ چوں کہ وہ آسمانی مہمانوں کے قیام کے لیے بنائے گئے تھے اس لیے ضروری تھا کہ نہایت صحت کے ساتھ ان کی سمت کا تعیّن کیا جائے۔ سمت کے تعین کے لیے زاویوں کی پیمائش کے آلات ایجاد کیے گئے لیکن کئی صدیوں تک طول کی پیمائش کے لیے نہایت بھونڈے جسمانی ناپ استعمال ہوتے

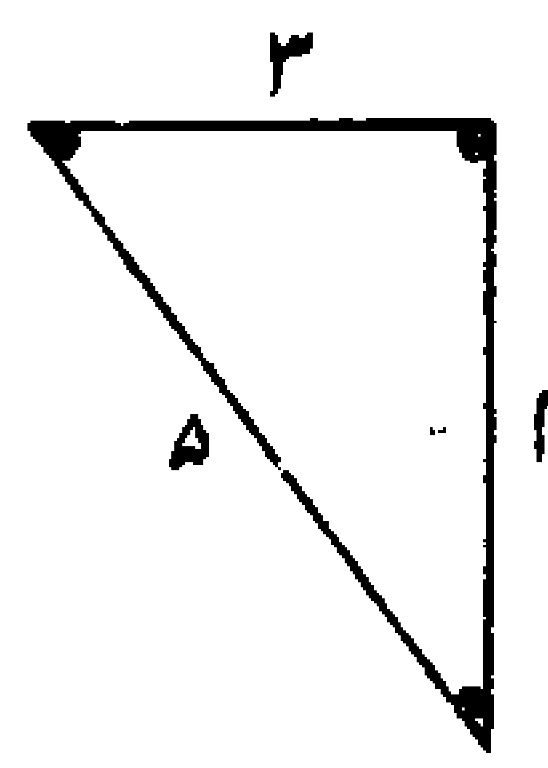
رہے۔ چناں چہ سامیوں کے ہاں طول یا فاصلے کی پیمایش ہاتھوں سے (یعنی کہنی سے بیچ کی انگلی کے سرے تک کے فاصلے سے) ہوتی تھی جیساکہ اب بھی دیہات میں کیا جاتا ہے۔ معمولی اغراض کے لیے طول کی یہ غیرمعیّن اکائی (یعنی ہاتھ) جو مختلف افراد کے لیے مختلف ہوتی ہے کافی تھی لیکن مندروں کی تعمیر کے لیے صحت کے ایک اعلا معیار کی ضرورت تھی۔ اس لیے مندروں کی تعمیر میں سایوں کی مدد سے بلندیاں اور فاصلے معلوم کیے جاتے تھے اور یہ طریقہ خاص طور پر مصر جیسے مقام کے لیے، جہاں دن میں اکثر دھوپ رہتی ہے، آسانی کے ساتھ استعمال کیا سکتا تھا۔ کسی عمارت یا مینار کی بلندی اس کے سایے کے طول اور سورج کے ارتفاع کی مدد سے مثلث کو استعمال کرکے محسوب کی جاتی تھی۔

ریاضی کی ابتدائی تحقیقات اسی قسم کے سوالوں سے تعلق رکھتی ہیں۔ بابلی تہذیب کے ابتدائی زمانے میں یہ معلوم تھا کہ ایک دائرے کے اندر ایسی چھ ضلعی شکل بنائی جا سکتی ہے جس کے ہر ضلع کا طول دائرے کے نصف قطر کے برابر ہو اور اس شکل کے ہر ضلع کے مقابل دائرے کے مرکز پر ۶۰° کا زاویہ بنتا ہے۔



دُنیا کے مختلف حصّوں کے قدیم آثار سے اس بات کا پتا چلتا ہے کہ قائمہ زاویہ بنانے کے لیے یہ ہندسی خاصیت استعمال کی جاتی تھی کہ اُس مثلث میں جس کے ضلعوں کے طول ۳، ۴، ۵ کے متناسب ہوں سب سے بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔ ایک روایت کے مطابق قدیم مصر میں قائمہ زاویہ بنانے کے لیے ایک رسّی پر چار گرہیں اس طرح لگائی جاتی تھیں کہ رسّی کے حصّوں کے طول ۳، ۴ اور ۵ کے متناسب ہوں۔ اب اگر پہلی اور چوتھی گرہ کو ملا کر رسّی کے تینوں حصّوں کو کھونٹیوں کے ذریعے تان کر رکھا جائے تو حاصل ہونے والے مثلث میں سب سے بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔





اس سے معلوم ہوتا ہے کہ تقریباً تین ہزار سال قبل مسیح اہلِ بابل اور اہل مصر قائمۃ الزاویہ مثلث کے ضلعوں کے طولوں کے باہمی رشتے کی ایک خاص صورت سے ضرور واقف تھے۔ قائمۃ الزاویہ مثلث کی مشہور خاصیت یہ ہے کہ اس کے سب سے بڑے ضلع پر کا مربع بقیہ دو ضلعوں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔ اور اس کا عکس بھی درست ہے۔ یعنی اگر کسی مثلث میں سب سے بڑے ضلع پر کا مربع بقیہ دو ضلعوں پر کے مربعوں

کے مجموعے کے برابر ہو تو سب سے بڑے ضلعے کے مقابل کا زاویہ قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔ اسی عام مسئلے کی ایک خاص صورت کی مدد سے یعنی ۳، ۴، ۵ کے متناسب ضلعوں والے مثلث کی مدد سے قدیم مصر میں قائمہ زاویہ بنایا جاتا تھا۔ اسی طرح اگر ایک مثلث کے ضلعوں کے طول ۵، ۱۲، ۱۳ کے متناسب ہوں تو سب سے بڑے ضلعے کے مقابل کا زاویہ قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔

اہلِ مصر اور اہلِ بابل کو اس بات کا بھی علم تھا کہ کسی دائرے کے محیط کے طول کو دائرے کے قطر کے ساتھ ہمیشہ ایک مستقل نسبت ہوتی ہے۔ اس مستقل نسبت کو ہم یونانی حرف π (حیط) سے تعبیر کرتے ہیں۔ اس کی تقریبی قیمت $\frac{22}{7}$ یا ۳٫۱۴۱۶ ہے۔ اہلِ بابل π کی قیمت ۳ لیتے تھے جو زیادہ صحیح نہیں ہے۔ حکیم اہمس کے مخطوطہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ تقریباً ۱۶۰۰ ق۔م میں π کی قیمت ۳٫۱۶ لی جاتی تھی۔

ماسکو کے مخطوطہ میں کرہ کے رقبہ کے لیے جو ضابطہ دیا گیا ہے اس کی مدد سے π کی قیمت ۳٫۱۴ حاصل ہوتی ہے۔ پس معلوم ہوا کہ دائرے کی مساحت کے لیے اہلِ مصر جو ضابطہ استعمال کرتے تھے اس میں ایک فی صدی سے بھی کم خطا تھی۔

چوں کہ °۶۰ کا زاویہ بنانے کا طریقہ نہایت آسان اور قدیم ہے اس لیے ایک دن کے ۲۴ ویں حصے یعنی گھنٹے کو وقت کی اکائی مقرر کرنے کی ایک نہایت، واضح توجیہہ سمجھ میں آتی ہے۔ سایے کی سمت کی مدد سے دن کو ایسے حصوں میں تقسیم کرنے کے لیے جن کی کوئی طبیعی تعین نہیں ہو سکتی یہ ضروری ہے کہ ایسا زاویہ منتخب کیا جائے جو دھوپ گھڑی کی درجہ بندی میں اکائی کے طور پر آسانی کے ساتھ کام آسکے۔ اگر سورج کی ظاہری

حرکت کو ملحوظ رکھا جائے تو معلوم ہوتا ہے کہ سورج محورِ سماوی کے گرد ایک گھنٹے میں ۱۵° میں سے گھومتا ہے اور ۶۰° درجے کے زاویے کو چار مساوی حصّوں میں تقسیم کرنے سے ۱۵° کا زاویہ حاصل ہوتا ہے۔

فنِ تعمیر کی ترقی کے ساتھ ساتھ قائمہ زاویہ کی اہمیت بھی بڑھتی گئی اور مختلف زاویوں کی قیمتیں قائمہ زاویہ کی رقوم میں بیان ہونے لگیں۔ فنِ تعمیر کی تمام کاری گری مندروں تک ہی محدود رہی اور مندروں کے کاہنوں کی تمام علمی اور ذہنی قابلیت صرف اسی کام کے لیے وقف ہوگئی۔ لیکن جوں جوں فنِ تعمیر پیچیدہ اور تعمیر کا سلسلہ وسیع ہوتا گیا اس بات کی ضرورت محسوس ہوئی کہ تقسیمِ عمل کے اصول کے مطابق کاہن اس کام کو اپنے غلاموں کے سپرد کریں اور رفتہ رفتہ اس زمانے کا سب سے بڑا ذہنی شاہ کار (یعنی زاویے کی پیمائش) کاری گر غلاموں کا مخصوص ورثہ بن گیا۔ بدقسمتی سے یہ غلام جو صرف کاری گر تھے لکھنے پڑھنے سے محض ناآشنا تھے۔ اُن کا علم صرف اکتسابی تھا اور یہ کاری گر اپنے شاگردوں کو اپنا علم اور ہُنر صرف سینہ بہ سینہ منتقل کرتے تھے۔ چوں کہ ان کا علم تحریر کے ذریعے محفوظ نہ ہو سکا اور صرف ایک مخصوص جماعت کا ورثہ بنا رہا اس لیے علم کا یہ گراں قدر ذخیرہ بعد کی نسلوں تک نہیں پہنچا اور فنا ہوگیا۔ ان کاری گروں کے حیرت انگیز تعمیری کمالات کا پتا صرف ان کی صناعی کی یادگاروں سے چلتا ہے۔ ان کے تعمیری شاہ کاروں کو دیکھ کر ہمیں ان کی ریاضی دانی کا اعتراف کرنا پڑتا ہے اور یہ بھی ماننا پڑتا ہے کہ اہلِ مصر فنِ تعمیر، مساحت اور علمِ حساب میں بعد کے یونانیوں سے بہت آگے بڑھے ہوئے تھے۔

اوپر کے بیان سے یہ واضح ہوتا ہے کہ طول اور فاصلے کی پیمائش کے لیے کوئی معین اکائی موجود نہ تھی لیکن طولوں، بلندیوں اور فاصلوں کو محسوب کرنے کے لیے زاویے کی پیمائش اور مثلّث کی خاصیتوں سے مدد لی جاتی تھی۔

۵۔ کسی دیے ہوئے خطّۂ ارضی کی وسعت کیا ہے؟

کاشت کار شروع ہی سے زمین دار، حکم ران طبقہ اور کاہنوں کی لوٹ مار کا تختۂ مشق رہا ہے۔ چناں چہ مصر میں بھی دریائے نیل کی وادی میں جہاں انسانی تمدّن نے جنم لیا بڑے بڑے عظیم الشان مندر اور مقبرے تعمیر کرنے کے لیے اور فراعنۂ مصر اور کاہنوں کے خزانوں کو دولت سے معمور کرنے کے لیے غریب کاشت کار پر اس کی زمین کے رقبے کے لحاظ سے مختلف قسم کے محصول لگائے گئے۔ مورّخ ہیرودوس کا بیان ہے کہ چوں کہ دریائے نیل میں اکثر طغیانی آتی تھی اور مختلف لوگوں کی زمینوں اور کھیتوں کے حدود مٹ جاتے تھے اس لیے زمین کے مختلف حصّوں کی حد بندی کے لیے پیمائش کرنے والوں کی ایک جماعت وجود میں آئی۔ ہم یہ نہیں بتا سکتے کہ رقبے کی اکائی کے لیے مربع کا انتخاب کیوں کر کیا گیا۔ اس کے متعلق ایک قیاس یہ ہے کہ ٹوکری سازی کے فن میں (جو پارچہ بافی سے پہلے کی ایجاد ہے) ٹوکری کی مرمّت کے لیے جو طریقہ اختیار کیا جاتا تھا اس کی بنا پر مربعوں کے ذریعے کسی رقبے کو پُر کرنے کی طرف توجّہ کی گئی۔ دوسرا قیاس یہ ہے کہ کمروں کے فرش کے لیے پٹو کے کام میں آنے لگے ان سے اس طرف رہنمائی ہوئی۔ تیسرا قیاس یہ ہے کہ بابل کے مٹّی کے برتنوں پر مربعوں سے جو نقشے بنے ہوئے تھے ان سے لوگوں کو رقبے

کی اکائی کا خیال ہوا۔ قرائن سے اس بات کی تائید ہوتی ہے کہ یونانی علم ہندسہ سے بہت پہلے رقبے کے متعلق ایک اہم نتیجے کا انکشاف چوکوں یا مربع اینٹوں پر ہندسی شکلیں بنانے سے ہوا۔ قدیم چینی طباعت کے ایک نمونے سے جو مربع اینٹ پر بنی ہوئی ہندسی شکل کی نقل ہے، یہ ظاہر ہوتا ہے کہ فیثاغورث سے بہت پہلے چینیوں کو قائمۃ الزاویہ مثلث کی اس اہم خاصیت کا علم تھا جو فیثاغورث سے منسوب کی جاتی ہے۔ بابلی اور مصری ریاضی داں مثلث کا رقبہ اس کے ضلعوں کی رقوم میں معلوم کر سکتے تھے۔ نیز دائرے کا رقبہ بھی نصف قطر کی رقوم میں معلوم کر سکتے تھے۔ اس غرض سے دائرے کو متعدد نصف قطروں کے ذریعے تقریباً مثلثی پٹیوں میں تقسیم کیا جاتا تھا۔ کسی کمرے کے فرش کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے صرف اتنا معلوم کرنا کافی ہے کہ ایک مقررہ ناپ کی کتنی مربع اینٹیں اس فرش کی سطح کو پُر کرنے کے لیے کافی ہوتی ہیں۔ رقبے پر اینٹ کی موٹائی کا کوئی اثر نہیں پڑتا۔ جب ہم کہتے ہیں کہ کسی کمرے کی لمبائی ۴۰ فٹ ہے تو اس سے ہمارا مطلب یہ ہوتا ہے کہ طول کی اکائی یعنی فٹ کو اس کمرے کے طول پر چالیس دفعہ رکھا جا سکتا ہے۔ اسی طرح قدیم زمانے میں کسی کمرے کی لمبائی معلوم کرنے کے لیے یہ دریافت کیا جاتا تھا کہ ایک خاص ناپ کی کتنی اینٹوں کو جوڑ کر کمرے کی لمبائی میں لگایا جا سکتا ہے۔ اگر اینٹ کے طول کو طول کی اکائی مانا جائے تو کمرے کے فرش کو پُر کرنے کے لیے جتنی اینٹیں درکار ہوتی ہیں ان کی تعداد کمرے کے فرش کے رقبے کو تعبیر کرتی ہے۔ کمرے کی لمبائی اور کمرے کے فرش کا رقبہ معلوم کرنے کے علاوہ ہم یہ بھی معلوم کر سکتے ہیں کہ کسی خلا کو پُر کرنے کے لیے کتنی اینٹیں درکار

ہوتی ہیں۔ اگر حجم کی اکائی کے لیے اینٹ کا حجم لیا جائے تو اینٹوں کی اس تعداد سے اس خلا کا حجم تعبیر ہوتا ہے۔ طول، رقبہ اور حجم کی اکائیاں ایک دوسرے سے مربوط ہیں۔ اگر اکائی طول والے خط پر ایک مربع بنایا جائے تو اس کا رقبہ اکائی رقبہ ہوگا اور اگر ایک مکعب کا ہر کنارہ اکائی طول کے مساوی ہو تو مکعب کا حجم اکائی حجم ہوگا۔ اس لیے کسی طول یا رقبے یا حجم کا اندازہ کرنے کے لیے سب سے پہلے طول کی اکائی کا مقرر کرنا ضروری ہے۔ نیز دو طولوں یا رقبوں یا حجموں کے مقابلے کے لیے انھیں ایک ہی اکائی کے رقوم میں محسوب کرنا ضروری ہے۔ مثلاً اگر ایک خط کی لمبائی تین انچ ہو اور دوسرے خط کی لمبائی پانچ فٹ تو ان دو خطوں کے طولوں کے مقابلے کے لیے دونوں کے طولوں کو انچوں یا فٹوں میں بیان کرنا ضروری ہے۔ چناں چہ اوپر کی مثال میں پہلے خط کا طول تین انچ ہے اور دوسرے کا ساٹھ انچ۔ اس لیے ان خطوں کے طولوں کی نسبت ۳ : ۶۰ ہے۔ اسی طرح ایک مربعے کے ضلعے کا طول چار انچ ہو اور دوسرے مربعے کے ضلعے کا طول دو فٹ تو پہلے مربعے کا رقبہ ۱۶ مربع انچ ہوگا اور دوسرے کا رقبہ (۲ × ۱۲) (۲ × ۱۲)[۱] یعنی ۵۷۶ مربع انچ ہوگا۔ اس لیے ان دونوں مربعوں کے رقبوں کی نسبت ۱۶ : ۵۷۶ ہوگی۔ اس بیان سے اکائی کی یکسانیت کی ضرورت واضح ہوتی ہے۔

۶ - کسی دیے ہوئے جسم کا حجم کیا ہے؟

جب تجارت کا دار و مدار مبادلہ یعنی ایک جنس کو دوسری جنس کے

[۱] یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ اگر ایک مربعے کے ضلعے کا طول چار انچ ہو تو اس کا رقبہ (۴ × ۴) مربع انچ ہوتا ہے۔ اسی طرح اگر مربعے کے ضلعے کا طول ن اکائی طول ہو تو مربعے کے رقبے میں (ن × ن) مربع اکائی ہوتے ہیں۔

ساتھ بدلنے یا بیچنے پر تھا تو شہد، گھی، تیل وغیرہ خاص خاص برتنوں سے ناپے جاتے تھے۔ جیسا کہ آج کل بھی دیہاتوں میں ہوتا ہے۔ اور رواجِ عام سب کو اس بات کی پابندی پر مجبور کرتا تھا کہ برتنوں کی وضع اور ناپ تقریباً برابر رکھے جائیں۔ مثلاً گھی ناپنے کے تمام برتن ایک ہی وضع اور ناپ کے ہوں۔ ناپ کا یہ طریقہ نہ صرف ہمارے دیہاتوں میں بلکہ انگلستان جیسے ترقی یافتہ ملک میں بھی شراب ناپنے کے لیے اب تک رائج ہے، حالاں کہ حجم کی اکائی مثلاً مکعب فٹ کے استعمال سے زیادہ سہولت ہو سکتی ہے۔ قدیم زمانے میں جیسے جیسے سُمیری تاجر اپنی تجارت میں ترقی کرتے گئے انھیں مختلف برتنوں کے حجموں کا مقابلہ کرنے کے لیے (جو مختلف مقاموں پر استعمال ہوتے تھے) حجم کی ایک معین اکائی کی ضرورت محسوس ہوئی اور انھوں نے حجم کو ایک معین مکعب کی مدد سے ناپنے کا طریقہ اختیار کیا۔ شاید سب سے پہلے اس طریقے کی طرف سُمیریوں کی توجہ اس وجہ سے ہوئی کہ وہ اینٹوں سے دیواریں بناتے تھے اور اینٹوں کی تعداد کی مدد سے دیوار کا حجم معلوم کرتے تھے۔

۷۔ کسی دی ہوئی چیز میں کتنا مادہ ہے یعنی کسی دی ہوئی چیز کی کمیّت کیا ہے؟

موجودہ زمانے میں بھی ہم ایسی ٹھوس چیزوں کو جو کسی برتن میں اچھی طرح بھری جا سکتی ہیں حجم کے پیمانوں کی مدد سے ناپتے ہیں مثلاً دیہاتوں میں چاول ایک برتن کی مدد سے جو استوانے کی شکل کا ہوتا ہے ناپے جاتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ لوہا یا قلعی جیسی چیزوں کی مقدار کا اندازہ لگانے کے لیے یہ طریقہ کارآمد نہیں ہو سکتا۔ چوں کہ فنیقی سوداگر پہلے پہل قلعی

خریدنے کے لیے انگلستان آئے اس لیے انھوں نے قلعی کی مقدار کا اندازہ لگانے کے لیے اس کی کمیّت معلوم کرنے کا طریقہ اختیار کیا۔ قدیم زمانے میں تجارتی قوموں کو بہت جلد اس معاشی ضرورت کا احساس ہوا کہ ناپ اور تول میں غلط پیمانے استعمال کرنا نہایت درجے قابلِ ملامت کام ہے۔ اس لیے عراق اور ایشیائے کوچک کی تہذیبیں ناپ اور تول کے پیمانوں کی ایجاد اور ان کی تنظیم میں مصر سے بہت آگے بڑھ گئیں۔ تجارتی ضرورتوں کے لیے اس سلسلے میں علمِ حساب میں بھی نمایاں ترقی ہوئی۔

سمت کی پیمائش کے بارے میں (اس باب کے ابتدائی حصّے میں) جو کچھ لکھا جاچکا ہے اس کا اطلاق بہ حیثیتِ مجموعی طول، رقبہ، حجم اور کمیّت کی پیمائش پر بھی ہو سکتا ہے۔ کسی جسم کی کمیّت کا اندازہ لگانے کے لیے ہم اس جسم کو ترازو کے ایک پلڑے میں رکھتے ہیں اور اکائی کمیّت کے متعدد باٹ دوسرے پلڑے میں رکھتے ہیں تاکہ دونوں پلڑے متوازن ہوں یعنی ترازو کی ڈنڈی افقی ہو۔ دوسرے پلڑے میں اکائی کمیّت کے باٹوں کی تعداد سے دیے ہوئے جسم کی کمیّت تعبیر ہوتی ہے۔ یہ غور سے دیکھا جائے کہ عددوں کے اس استعمال میں اور کسی گلّے میں بھیڑوں کی تعداد معلوم کرنے میں بہت بڑا فرق ہے۔ کیوں کہ ایک معمولی ترازو میں دو جسموں کی کمیتیں بہ ظاہر مساوی معلوم ہو سکتی ہیں لیکن زیادہ حسّاس ترازو کے استعمال سے ان جسموں کی کمیتوں کا خفیف سا فرق بھی ظاہر ہوتا ہے۔ ہم خواہ کسی قسم کے آلات یا کسی قسم کی اکائیاں استعمال کریں صرف صحیح عددوں کی مدد سے کسی چیز کے وزن یا حجم یا کسی سطح کا رقبہ یا کسی خط کے طول یا کسی زاویے کی مقدار کامل صحت کے ساتھ تعبیر نہیں ہو سکتی۔ اگر ہم اس امر کو پیشِ نظر رکھیں

کہ صحیح عدد ایک گروہ کے افراد کی تعداد کو ظاہر کرنے کے لیے وضع کیے گئے تھے تو ہمیں ان مشکلوں کو حل کرتے ہیں آسانی ہوگی جو قدیم زمانے کے ریاضی دانوں کو پیمائش کے نتیجوں کو صحیح عددوں کے ذریعے تعبیر کرنے میں پیش آئیں۔ چوں کہ پیمائش کے نتیجے کسی صورت میں بھی بالکل صحیح نہیں ہو سکتے، اس لیے عددوں کے اس نئے استعمال کے متعلق ہم آئندہ باب میں چند اہم اور اصولی باتوں پر کسی قدر تفصیل کے ساتھ بحث کریں گے۔

تیسرا باب

جسامت، ترتیب اور گنتی کے قاعدے

یا

اعداد کی زبان کا ترجمہ اور اس حسابی زبان کے قواعد

ریاضی کے متعلق یہ کہنا کہ ریاضی عددوں کی زبان ہے اور ریاضی کے قاعدے صَرف ونحو کے قاعدوں کے مماثل ہیں محض استعارہ نہیں ہے۔ ریاضی کے سمجھنے میں ہمیں بہت آسانی ہوگی اگر ہم معمولی بول چال کی زبان اور عددوں کی زبان کی مشابہت کو اچھی طرح ذہن نشین کر لیں۔ معمولی بول چال کی زبان میں ہم اشیا کی مختلف قسموں کو ظاہر کرتے ہیں اور عددوں کی زبان (یعنی ریاضی) میں ہم اشیا کی جسامت، ترتیب اور گنتی کو ظاہر کرتے ہیں۔ ریاضی کی ہر شاخ میں معمولی زبان اور عددوں کی زبان کی مشابہت نمایاں ہوتی ہے۔

سب سے پہلے انسان نے اپنی بول چال کو تصویروں کے ذریعے تحریر میں لانا شروع کیا تاکہ وہ مختلف موسمی واقعات کی یادداشت کا کام دے سکیں۔ رفتہ رفتہ ان تصویروں نے بالکل مختلف حیثیت اختیار کر لی اور ہر محسوس شے یا واقعہ کے لیے ایک مخصوص تصویر مقرر ہو گئی۔

چینی، مصری اور بابلی تحریر کے طریقے اسی طرح وجود میں آئے۔ بہ تدریج تحریر کی تصویری نوعیت زائل ہونے لگی اور وہ علامتوں (یعنی رموز) کا مجموعہ بن گئی اور رفتہ رفتہ اس نے حروفِ تہجی کی صورت اختیار کرلی۔ اس طرح سے تحریر کے دو مختلف طریقے وجود میں آئے (۱) تصویری طریقہ اور (۲) رمزی یا حروفِ تہجی کا طریقہ۔ تحریر کے ان دو طریقوں کے جواب میں ریاضی میں بھی دو طریقے پائے جاتے ہیں۔ ریاضی کی ابتدا بھی تصویری تحریر سے ہوئی۔ ریاضی کی اس تصویری تحریر کو ہم علم ہندسہ کہتے ہیں۔ علم ہندسہ کے ارتقا میں اور تصویری تحریر (مثلاً چینی تحریر) کے ارتقا میں بہت مشابہت پائی جاتی ہے۔ ابتدا میں مجسموں اور سطحوں کو تعبیر کرنے کے لیے ہندسی شکلیں استعمال کی گئیں۔ نیز حسابی سوالوں کے حل کے لیے بھی ہندسی شکلوں سے مدد لی گئی۔ اس کے کئی صدی بعد عددوں پر بحث کرنے کے لیے اور حسابی سوالوں کو حل کرنے کے لیے صرف ہندسی شکلوں سے مدد لینے کی بجائے حروفِ تہجی کا استعمال شروع ہوا۔ اس سلسلے میں بول چال کی زبان کے لغات کی طرح ریاضی کی جدولیں مرتب کی گئیں۔ جس طرح لغت کی مدد سے کسی لفظ کے معنی معلوم کیے جا سکتے ہیں اسی طرح ان ریاضیاتی لغات یعنی جدولوں کی مدد سے ریاضی کی کسی علامت سے تعبیر ہونے والی مقدار کی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے۔ مثلاً جیبوں (SINES) کی جدول کی مدد سے جب ۱۵° کے جواب میں عدد ۰.۲۵۸۸ حاصل ہوتا ہے۔ البتہ جس طرح معمولی لغت میں کسی لفظ کے معنی دیکھنے سے اس لفظ کا استعمال اچھی طرح معلوم نہیں ہوتا اسی طرح جیبوں کی جدول کی مدد سے کسی زاویے کی جیب کی قیمت حاصل کی جائے تو مزید معلومات کیے بغیر یہ

واضح نہیں ہوتا کہ یہ جدولیں جہاز رانی کے حسابوں میں کس طرح کام آتی ہیں۔

جس طرح تصویری تحریر کے طریقے سے ابجدی رسم الخط ایجاد ہوا، اسی طرح علم ہندسہ اور ہندسی شکلوں کی مدد سے ریاضیات کے حل کی مختلف شاخیں ایجاد ہوئیں۔ نیز جس طرح معمولی تحریر میں کسی خیال کو زیادہ واضح کرنے کے لیے مزاحیہ تصویریں استعمال کی جاتی ہیں اسی طرح ریاضیاتی تحلیل میں بھی اکثر ہندسی شکلوں سے مدد لی جاتی ہے۔ دُنیا کی مختلف زبانوں کی مختلف خصوصیتیں ہیں۔ مثلاً فرانسیسی زبان متین ہجو کے لیے بہت ہی موزوں ہے، اور انگریزی زبان علمی اصولوں کو واضح اور مختصر طور پر بیان کرنے کی خاص صلاحیت رکھتی ہے۔ اسی طرح ریاضیاتی تحلیل کی مختلف شاخیں مثلاً سغاری احصا، سمتی احصا، وغیرہ مختلف حسابی ضرورتوں کو پورا کرتی ہیں۔

معمولی زبان کے قواعد صرف و نحو اور عددوں کی زبان کے قاعدوں کی مماثلت ایک اور طریقے سے بھی واضح کی جاسکتی ہے۔ معمولی زبان کے ہر جملے میں ایک اسم اور ایک فعل ہوتا ہے۔ اسم وہ ہے جس کے متعلق جملے میں خبر دی جاتی ہے اور فعل وہ ہے جو اسم کے متعلق خبر دیتا ہے۔ اسی طرح عددوں کی زبان میں بھی اسم اور فعل ہوتے ہیں۔ اِس مطلب کو واضح کرنے کے لیے ذیل میں کسی قدر تفصیل کے ساتھ بحث کی جائے گی۔

اسم۔ ریاضی کے قاعدوں میں عددوں سے وہی کام لیا جاتا ہے جو معمولی زبان میں اسم سے لیا جاتا ہے۔ جس طرح زبان کے قواعد میں اسم کو مختلف قسموں (یعنی اسم معرفہ، اسم نکرہ، اسم جنس وغیرہ) میں تقسیم کیا جاتا ہے اسی طرح عددوں کی زبان میں بھی اسم کی مختلف قسمیں ہوتی ہیں۔ بنی نوع انسان نے ہزارہا سال کی محنت اور تحقیق کے بعد عددوں کی

مختلف قسموں میں تمیز کرنا سیکھا۔ ریاضی کے قاعدے سمجھنے میں جو شکلیں پیش آتی ہیں ان کی ایک اہم وجہ یہ ہے کہ عددوں کی مختلف قسموں اور ان کے استعمال میں بالعموم امتیاز نہیں کیا جاتا۔

جب تک انسان وقت کا اندازہ دنوں میں اور پانی کی مقدار کا اندازہ ڈولوں کی تعداد سے کرتا رہا اس کو اس بات کا احساس تک نہ ہُوا کہ وہ ایک ہی لفظ کو دو بالکل مختلف ضرورتوں کے لیے استعمال کر رہا ہے۔ عددوں کے استعمال کے اِن دو طریقوں میں تمیز کرنے کے لیے یہ کہا جا سکتا ہے کہ پہلے طریقے میں گنتی کی جاتی ہے اور دوسرے طریقے میں پیمایش کی جاتی ہے۔ گنتی کے لیے جو عدد استعمال ہوتے ہیں وہ معرفہ عدد ہوتے ہیں اور پیمایش کے لیے جو عدد استعمال ہوتے ہیں وہ نکرہ عدد ہیں۔ ہم رُپے، آم، دن، کسی شہر کی آبادی وغیرہ گنتے ہیں اور اس گنتی کو تعبیر کرنے کے لیے جو عدد استعمال کیے جاتے ہیں وہ اسم معرفہ کہلائے جا سکتے ہیں کیوں کہ اس عدد سے کسی جماعت میں افراد کی تعداد ٹھیک ٹھیک طور پر ظاہر ہوتی ہے جس طرح کہ اسم معرفہ سے ایک شخص ٹھیک ٹھیک معلوم ہوتا ہے۔ جب ہم کہتے ہیں کہ ایک کمرے میں ۲۵ آدمی ہیں تو اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ کمرے میں ٹھیک ۲۵ آدمی ہیں نہ کہ ۲۴٫۹ یا ۲۵٫۱ آدمی۔ لیکن اس کے برخلاف اگر ہم کہیں کہ اس کمرے کی چھت کی بلندی ۱۵ فٹ ۳ انچ ہے اور یہ پیمائش ایک ایسے پیمانے کی مدد سے جس میں چھوٹے سے چھوٹا نشان انچ کا ہے کی گئی ہو تو صرف یہ کہا جا سکتا ہے کہ کمرے کی چھت کی بلندی ۱۵ فٹ ۲٫۵ انچ اور ۱۵ فٹ ۳٫۵ انچ کے درمیان ہے۔ یعنی کسی پیمایش کا نتیجہ ٹھیک ٹھیک طور پر نہیں بتایا جا سکتا۔ اس

لیے پیمایش کی بنا پر صرف یہ معلوم ہوتا ہے کہ کمرے کی بلندی ان تمام طولوں میں سے جو ۱۵ فٹ ۵ء۲ انچ اور ۱۵ فٹ ۵ء۳ انچ کے درمیان ہیں کوئی ایک ہو سکتی ہے۔ اسم نکرہ کا استعمال بھی اسی کے مماثل ہوتا ہے۔ کیوں کہ اگر ہم کہیں کہ زید نے ایک فقیر کو روٹی دی تو فقیر اسم نکرہ ہے اور اس سے صرف یہ ظاہر ہوتا ہے کہ فقیروں کی جماعت میں سے کسی ایک فرد کو زید نے روٹی دی۔ اوپر کی تشریح سے یہ واضح کرنا مطلوب ہے کہ جب ہم کسی کمرے کا طول بیان کرتے ہیں تو اس کے لیے ایک معین عدد نہیں دیا جا سکتا بلکہ عددوں کی ایک جماعت دی جا سکتی ہے جس کے کسی دو عددوں کا فرق ایک معین مقدار سے زیادہ نہیں ہوتا۔ مثلاً اوپر کی مثال میں ۱۵ فٹ ۵ء۲ انچ اور ۱۵ فٹ ۵ء۳ انچ کے درمیان کے کسی طول سے کمرے کی بلندی کو تعبیر کیا جائے تو بلندی کی کسی دو قیمتوں کا فرق ایک انچ سے زیادہ نہیں ہوگا۔ اسی مطلب کو اس طرح بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ کمرے کی بلندی ($۱۸۳ \pm \frac{۱}{۲}$) انچ ہے۔ اگر ہم کمرے کی بلندی کو تعبیر کرنے والے عددوں کی جماعت کے کسی دو عددوں کا فرق اور بھی گھٹانا چاہیں تو ایسا پیمانہ استعمال کرنا ہوگا جس میں انچ سے بھی چھوٹے درجے مثلاً $\frac{۱}{۱۰}$ انچ کے درجے بنے ہوئے ہوں۔ اگر ایسے پیمانے کی مدد سے معلوم کیا جائے کہ چھت کی بلندی ۱۸۳ء۲ انچ ہے تو اس سے مراد یہ ہوتی ہے کہ بلندی ($۱۸۳٫۲ \pm \frac{۱}{۲۰}$) انچ ہے۔ اسی طرح پیمانے کی درجہ بندی میں اور چھوٹے حصے لے کر پیمایش کی خطا کو اور بھی گھٹایا جا سکتا ہے۔ لیکن یہ اچھی طرح سمجھ لینا چاہیے کہ پیمانے کی درجہ بندی ایک خاص درجہ صحت سے آگے بڑھائی نہیں جا سکتی

کیوں کہ ہمارے حواس خمسہ کی قوت محدود ہی۔

عددوں کی مذکورہ بالا دو قسموں میں تمیز نہ کرنے کی وجہ سے نظری ریاضی داں اور عملی ضرورتوں کے لیے ریاضی کو استعمال کرنے والوں کے درمیان بہت سی غلط فہمیاں پیدا ہو گئی ہیں۔ چوتھے اور پانچویں باب میں ہم یہ بتائیں گے کہ گنتی اور پیمائش میں امتیاز نہ کرنے کی وجہ سے ریاضی میں پہلا انقلاب کس طرح پیدا ہوا۔ ابتدائی دور میں انسان کو پیمائش کے نتیجوں کو صحیح عددوں کے ذریعے تعبیر کرنے میں جو شکلیں پیش آئیں انھیں دور کرنے کے لیے یہ ضروری تھا کہ مناسب نئے عدد ایجاد کیے جاتے۔ لیکن انسان نے ایسا کرنے کی بجائے پیمانے کے چھوٹے حصوں کو نئی اکائی کے طور پر اختیار کیا۔ مثلاً ایک عرصے تک ایک درجے کے زاویے کے $\frac{1}{60}$ حصّہ یعنی منٹ کو درجے کی کسر تصور کرنے کی بہ جائے ایک نئی اکائی کے طور پر استعمال کیا گیا۔ اس عمل سے کسر کے صحیح تصوّر کی تشکیل ناممکن ہو گئی۔

کسی جماعت میں افراد کی تعداد کو یا کسی چیز کی پیمائش کو ظاہر کرنے کے تین طریقے ہیں: پہلا اور سب سے ناقص طریقہ یہ ہی کہ اس مقدار کی صرف ایک حد بنائی جائے۔ اسی طرح یہ بیان کیا جا سکتا ہی کہ دہلی سے سورج کا فاصلہ (س) بڑا ہی دہلی سے لندن کے فاصلہ (ف) کے ۱۰۰۰ گنے سے یعنی س > ۱۰۰۰ ف۔ اس طرح کے بھدّے بیان پیمائش کے ابتدائی دور میں واقع ہوتے ہیں۔ زیادہ صحیح اور تشفی بخش پیمائش کے لیے یہ ضروری ہی کہ نچلی اور بالائی حدیں دی جائیں۔ مثلاً اگر لندن کی آبادی ۱۱ ملین ہو اور لیور پول کی ایک ملین اور ماسکو کی

آبادی لندن اور لیورپول کی آبادی کے درمیان ہو تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ اسکو کی آبادی (۶ ± ۵) ملین ہے۔ یہ پیمائش کو ظاہر کرنے کا دوسرا اور پہلے کے مقابل بہتر طریقہ ہے۔ گنتی یا پیمائش میں زیادہ صحت اسی وقت ہوگی جب کہ نچلی اور بالائی حدوں میں فرق کافی کم ہو۔

جب ہم دو جماعتوں کا مقابلہ کرتے ہیں تو کبھی کبھی ہم ایک تیسری قسم کا بیان بھی دے سکتے ہیں۔ مثلاً اگر ایک شخص کے پاس (ن) مرغیاں ہوں اور ہر مرغی فی ہفتہ چار انڈے دے تو فی ہفتہ مرغیوں کے انڈوں کی تعداد (ع) مرغیوں کی تعداد کی چار گنی ہوگی۔ یعنی ریاضی کی زبان میں ہم لکھ سکتے ہیں، ع = ۴ن۔ اس بیان کے متعلق یہ جاننا ضروری ہے کہ یہ بیان صرف اس صورت میں صحیح ہوتا ہے جب کہ وہ علاحدہ علاحدہ افراد کی جماعت کے متعلق دیا جائے۔ اس قسم کا بیان دو ہندسی شکلوں کے متعلق پوری صحت کے ساتھ نہیں دیا جا سکتا کیوں کہ دو ہندسی مقداروں (مثلاً دو خطوں کے طولوں) کا ٹھیک ٹھیک طور پر مقابلہ ناممکن ہے۔ جب ہم کہتے ہیں کہ ایک خط کا طول دوسرے خط کے طول کے برابر ہے تو اس سے ہمارا مدعا یہ ہوتا ہے کہ ایک خط کا طول دوسرے خط کے طول کے ۱۰۰۱ر۱ گنے سے کم اور ۹۹۹ر۰ گنے سے بڑا ہے۔

بیسویں صدی کی ایک بہت بڑی تمدنی سہولت یہ ہے کہ ہمیں معین اور غیر معین کسروں کا علم حاصل ہے۔ مثلاً کسر $\frac{1}{2}$ بالکل معین ہے اور اس کے ذریعے دو جماعتوں کے رکنوں کی تعداد کا مقابلہ صحت کے ساتھ کیا جا سکتا ہے۔ جب کہ ان جماعتوں میں ترتیب وار (۲۰۰) اور (۴۰۰) رکن ہوں۔ لیکن اگر پیمائش کے ذریعے یہ معلوم کیا جائے کہ دو خطوں کے

طوُل ترتیب وار ۱۰ فٹ اور ۱۵ فٹ ہیں تو پوری صحت کے ساتھ یہ نہیں کہا جا سکتا ہو کہ ان خطوں کے طولوں کی نسبت $\frac{2}{3}$ ہو کیوں کہ خطوں کی پیمایش میں ہمیشہ چھوٹی خطا کا امکان ہوتا ہو یعنی تمام پیمایش صرف ایک خاص درجہ صحت تک ممکن ہو۔ ہم متوالی اعشاریہ ۶ ۶ ر۰ کے ذریعے اس کی توضیح کر سکتے ہیں۔ ۶ ۶ ر۰ سے مراد ایک ایسی مقدار ہو جو $\frac{6}{10}$ سے بڑی اور $\frac{7}{10}$ سے چھوٹی ہو؛ جو $\frac{66}{100}$ سے بڑی اور $\frac{67}{100}$ سے چھوٹی؛ جو $\frac{666}{1000}$ سے بڑی اور $\frac{667}{1000}$ سے چھوٹی ہو اور اسی طرح اُن دو حدوں کا فرق جن کے درمیان یہ مقدار واقع ہو جتنا چاہیں کم کیا جا سکتا ہو اس سے واضح ہوتا ہو متوالی کسر اعشاریہ ۶ ۶ ر۰ ایک غیر معین کسر ہو۔ صرف ایک سو سال سے کسور اعشاریہ روزمرہ پیمائشوں میں استعمال ہو رہے ہیں۔ ہمیں فرانس کی قومی مجلس کا ممنون ہونا چاہیے جس نے اس اہم ایجاد کو رواج دے کر اس کو سب کا ورثہ بنا دیا۔

متوالی کسور اعشاریہ ۶ ۶ ر۰ میں واقع ہونے والے ہندسے کبھی ختم نہیں ہوتے۔ اسی قسم کی اور بہت سی ایسی غیر معین کسریں دی جا سکتی ہیں۔ اگر غیر معین کسر اعشاریہ میں ہندسے کسی خاص ترتیب یا قانون کے لحاظ سے واقع ہوں تو اس کسر کی قیمت کسی مطلوبہ درجہ صحت تک آسانی سے لکھی جا سکتی ہو ایسے تمام عدد نکرہ عدد کہلائیں گے لیکن اگر غیر معین کسریں ہندسے کسی قاعدے کے مطابق واقع نہ ہوں تو ہمیں ایسے عددوں کو ایک نیا نام دینا پڑتا ہو۔ ایسے عددوں کو اسم ضمیر کے مماثل تصور کیا جا سکتا ہو۔ ایسا ایک مشہور عدد π (حیط) ہو۔ عدد π[1] سے

---

[1] π عبرانی زبان کا ایک حرف ہو۔

کسی دائرے کے محیط اور اس کے قطر کی مستقل نسبت تعبیر کی جاتی ہے۔ π کی ٹھیک ٹھیک قیمت نہیں دی جا سکتی۔ دراصل π سے عددوں کا ایک گروہ تعبیر ہوتا ہے جس کے کسی دو رکنوں کا فرق کافی چھوٹا ہے۔ π کی تقریبی قیمت ۳٫۱۴ لینے سے ایک فی صد سے کم خطا ہوتی ہے؛ اگر π کی قیمت ۳٫۱۴۱۶ لی جائے تو $\frac{1}{100}$ فی صد سے بھی کم خطا ہوتی ہے؛ یہ یاد رہے کہ π کی قیمت کا درجہ صحت اس بات پر منحصر ہوتا ہے کہ اس قیمت کو کس غرض کے لیے استعمال کیا جا رہا ہے۔ چناں چہ کسی گاڑی کے پہیئے کا محیط معلوم کرنے کے لیے اتنی صحت ضروری نہیں ہے جتنی کہ ایک انجن کے اسنوانے کے سرے کے محیط میں ضروری ہے۔

ریاضی میں حروف تہجی ایک اور طریقے سے بھی استعمال کیے جاتے ہیں۔ کسی زبان کے قواعد میں اسم نکرہ، اسم معرفہ اور اسم ضمیر کے علاوہ اسم کی اور قسمیں بھی دی جاتی ہیں جن میں سے اسم مجرد اور اسم جنس قابلِ ذکر ہیں۔ چوں کہ ریاضی کا تعلّق زیادہ تر استقرا اور عمل سے ہے، اس لیے اس میں اسم مجرد اور اسم جنس میں امتیاز کرنے کی ضرورت پیدا نہیں ہوتی۔ جو حروف تہجّی عددوں کی ایک خاص جماعت یا ایک خاص جنس کے تمام رکنوں کی ایک مشترک خاصیت کو ظاہر کرتے ہیں وہ ریاضی کے اسم جنس کہلا سکتے ہیں اور ان کے اختیار کرنے سے لکھنے اور بولنے میں اختصار حاصل ہوتا ہے۔ ذیل کی مثالوں سے اوپر کے بیان کی توضیح ہوتی ہے۔

(۱) کسی مستطیل کے رقبے میں اکائیوں کی مقدار معلوم کرنے کے لیے مستطیل کے طول اور عرض میں اکائیوں کی تعداد کو ضرب دیا جاتا

ہے۔ اس قاعدے کو مختصر طور پر اس طرح لکھا جا سکتا ہے:۔

مستطیل کا رقبہ = طول × عرض

اب اگر رقبے کو ق سے طول کو ط سے اور عرض کو ع سے تعبیر کیا جائے تو

ق = ط × ع

اوپر کے قاعدے کی رو سے مختلف مستطیلوں کے رقبے معلوم کیے جا سکتے ہیں جب کہ طول اور عرض معلوم ہوں۔ اس ضابطے میں ط سے کسی مستطیل کا طول، ع سے اس مستطیل کا عرض اور ق سے اس کا رقبہ تعبیر ہوتا ہے۔ اس لحاظ سے یہ حروف ط، ع، ق اسم جنس کے قائم مقام ہوتے ہیں۔ حروف تہجی کے اس طرح کے استعمال کا ایک بڑا فائدہ یہ ہے کہ ان کی مدد سے کسی قاعدے یا کلیے کو نہایت اختصار کے ساتھ بیان کیا جا سکتا ہے۔

(۲) فرض کرو کہ کرسیوں کو اس طرح ترتیب دیا گیا ہے کہ پہلی صف میں ایک کرسی ہے، دوسری میں دو، تیسری میں ۳، چوتھی میں چار، وغیرہ۔ تب پہلی بارہ صفوں میں کرسیوں کی تعداد ہوگی ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۲

فرض کرو کہ کرسیوں کی مجموعی تعداد م ہے۔

تب م = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۲

نیز م = ۱۲ + ۱۱ + ۱۰ + ۹ + ۸ + ۷ + ۶ + ۵ + ۴ + ۳ + ۲ + ۱

پس ۲م = (۱+۱۲) + (۲+۱۱) + (۳+۱۰) + (۴+۹) + (۵+۸) +

+ (۶+۷) + (۷ ۶) + (۸+۵) + (۹+۴)

+ (۱۰+۳) + (۱۱+۲) + (۱۲+۱)

$$۱۲ \times ۱۳ =$$

اس لیے کرسیوں کی مقدار م $= \frac{۱۲ \times ۱۳}{۲} = ۷۸$

اسی طرح کئی مثالیں لے کر یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ اُوپر کے طریقے سے ترتیب دی ہوئی ن صفوں میں کرسیوں کی تعداد م $= \frac{ن(ن+۱)}{۲}$

اُوپر کے ضابطے میں پہلے ن طبعی عددوں کا مجموعہ معلوم کرنے کا قاعدہ حروف تہجی کی مدد سے نہایت اختصار کے ساتھ بیان کیا گیا ہے۔

فعل ۔ جب ہم عددوں کو حروف تہجی سے تعبیر کرتے ہیں تو ایک ضابطہ کے مختلف حرفوں کو مختلف علامتوں کے ذریعے، جو ریاضی کے اعمال کو تعبیر کرتی ہیں، مربوط کرتے ہیں۔ مثلاً اُوپر کا ضابطہ (۱) ہے

$$ق = ط \times ع$$

اس میں علامت × سے مراد یہ ہے کہ اس کی دونوں جانب جو عدد واقع ہیں انھیں باہم ضرب دیا جائے۔ نیز علامت = سے مراد یہ ہے کہ ق کی قیمت وہی ہے جو ط × ع کی ہے۔ اس لحاظ سے ریاضی کی علامتوں × اور = سے ریاضیاتی عمل تعبیر ہوتے ہیں۔ اکثر ط × ع کی بجائے صرف ط ع لکھا جاتا ہے۔ یہ واضح رہے کہ ۵ × ۳ کی بجائے ۳۵ نہیں لکھا جا سکتا کیوں کہ ۳۵ سے عدد پینتیس ظاہر ہوتا ہے نہ کہ پندرہ۔ نیز ن (ن + ۱) سے یہ مراد ہے کہ ن اور ن + ۱ کا حاصل ضرب لیا جائے۔ اسی طرح جمع کے لیے علامت +، تفریق کے لیے علامت − اور تقسیم کے لیے علامت ÷ استعمال کی جاتی ہے۔ اس اصول کے سمجھنے کے بعد کسی ریاضیاتی جملے کا ترجمہ معمولی بول چال میں آسانی سے کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً ق = ط ع کا ترجمہ معمولی بول چال میں یہ ہوگا کہ ق حاصل ہوتا ہے جب کہ ط کو ضرب

دیا جائے ع سے۔

جس طرح معمولی بول چال میں ایک لفظ کے کئی معنی ہوتے ہیں اور محل استعمال سے اس کے معنی کا پتا چلتا ہے اسی طرح ریاضی میں بھی علامتوں میں کسی قدر التباس پایا جاتا ہے۔ اگر ہم عدد ۷ کو ۷ سے ضرب دیں تو حاصل ضرب کو $۷^{۲}$ سے تعبیر کیا جائے گا۔ اس میں اور ۷۲ میں التباس کا امکان ہے اگر ان علامتوں کو بے احتیاطی سے لکھا جائے۔ التباس کو دور کرنے کے لیے $۷^{۲}$ میں ۲ کو باریک خط سے ۷ کی بائیں جانب کسی قدر اوپر ہٹا کر لکھا گیا ہے۔ اسی طرح $۸^{۹}$ سے مراد ہے ۸ × ۸ × ۸ × ۸ × ۸ × ۸ × ۸ × ۸ × ۸ یعنی عدد ۸ کو ۹ دفعہ لے کر ان تمام عددوں کو آپس میں ضرب دینے سے حاصل ہونے والا عدد۔ اسی طرح اگر عدد ل کو ن دفعہ لیا جائے تو ان تمام عددوں کا حاصل ضرب $ل^{ن}$ سے تعبیر کیا جائے گا۔

ہمیں معلوم ہے کہ $۷^{۳} = ۳۴۳$

چوں کہ ۷ اکائی کنارے والے مکعب کا حجم $۷^{۳}$ مکعب اکائی ہوتا ہے اس لیے ہم نتیجہ $۷^{۳} = ۳۴۳$ کو ۷ اکائی کنارے والے مکعب کا حجم معلوم کرنے کے لیے استعمال کر سکتے ہیں۔ پس اگر مختلف عددوں کے مکعبوں کے لیے جدول بنائی جائے تو اس کی مدد سے مختلف مکعبوں کے حجم فوراً معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ اسی طرح ریاضی کی مختلف جدولوں سے ہماری ضرورتیں پوری ہوتی ہیں۔

یہ غور سے دیکھا جائے کہ ریاضیاتی جملہ $۷^{۳} = ۳۴۳$ میں ۲ اسم نہیں ہے بلکہ ایک عمل کو تعبیر کرتا ہے۔ اسی طرح $۱۰^{لا} = ن$ میں لا سے ایک عمل تعبیر ہوتا ہے۔ یعنی نحوی اصطلاح میں لاؔ اسم نہیں ہے بلکہ فعل ہے۔

چوں کہ اکثر اوقات علامتوں اور حرفوں کی کثرت سے بیان میں دل چسپی باقی نہیں رہتی اس لیے اخبار کے ہوشیار اڈیٹر (مدیر) کی طرح ریاضی داں مناسب ہندسی شکلوں سے مدد لیتے ہیں۔ ان شکلوں سے وہی فائدہ ہوتا ہے جو اخباروں میں کارٹون (CARTOON) سے حاصل ہوتا ہے۔ یہ توضیحی کام اقلیدس کے علم ہندسہ سے نہیں لیا جاتا بلکہ اس جدید اور کارآمد علم ہندسۂ سے لیا جاتا ہے جو سترھویں صدی میں ایجاد ہوا۔ یہ نیا علم ہندسہ، ہندسہ تحلیلی یا ترسیمی ہندسہ کہلاتا ہے۔ سترھویں صدی کی اس ایجادِ ترسیمات نے اقلیدسی علم ہندسہ کی ایک اہم کمی کو پورا کردیا۔ اس نئے علمِ ہندسہ کی مدد سے بہت سے حسابی عمل ہندسی اشکال کی مدد سے آسانی اور فصاحت کے ساتھ حل کیے جا سکتے ہیں۔ مثلاً اکلیز اور کچھوے کی دوڑ کے متعلق پہلے باب میں جو معمّہ پیش کیا گیا اس کو ترسیمات کی مدد سے ہم آسانی سے حل کرسکتے ہیں۔ (دیکھو باب 9) اسی طرح ہم لا کی مختلف قیمتوں کے جواب میں لاؔ کی قیمتوں کو ترسیمات کی مدد سے تعبیر کر سکتے ہیں اگرچہ کہ یہ تعبیر اقلیدسی علم ہندسہ کے ذریعے ناممکن ہے۔

ریاضی کے نظری نتیجے بالعموم پہلے خاص خاص صورتوں پر تجربہ کرنے سے دریافت کیے گئے ہیں اور بعد میں ان مسئلوں کا عام ثبوت وضع کیا گیا ہے۔ نظری ثبوت کا اصل مدّعا صرف یہ ہوتا ہے کہ زیرِ بحث مسئلے کا تعلق اس کے پہلے کے مسئلوں سے واضح طور پر بتایا جائے۔

مثلاً مستطیل کا رقبہ معلوم کرنے کا عملی قاعدہ کسروں کی ضرب کے قاعدے سے صدیوں پہلے دریافت ہوچکا تھا۔ اس عملی قاعدے کی

وضاحت ذیل کی مثال سے اچھی طرح ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ ہمیں ایک ایسے مستطیل کا رقبہ معلوم کرنا ہے جس کے متصل ضلعوں کے طول $\frac{۳}{۵}$ اور $\frac{۴}{۷}$ اِکائی ہیں۔ اس غرض سے اِکائی طول والا ایک مربع بناؤ۔ اس کے ایک ضلع کو ۵ مساوی حصّوں میں تقسیم کرو اور متصل ضلع کو ۷ مساوی حصّوں میں۔ نقاطِ تقسیم میں سے دوسرے ضلعے کے متوازی خط کھینچو۔ اس طرح سے مربع (۳۵) مساوی حصّوں میں تقسیم ہو جاتا ہے اور شکل سے فوراً یہ ظاہر ہوتا ہے کہ ضلعوں $\frac{۳}{۵}$ اور $\frac{۴}{۷}$ والے مستطیل میں ایسے (۱۲) حصّے ہیں۔ اس لیے زیرِ بحث مستطیل کا رقبہ اِکائی رقبے کا $\frac{۱۲}{۳۵}$ حصّہ ہے۔ پس ترسیمی طور پر حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{۳}{۵} \times \frac{۴}{۷} = \frac{۱۲}{۳۵}$۔

	۱	۲	۳	۴	۵
۱	۱	۲	۳	۱۳	۱۴
۲	۴	۵	۶	۱۵	۱۶
۳	۷	۸	۹	۱۷	۱۸
۴	۱۰	۱۱	۱۲	۱۹	۲۰
۵	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵
۶	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۷	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵

اس قسم کی کئی مثالوں سے یہ عام قاعدہ حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} \times \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{اج}}{\text{بد}}$

اب ہم ریاضی کے افعال (یعنی عامل) اور نحوی افعال میں چند نمایاں اختلافات کا ذِکر کریں گے تاکہ ریاضی کے عاملوں کی خصوصیت اچھی طرح واضح ہو جائے۔ پہلا فرق یہ ہے کہ ریاضی کے افعال میں ماضی، حال اور

مستقبل نہیں ہے۔ دوسرا قابلِ ذکر فرق یہ ہے کہ ریاضی کے تمام افعال متعدی ہوتے ہیں گویا ریاضی میں سکون اور بے عملی کو کسی قسم کا دخل نہیں ہے۔ ریاضی کے چند عامل ایسے ہیں کہ انھیں التزامی افعال REFBXIUE VCRBS سے تشبیہ دی جاسکتی ہے۔ مثلاً عامل + اور × کیوں کہ ۴ × ۳ ۳×۴ = ۴×۳ اور ۳×۴ = ۴×۳ اور ۳+۴ = ۷) اس سے فائدہ یہ ہے کہ ہمیں ضرب اور جمع کی صرف آدھی جدولیں یاد رکھنی کافی ہیں۔ لیکن چند عامل ایسے ہیں کہ ان کے عمل کی ترتیب بدلنے سے نتیجہ بھی بدل جاتا ہے۔ مثلاً (۴-۳) وہی نہیں ہے جو (۳-۴) ہے اور (۴ ÷ ۲) وہی نہیں ہے جو (۲ ÷ ۴) ہے۔ ریاضی کے چند عامل ایسے ہیں جو ایک دوسرے کی ضد ہیں۔ مثلاً معمولی زبان میں "اقرار کیا" اور "انکار کیا" ایک دوسرے کی ضد ہیں۔ اسی طرح ریاضی میں عامل × اور ÷ ایک دوسرے کی ضد ہیں اور عامل + اور – بھی ایک دوسرے کی ضد ہیں۔

چناں چہ (۱) ۳ × ۴ = ۱۲   ۱۲ ÷ ۳ = ۴

(۲) ۳ + ۴ = ۷   ۷ – ۳ = ۴

۷ – ۳ = ۴ کا ترجمہ معمولی زبان میں اس طرح کیا جاسکتا ہے "۷ میں سے ۳ کو تفریق کرنے سے ۴ باقی رہتا ہے۔ اسی نتیجے کو ہم یوں بھی بیان کرسکتے ہیں کہ عدد ۴ ایسا عدد ہے کہ اس کو ۳ میں جمع کرنے سے ۷ حاصل ہوتا ہے۔ اس توضیح سے ظاہر ہوتا ہے کہ عامل + اور – ایک دوسرے کی ضد ہیں۔ اسی طرح ۱۲ ÷ ۳ = ۴ کے معنی حسبِ ذیل ہیں:–

(۱) ۱۲ کو ۳ پر تقسیم کرنے سے ۴ حاصل ہوتا ہے۔

(۲) ۴ وہ عدد ہے جس سے ۳ کو ضرب دینے سے ۱۲ حاصل ہوتا ہے۔

اس مثال سے یہ واضح ہوتا ہے کہ × اور ÷ کے عامل ایک دوسرے کی

ضد ہیں۔

دو متضاد عاملوں کی ایک اور آسان مثال حسب ذیل ہے:۔

$$۷^{۲} = ۴۹$$

$$\sqrt{۴۹} = ۷$$

اس مثال سے معلوم ہوتا ہے کہ مربع لینے کا عمل جذر المربع نکالنے کے عمل کی ضد ہے۔ اوپر کی مثال سے یہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ اگر ایک عامل کے لیے جدول مرتب کی جائے تو اس عامل کی ضد کے لیے جدول فوراً مرتب کی جا سکتی ہے۔ مثلاً عددوں کے مربعوں کی جدول کی مدد سے جذر المربع کی جدول فوراً مرتب کی جا سکتی ہے۔ البتہ یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ ہر مثبت عدد کا جذر المربع صحیح عددوں کی رقوم میں ٹھیک ٹھیک طور پر بیان نہیں کیا جا سکتا۔ مثلاً $\sqrt{۲}$ کی قیمت شکل $\frac{ف}{ق}$ میں جہاں ف اور ق صحیح عدد ہیں ٹھیک ٹھیک طور پر بیان نہیں کی جا سکتی۔ لیکن مربعوں کی جدول سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ $۱۴^{۲} = ۱۹۶$ اور $۱۵^{۲} = ۲۲۵$، اس لیے $(۱٫۴)^{۲} = ۱٫۹۶$ اور $(۱٫۵)^{۲} = ۲٫۲۵$ یعنی $\sqrt{۲}$ کی قیمت ۱٫۴ اور ۱٫۵ کے درمیان واقع ہے۔ اس سے زیادہ درجہ صحت تک $\sqrt{۲}$ کی قیمت معلوم کرنے کے لیے مماثل عمل اختیار کیا جا سکتا ہے۔

نحو۔ قواعد کی کتابوں میں بالعموم پہلے حصے میں لفظ کی مختلف قسموں اور ان کے استعمال کے قاعدوں پر بحث کی جاتی ہے۔ یہ علم صرف کہلاتا ہے۔ دوسرے حصے میں لفظوں کے باہمی تعلق اور جملہ کی ساخت کے قاعدوں پر بحث کی جاتی ہے۔ یہ علم نحو کہلاتا ہے۔ ریاضی کی نحو کے بنیادی قاعدے بہت آسان ہیں کیوں کہ ریاضی میں جذبات کو دخل نہیں ہے اور

ریاضی کے تمام جملوں کی ساخت تقریباً یکساں ہوتی ہے۔ ریاضی کے جملوں میں سے ہر ایک میں علامت = ہوتی ہے جس کے معنی "مساوی ہے" کے ہیں۔ ریاضی کے جملے دراصل مساواتیں ہیں اور علامت مساوات (=) کی دونوں جانب کے حصے جانبین یا طرفین کہلاتے ہیں۔ ریاضی نحوی قاعدوں کا تعلق زیادہ تر اس بات سے ہوتا ہے کہ مساوات کی طرفین میں کسی قسم کی تبدیلی کیوں کر کی جا سکتی ہے۔

مساوات کی ایک طرف میں جو تبدیلی کی جا سکتی ہے وہ صرف رقموں کی ترتیب کی تبدیلی ہے۔ جس طرح ایک فقرے میں بعض لفظوں کی ترتیب بدلنے سے اس کے معنی میں کسی قسم کی تبدیلی نہیں ہوتی اسی طرح ایک مساوات کی ایک طرف کی بعض رقموں کی ترتیب بدلنے سے مساوات میں کوئی فرق نہیں آتا۔ البتہ یہ تبدیلی صرف اُن صورتوں میں ہو سکتی ہے جب کہ عامل × اور + استعمال کیے گئے ہوں نہ کہ عامل ÷ اور −۔ مثلاً

(۱) ا ب = ج

تو ب ا = ج

(۲) ا (ب + ج) = د

تو (ب + ج) ا = د

اور (ج + ب) ا = د

مساوات کی دونوں جانبوں میں ایک ہی مقدار جمع کرنے سے یا تفریق کرنے سے یا دونوں جانبوں کو ایک ہی مقدار سے ضرب دینے سے یا ایک ہی مقدار پر تقسیم کرنے سے مساوات میں کوئی فرق نہیں آتا۔ مثلاً

(۱) اگر لا = ی

تو لا + ب = ی + ب

لا - ب = ی - ب

ب لا = ب ی

اور $\frac{\text{لا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ی}}{\text{ب}}$

کسی مساوات کے حل سے مراد یہ ہو کہ نامعلوم مقدار کی قیمت معلومہ مقداروں کی رقوم میں حاصل کی جائے۔ اس کے لیے یہ ضروری ہو کہ نامعلوم مقدار والی تمام رقمیں مساوات کی ایک جانب اور معلومہ مقداروں والی تمام رقمیں مساوات کی دوسری جانب لائی جائیں۔ مثلاً اگر دی ہوئی مساوات ہو

لا + ی = ب

تو اوپر کے قاعدے کی رو سے ہم مساوات کی دونوں جانبوں میں سے ی کو تفریق کرتے ہیں، اب مساوات ہو جاتی ہو

لا + ی - ی = ب - ی

یعنی لا = ب - ی

اس سے معلوم ہوتا ہو رقم ی کو مساوات کی دائیں جانب سے بائیں جانب لانے سے اس کی علامت بدل جاتی ہو۔ اسی طرح اگر دی ہوئی مساوات ہو

ب لا + ج = د

تو ب لا = د - ج

اور دونوں جانبوں کو ب پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہو۔

لا = د - ج / ب

نوٹ :۔ یہ عمل ناممکن ہے اگر ب = صفر

اس موقعہ پر یہ بتا دینا ضروری ہے کہ ہمارے لیے نسبت و تناسب کے سوالوں کے حل میں وہ مشکلیں پیش نہیں آتیں جو یونانی ریاضی دانوں کو پیش آتی تھیں کیوں کہ آج کل ہمیں ہر طرف اور ہر وقت نسبت و تناسب اور تبدیلی کی شرحوں سے دو چار ہونا پڑتا ہے اور یہ تصورات ہمارا ذہنی ورثہ بن گئے ہیں۔ مثال کے طور پر موٹر کے پٹرول کا صرفہ لیا جائے۔ اگر موٹر ۳۵ میل فی گیلن جاتی ہے اور فاصلے کو ف سے تعبیر کیا جائے تو ہم لکھ سکتے ہیں۔

ف = ۳۵ میل

نیز فاصلہ ف میل طے کرنے کے لیے ف / ۳۵ گیلن پٹرول کی ضرورت ہوگی۔
دراصل موٹر کی شرح ش میل فی گیلن، طے شدہ فاصلہ ف میل اور پٹرول کی مقدار ن گیلن میں ہمیشہ رشتہ ف = ن ش درست پایا جاتا ہے اور اس کی مدد سے ف، ن اور ش میں سے کسی دو کی قیمتیں معلوم ہوں تو تیسری مقدار فوراً معلوم کی جا سکتی ہے۔

اسی طرح اگر ہمیں یہ معلوم ہو کہ انار کا شربت بنانے کے لیے فی دو پیالی شیرے میں ۳ پیالی شکر ملائی جاتی ہے تو ہم فوراً بتا سکتے ہیں کہ ف / ق = ۲ / ۳ جہاں ف اور ق سے شیرہ اور شکر کی مقداریں مُراد ہیں اور اس رشتے کی مدد سے ف اور ق میں سے کوئی ایک مقدار معلوم ہو تو دوسری مقدار معلوم کی جا سکتی ہے۔

کلیے کی دوسری قسمیں۔ قواعد صرف و نحو اور پیمائش اور حساب

کے قاعدوں کی مشابہت کی مزید وضاحت کے لیے اب ہم یہ بتائیں گے کہ اسم اور فعل کے علاوہ عددوں کے قاعدوں میں کلمے کی اور کون سی قسمیں پائی جاتی ہیں اور کون سی نہیں پائی جاتیں۔ ریاضی میں ندا، حیرت، تاسف، تمنا وغیرہ کے لیے کوئی علامتیں نہیں ہیں کیوں کہ اس قسم کے جذبات کے لیے ریاضی میں بالکل گنجائش نہیں ہے۔ البتہ اسم صفت اور متعلق فعل (ADVERB) کے جواب میں ریاضی میں بھی علامتیں موجود ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ حرف لا سے ہم ایک عدد کو تعبیر کر سکتے ہیں۔ اگر اس قسم کے عددوں میں سے ایک خاص عدد مراد ہو تو ہم اس کے لیے علامت لاکر استعمال کر سکتے ہیں۔ اس علامت لاحقہ لا سے عدد لا کی صفت بیان ہوتی ہے جیسا کہ فقرہ "کالی گائے" میں لفظ "کالی" سے گائے کی صفت ظاہر ہوتی ہے۔ بالعموم علامت $\sqrt{\quad}$ سے جذر المربع تعبیر کیا جاتا ہے۔ لیکن $\sqrt[3]{\quad}$ سے تیسرا جذر اور $\sqrt[n]{\quad}$ سے ن والا جذر مراد ہوتی ہے۔ اس صورت میں عامل یعنی علامت $\sqrt{\quad}$ کے آگے جو عدد لکھا جاتا ہے اس سے عامل کے معنی میں ترمیم ہوتی ہے۔ اس بنا پر ہم علامت $\sqrt[n]{\quad}$ میں ن کو متعلق فعل (ADVERB) کہہ سکتے ہیں۔

ریاضی میں صرف دو حروف عطف استعمال ہوتے ہیں، ایک $\therefore$ (جس کے معنی ہیں اس لیے) اور دوسرا $\because$ (چوں کہ)۔ یہ دونوں علامتیں علم ہندسہ اور حساب میں کثرت کے ساتھ استعمال ہوتی ہیں۔

اسلوب بیان۔ کسی زبان کے اسلوب بیان اور ریاضی کے اسلوب بیان میں ایک دل چسپ مشابہت یہ ہے کہ دونوں صورتوں

میں غیر ضروری لفظوں کا استعمال جملے کے معنی کو غیر واضح کر دیتا ہے۔ ریاضیاتی جملوں میں ہمیشہ یہ کوشش کی جاتی ہے کہ رقموں کو اکٹھا یا ساقط کر کے اختصار کیا جائے۔ ذیل کی مثال سے رقموں کو اکٹھا کرنے کا طریقہ ظاہر ہوتا ہے:۔

جملہ (۳ ل - ج + ب + ل - ۱ ج + ب) کی بجائے مختصر طور پر ہم (۴ ل + ۲ ب - ۳ ج) لکھ سکتے ہیں۔

رقموں کو ساقط کرنے کے طریقے کی توضیح ذیل کی مثالوں سے ہوتی ہے:۔

(۱) اگر ۳ ل + ب = لا + ب تو مساوات کی دونوں جانبوں میں سے ب کو ساقط کر کے ہم لکھ سکتے ہیں ۳ ل = لا۔

(۲) ۱/۲ = ۱×۶ / ۲×۶ = ۶/۱۲

اسی طرح ا ج / ا د = ج / د

اس مثال میں شمار کنندہ اور نسب نما سے مشترک جزو ضربی کو ساقط کیا گیا ہے۔

حذف عبارت ۔ روزمرّہ بول چال میں ہم کبھی کبھی چند لفظ حذف کر دیتے ہیں جب کہ جملے کے معنی غیر واضح نہ بنتے ہوں۔ مثلاً "یہ روٹی لے جا"۔ اس جملے میں "تو" حذف ہے اور اس لفظ کو حذف کرنے کے باوجود جملے کے معنی واضح ہیں۔ اسی طرح ریاضی میں چند علامتیں حذف کی جاتی ہیں۔ مثلاً اگر عدد "۱" سے ضرب دینا ہو یا تقسیم کرنا ہو تو اسے لکھا نہیں جاتا کیوں کہ اس سے نتیجے پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔ پس

$$\frac{\text{ک}}{\text{۱}} = \text{ک} \text{ ؛ } \text{ک} \times \text{۱} = \text{ک} \text{ ؛ } \text{ک}^{\text{۱}} = \text{ک}$$

نیز اگر ک لا = ب ما تو ہم لکھ سکتے ہیں $\frac{\text{ک لا}}{\text{۱}} = \frac{\text{ب ما}}{\text{۱}}$

یعنی $\frac{\text{ک}}{\text{ب}} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ اور $\frac{\text{ک}}{\text{ما}} = \frac{\text{ب}}{\text{لا}}$

یہ بھی ہم دیکھ چکے ہیں کہ لا × ما میں علامت × کو حذف کرکے صرف لا ما لکھا جاتا ہے۔

ذیل کے سلسلے پر غور کرو۔ لا ، ۳ لا$^{\text{۳}}$ ، ۵ لا$^{\text{۵}}$ ...

اس سلسلے میں ہر رقم کے عددی سر اور قوت نما کا باہمی رشتہ واضح ہوتا ہے جب کہ ہم لکھیں ۱ لا$^{\text{۱}}$ ، ۳ لا$^{\text{۳}}$ ، ۵ لا$^{\text{۳}}$ ......

نیز ۱ = $\frac{\text{ک}}{\text{ک}}$ جب کہ ک صفر نہ ہو۔ اس نتیجے کی مدد سے ہم سلسلہ ۱ ، $\frac{\text{۴}}{\text{۵}}$ ، $\frac{\text{۲}}{\text{۳}}$ ، $\frac{\text{۴}}{\text{۷}}$ کو ذیل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں:- $\frac{\text{۴}}{\text{۴}}$ ، $\frac{\text{۴}}{\text{۵}}$ ، $\frac{\text{۴}}{\text{۶}}$ ، $\frac{\text{۴}}{\text{۷}}$
جس سے صاف ظاہر ہوتا ہے کہ اس سلسلے کی رقمیں سلسلہ وار گھٹتی جاتی ہیں۔

محاورہ۔ ساتویں باب میں زبان کے قواعد اور ریاضی کے قاعدوں کی مزید مشابہت واضح کرنے کے لیے ریاضی کے محاورں پر بحث کی جائے گی اور یہ بتایا جائے گا کہ ریاضیاتی جملے کے معنی پر علامتوں کی ترتیب کا اثر کس طرح پڑتا ہے۔

اس باب کو ختم کرنے سے پہلے یہ بتا دینا ضروری ہے کہ کسی ریاضیاتی جملہ (مثلاً ضابطہ یا مساوات) کا ترجمہ معمولی بول چال میں کرنے سے قبل اس جملے کو اعداد میں لے آئیں تو اس کے معنی زیادہ واضح ہوتے ہیں اور اس کے بعد ترجمہ آسانی سے کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً اگر یہ دیا جائے کہ کسی موٹر کا طے شدہ فاصلہ ف ایسے بدلتا ہے جیسے صرف شدہ پٹرول کی مقدار ق تو اس کے معنی یہ ہیں کہ ف اور ق

کی نسبت مستقل ہی۔ اب خاص مثال کے طور پر فرض کرو کہ $\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$ = ۳۵ تب ف = ۳۵ ق۔ اس مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہی کہ طے شدہ فاصلہ (میلوں میں) صرف شدہ پیٹرول کی مقدار (گیلن میں) کا ۳۵ گنا ہوتا ہی۔ اب اگر خاص مستقل ۳۵ کی۔ بجائے کوئی مستقل م لیں تو اوپر کا نتیجہ لکھا جا سکتا ہی، ف = م ق جہاں م تغیر کا مستقل کہلاتا ہی اسی طرح کسی دیے ہوے ضابطہ کے معنی سمجھنے میں خاص عددی مثالوں سے مدد لی جا سکتی ہی۔

مشقیں

(۱) ہندسی شکل کے ذریعے یہ بتاؤ کہ ا (ب + ج) = اب + اج

(۲) ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ... + ۳۰ کی قیمت معلوم کرو۔

(۳) مندرجہ ذیل کا ترجمہ ریاضی کی زبان میں کرو :۔

(ا) ایک عدد کے ۳ گُنے میں ۱۵ جمع کر کے حاصل شدہ عدد کو ۷ پر تقسیم کرنے سے عدد ۱۱ حاصل ہوتا ہی۔

(ب) ایک کمرے کا طول اس کے عرض کا دوگنا ہی اور کمرے کا رقبہ (۲۰۰) مربع فٹ ہی۔

(ج) میرا دوست مجھ سے ۳ سال چھوٹا ہی، ہم دونوں کی عمروں کا مجموعہ ۳۷ سال ہی۔

(۴) مختصر کرو۔ ا + ۳ا + ۲ب - ا + ۴ج + ا - ۲ج + ۹ب

(۵) ذیل کی سادہ مساواتوں کو حل کرو :- (ا) ۳لا + ۷ = ۱۳

(ب) $\frac{\text{لا}}{\text{۴}} = \frac{\text{۱}}{\text{۸}}$ (ج) $\frac{\text{۳}}{\text{لا}} = \frac{\text{۳}}{\text{۲}}$ (د) لا + $\frac{\text{۱۵}}{\text{۴لا}}$ = ۷

چوتھا باب

تسہیل علم ہندسہ

یا

علم ہندسہ سے ہم کیا کام لے سکتے ہیں؟

پہلے تین بابوں میں ہم نے ریاضی کی ابتدائی تشکیل کا خاکہ کھینچا ہے اور بتایا ہے کہ تقریباً دو ہزار سال ق۔م۔ تک بھی انسان نے گنتی اور پیمائش کے کوئی عام اصول اور قاعدے دریافت نہیں کیے تھے۔ ریاضی کی ابتدا تو ہو چکی تھی لیکن اصولوں اور قاعدوں کی تنظیم عمل میں نہیں آئی تھی۔ ریاضی کی معلومات، خاص خاص قاعدوں کی شکل میں، اُستاد سے شاگرد تک، مذہبی پیشواؤں سے ان کے جانشینوں تک اور ماہر کاریگروں سے بتدیوں تک سینہ بہ سینہ منتقل ہوتی تھیں۔ اس لیے قدیم زمانے میں اور علوم کی طرح ریاضی پر کتابیں نہیں لکھی گئیں۔ قدیم زمانے کی مفید اور کارآمد ریاضیاتی معلومات کا اندازہ مصریوں کے غیر فانی اور عظیم الشان تعمیری شہ کاروں سے کیا جاسکتا ہے اور یہ قیاس غالباً صحیح ہے کہ اس زمانے میں ریت پر کھینچی ہوئی شکلوں کی مدد سے عبادت خانوں اور دوسری عمارتوں کے خاکے

تیار کیے جاتے تھے۔ دراصل انھی خاکوں سے علم ہندسہ کی ابتدا ہوئی تھی۔ حقیقت تو یہ ہے کہ رسّی، کھونٹی، شاقول اور سطحِ آب کی مدد سے عملی علم ہندسہ کے سوالوں کا حل نظری علم ہندسہ پر کتابیں لکھنے سے بہت زیادہ اہم اور قابلِ قدر ہے۔

ریاضی پر سب سے پہلی کتابیں چینیوں نے لکھیں۔ غالباً فیثاغورث سے کم از کم (۵۰۰) سال قبل چینیوں کو قائمۃ الزاویہ مثلث کی مشہور خاصیت کا علم تھا جیسا کہ ان کی ایک قدیم کتاب میں دی ہوئی ہندسی شکل سے پتا چلتا ہے۔ اس بات کے ماننے کے لیے بھی کافی ثبوت موجود ہے کہ چینی ریاضی داں عددوں کی کئی دل چسپ خاصیتوں سے واقف تھے۔ غالباً انھیں عددوں کی ایسی جماعتوں کا بھی علم تھا جو آج کل اعداد و شمار میں بہت اہمیت رکھتے ہیں۔ افسوس ہے کہ ان کے علم کا بیش تر حصّہ تباہ و برباد ہو گیا جب کہ ان کے ایک شہنشاہ کے حکم سے کتب خانے جلا دیے گئے کیوں کہ اُس شہنشاہ کا خیال تھا کہ اگر لوگ کتابیں کم پڑھیں گے تو وہ زیادہ اچھی کتابیں تصنیف کر سکیں گے۔

چوں کہ چینی ریاضی داں اور تقویم ساز کسی مذہبی جماعت کے رکن نہیں ہوتے تھے اس لیے ان کے علم کی ترقی کی راہ میں رُکاوٹوں کا اندیشہ کم تھا اور وہ اپنے ہم عصروں سے بہت آگے بڑھ سکتے تھے لیکن ان کا نقشی طرزِ تحریر ان کی ترقی کے راستے میں سنگِ گراں ثابت ہوا۔

تقریباً اُسی زمانے میں جب کہ چین میں ریاضی پر پہلی کتابیں لکھی جا رہی تھیں، یونان کی سرزمین پر شمالی یورپ کے خانہ بدوش آریائی وحشیوں نے حملہ کیا۔ وہ لکھنا پڑھنا بالکل نہیں جانتے تھے اور

نہ فنِ تعمیر اور تجارت سے واقف تھے۔ اُن کے ہاں وزن اور ناپ کے پیمانوں کا وجود تک نہ تھا۔ جب یہ وحشی یونان سے ہوتے ہوئے ایشیائے کوچک کے ساحلی شہروں تک پہنچے، جہاں انھوں نے چھوٹی چھوٹی ریاستیں اور شہری مملکتیں قائم کیں، تو وہ سامی تہذیب سے دوچار ہوئے اور شامیوں کے شاگردوں کے زمرے میں داخل ہوئے۔ ان وحشیوں کے لیے ان کی ابتدائی جہالت ہی مفید ثابت ہوئی۔ انھوں نے نقشی طرزِ تحریر کی بجائے انھیں رمزوں سے اپنی زبان کی سادہ آوازوں کو تعبیر کیا اور اس طرح سے حروفِ تہجی کی ابتدا ہوئی اور نقشی علامتیں صوتی حروف کی صورت میں تبدیل ہو گئیں۔

یہ خیال کہ یونانیوں کی علمی ترقی ان کی نسلی فوقیت پر مبنی تھی۔ بالکل بے بنیاد اور غلط ہے کیونکہ یونان کے سب سے بڑے دو ریاضی داں، طالیس اور فیثا غورث جو دراصل اقلیدسی علم ہندسہ کے بانی ہیں، فنیقی (یعنی سامی) نسل کے تھے اور ان کی رگوں میں آریائی خون قطعاً موجود نہ تھا۔ فیثا غورث کی تعلیمات میں چینی اثر کا صاف پتا چلتا ہے۔ فیثا غورث نے براعظم ایشیا کی سیاحت کی اور اس کی ذہنی تربیت اُن لوگوں میں ہوئی جو بحری راستوں سے ایشیا کے دُور دراز مُلکوں میں تجارت کرتے تھے۔ طالیس بھی ایک سوداگر تھا اور فن انجنیری سے واقف تھا۔ اس نے اپنی تجارت کے سلسلے میں دُور دراز مقاموں کا سفر کیا اور ایک عرصے تک مصر میں رہ کر مصری ریاضی دانوں سے علم حاصل کیا۔ اس نے سائے کی پیمائش سے مصر کے بڑے ہرم کی بلندی دریافت کی اور ۲۸ مئی ۵۸۵ھ ق م

کے گرہن کی پیش گوئی کی۔ اس موقعہ پر یہ بتا دینا دلچسپی سے خالی نہ ہوگا کہ طالیس نے کبھی بھی ریاضی کو روحانی کمال حاصل کرنے کا ذریعہ نہیں خیال کیا جیسا کہ افلاطون اور اس کے شاگردوں کا خیال تھا۔ شاید طالیس اور دوسرے یونانی علما کے لیے ان کا جغرافیائی محل وقوع مفید ثابت ہوا اور وہ مذہبی پیشواؤں کے مضر اثر سے محفوظ رہے۔ یونان کے سب سے بڑے مادہ پرست حکیم دیمقراطیس کی تصنیفوں سے اس بات کا پتا چلتا ہے کہ یونانی ریاضی داں اور سائنس داں مذہبی جماعت کے مضر اثر سے آزاد تھے۔ یہی وجہ ہے کہ افلاطون نے جو علم ہندسہ کو صرف ذہنی کھیل خیال کرتا تھا۔ دیمقراطیس کی تمام تصنیفوں کو جلا دینے کی خواہش کی تھی۔ جب اسکندریہ کا پہلا کتب خانہ رومی سپہ سالار جولیس سیزر کے حکم سے جلا دیا گیا تو دیمقراطیس اور اسکندریہ کے ہیئت دانوں کی گراں قدر تصنیفیں برباد ہوگئیں لیکن افلاطون اور ارسطو کے فاسد نظریے مٹ نہ سکے۔ اقلیدس نے افلاطونی علم ہندسہ کو اسکندریہ میں رواج دیا اور یہ بات اپنے طلبہ کے ذہن نشین کرانے کی کوشش کی کہ علم ہندسہ کو عملی طور پر استعمال کرنا ہرگز درست نہیں ہے۔ لیکن اسکندریہ کے محنتی اور بلند ہمت طلبہ نے اپنے اُستاد کی تاکید کے باوجود علم ہندسہ کا عملی استعمال معلوم کیا اور اس کی مدد سے بہت سے کارآمد مسئلے حل کیے۔

اقلیدس کی کوتاہیاں۔

پچھلے چند سال میں اینسٹائین (EINSTEIN) اور ارنسٹ ماخ (ERNST MACH) کی انقلاب انگیز تحقیقات کی وجہ سے علم ہندسہ کے متعلق ہمارے زاویۂ نگاہ میں بہت بڑی تبدیلی ہوگئی ہے۔ اب ہمیں یہ

معلوم ہو چکا ہے کہ اقلیدس کا علم ہندسہ فضا کی پیمائش اور مساحت کے لیے صحیح ترین ذریعہ نہیں ہے۔ اس کا مطلب یہ نہیں ہے کہ اقلیدسی علم ہندسہ مفید نہیں ہے۔ البتہ نئی تحقیقات نے اقلیدسی علم ہندسہ کی خامیاں ظاہر کر دی ہیں۔ اقلیدس کے علم ہندسہ کی قدر و قیمت کا صحیح اندازہ لگانے کے لیے یہ ضروری ہے کہ ان کوتاہیوں پر ابتدا ہی میں نظر ڈالی جائے۔ یہ ظاہر ہے کہ غلّہ اور ترکاری تولنے کے لیے معمولی ترازو، حسّاس کیمیاوی ترازو سے زیادہ کارآمد ہوتا ہے کیوں کہ کیمیاوی ترازو کی نزاکت اور صحت ہی اس کو معمولی کام کاج کے لیے غیر موزوں بنا دیتی ہیں۔ اسی طرح اقلیدسی علم ہندسہ بھی زمین کی معمولی پیمائشوں کے لیے زیادہ کارآمد ہوتا ہے۔ لیکن کسی سحابیے (NEBULA) کا فاصلہ معلوم کرنے کے لیے اقلیدس کا علم ہندسہ مفید ثابت نہیں ہوتا۔ مثلاً انڈرومیڈا (ANDROMEDA) کے بڑے سحاب کا فاصلہ معلوم کرنے کے لیے اقلیدسی علم ہندسہ سے کام نہیں لیا جا سکتا۔ سحاب ہم سے ۱،۰۰۰،۰۰۰ (دس لاکھ) نوری سال کی دوری پر ہے۔ اس کے معنی یہ ہیں کہ اس کی روشنی یا نور جس کی رفتار ۱،۸۶،۰۰۰ میل فی ثانیہ (سکنڈ) ہے۔ اس سحاب سے زمین تک دس لاکھ سال میں پہنچتا ہے۔ اقلیدسی علم ہندسہ کی یہ کوتاہی چنداں تعجب انگیز نہیں کیوں کہ اقلیدسی علم ہندسہ اپنے زمانے کے حالات کا پابند تھا۔ جس طرح یونانی حساب اکلیز اور کچھوے کی دوڑ کے سوال کو حل نہ کر سکا اسی طرح اقلیدسی علم ہندسہ بھی سحابیوں کے فاصلوں کی پیمائش میں ناکام رہا۔ اقلیدسی علم ہندسہ زمین کے قطعوں کی مساحت، ریت پر کھنچی ہوئی شکلوں کے ذریعے مندروں اور دوسری عمارتوں کے خاکوں کی تیاری اور سایوں کی مدد سے بیناروں

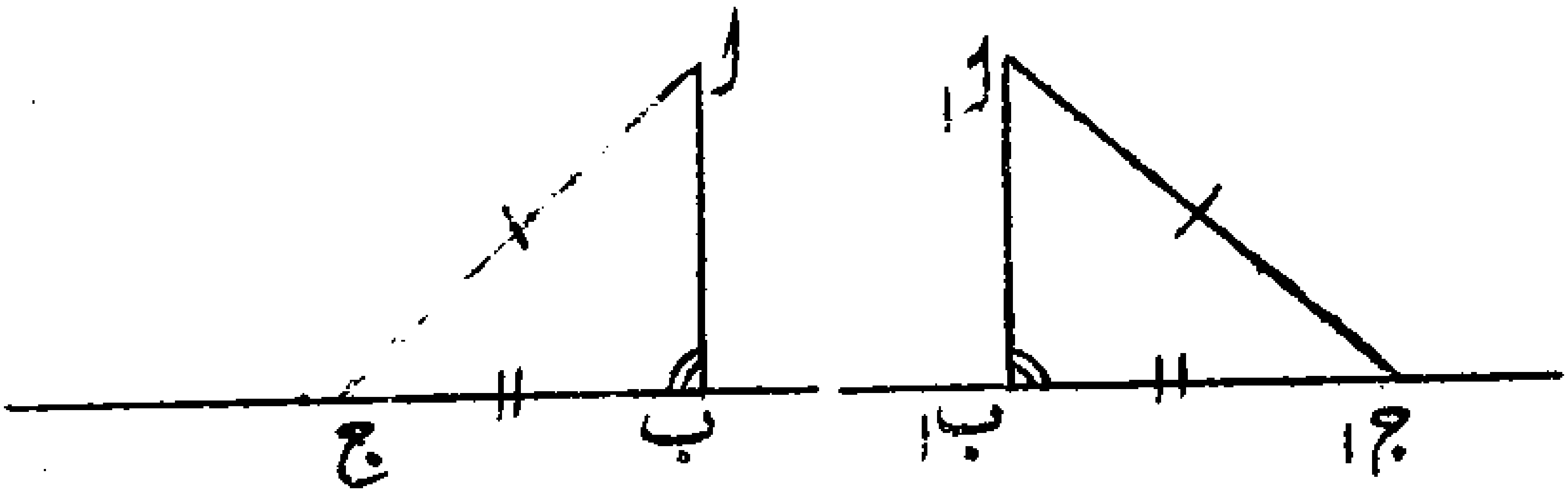
کی بلندیاں معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا تھا۔ اس علم ہندسہ کی غرض و غایت اشیا کے طول، رقبے اور حجم معلوم کرنا تھی اور چوں کہ اکثر اشیا میں جلد تبدیلی ہونے کا امکان نہیں ہو اس لیے اقلیدسی علم ہندسہ نے "وقت" کو اپنی ساخت میں جگہ نہیں دی۔ اس علم ہندسہ کے خط، زاویے اور شکلیں ناقابلِ تغیّر ہیں۔ اس لیے جب ہم اقلیدسی علم ہندسہ کی شکلوں کو تغیّر پزیر دنیا میں استعمال کرتے ہیں تو ہمیں یہ یاد رکھنا پڑتا ہو کہ ہم نے اس تصویر کے ایک جزو کو نظرانداز کر دیا ہو۔ جب ہم کہتے ہیں کہ کسی صندوق کا حجم اتنا ہو تو اس سے ہمارا مطلب یہ ہوتا ہو کہ صندوق کی ساخت کی وجہ سے اس کے بالکل ٹوٹ جانے تک اس کے حجم میں کسی قسم کی تبدیلی نہیں ہوگی۔ اس قسم کے حسابات میں "وقت" کو بالکل داخل نہیں کیا جاتا۔ اسی طرح جب ہم کہتے ہیں فلاں کھیت کا رقبہ اتنا ہو تو ہم کھیت کے رقبے کی اُس کمی کو نظرانداز کرتے ہیں جو زمین کے سکڑنے کی وجہ سے پیدا ہوتی ہو۔ اگر دو کھیت ایسے ہوں کہ ایک کا طول (۲۰۰) گز اور عرض (۱۰۰) گز ہو اور دوسرے کا طول (۲۲۵) گز اور عرض (۷۵) گز ہو اور ان کھیتوں کے اطراف ہم دیوار بنانا چاہیں تو دیوار کے طول کے لحاظ سے یہ دونوں کھیت مساوی ہوں گے لیکن ان کے رقبے ایک دوسرے کے برابر نہیں ہوں گے۔ دیوار کا طول ناپتے کے وقت ہم کھیتوں کے رقبوں کو نظرانداز کرتے ہیں کیوں کہ دیوار کی تعمیر کے وقت کھیت کا رقبہ کوئی اہمیت نہیں رکھتا۔ رقبے کا لحاظ اس وقت کیا جاتا ہو جب کہ کھیت میں کاشت کرنا ہو۔

یونانی مفکرین ناپ اور پیمائش کی ان باریک صورتوں میں امتیاز

نہ کر سکے اور یہ بھی نہ دیکھ سکے کہ ناپ کی اکائی اس کے معاشی استعمال کے ساتھ ساتھ بدلتی رہتی ہے۔ اس لیے جب انھوں نے ہندسی شکلوں کی تحلیل شروع کی تو نقطہ خط اور زاویے کو مادے سے خالی فرض کیا اور اس مغالطے میں مبتلا ہوئے کہ انھیں ازلی و ابدی حقیقت کا سراغ مل گیا ہے۔ انھوں نے یہ خیال کیا کہ ایک نقطہ، جس کا کوئی طول اور عرض نہ ہو بلکہ محض مقام ہو، وجود رکھ سکتا ہے۔ اسی طرح ایک خط جس کی صِرف لمبائی ہو اور کوئی چوڑائی نہ ہو وجود رکھتا ہے۔ اُنھوں نے یہ یقین کرلیا کہ اس ہمیشہ بدلنے والی دُنیا میں) انھوں نے نہ بدلنے والی مقداروں کا پتا لگالیا اس لیے اُن کی یہ ہندسی مقداریں تغیّر اور وقت کی قید سے آزاد مان لی گئیں اور ان مجرّد تصوّروں کی مدد سے انھوں نے استدلال کی ایک مستحکم عمارت بنانے کی کوشش کی ۔ یہی وجہ ہے کہ اقلیدس کا علم ہندسہ سحابوں کے فاصلے کی پیمائش میں کارآمد نہیں ہوتا کیوں کہ ان پیمائشوں میں وقت کو ہرگز نظرانداز نہیں کیا جا سکتا۔

اقلیدسی علم ہندسہ کی مذکورۂ بالا کوتاہی کے علاوہ ایک اور کوتاہی اس وقت ظاہر ہوئی جب عرب ریاضی دانوں نے علم ہندسہ کی مدد سے حساب اور جبر و مقابلہ کے عملی سوال حل کرنے کی کوشش کی اور یہ پایا کہ ہندسی شکلوں کی مدد سے سوال کا صِرف ایک ہی حل نکلتا ہے حالاں کہ سوال کے ایک سے زیادہ حل ہو سکتے ہیں ۔علم ہندسہ کی اس کوتاہی کی وجہ یہ تھی کہ اس میں ہندسی شکلوں کے محل وقوع کو بھی وقت کی طرح نظرانداز کردیا گیا تھا۔یعنی دو شکلیں جو دراصل اپنے

محل وقوع کے لحاظ سے ایک دوسرے کے برابر نہیں تھیں انھیں اقلیدسی علم ہندسہ میں ایک دوسرے کے بالکل برابر قرار دیا تھا۔ اس کی توضیح ذیل کے دو مثلثوں سے ہو سکتی ہے جو اقلیدس کے قاعدوں کی رو سے ہر طرح سے برابر ہیں لیکن ان کے محل وقوع مختلف ہونے کی وجہ سے وہ ایک دوسرے کے برابر نہیں ہیں۔



جب انسان کو اپنی روز افزوں تجارتی ضرورتوں کی وجہ سے سمندروں پر حرکت کرنے والے جہاز کے محل وقوع کو متعین کرنے کی سخت ضرورت پیش آئی تو ایک نیا علم ہندسہ ایجاد ہوا جس میں نہ صرف "محل وقوع" کو بلکہ "وقت" کو بھی ملحوظ رکھنا ضروری ہوتا ہے۔

یونانی علم ہندسہ میں دو شکلوں کو آپس میں ہر طرح سے مساوی ثابت کرنے کے لیے ان شکلوں کو مثلثوں میں اس طرح تقسیم کیا جاتا ہے کہ ایک شکل کے مثلث دوسری شکل کے مثلثوں کے جدا جدا برابر ہوں۔ اس طرح کے مقابلے کے لیے ذیل کے تین قاعدے، جو علمی نقطۂ نظر سے بدیہی ہیں، کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

قاعدہ (۱) دو مثلث آپس میں ہر طرح سے مساوی ہوتے ہیں اگر ایک مثلث کے تین ضلعے دوسرے مثلث کے تین ضلعوں کے جدا جدا برابر ہوں۔

قاعدہ (۲) دو مثلّث آپس میں ہر طرح سے مساوی ہوتے ہیں اگر ایک مثلّث کے دو ضلعے اور ان کا درمیانی زاویہ دوسرے مثلث کے دو ضلعوں اور ان کے درمیانی زاویے کے جُدا جُدا برابر ہوں۔

قاعدہ (۳) دو مثلّث آپس میں ہر طرح سے مساوی ہوتے ہیں اگر ایک مثلّث کا ایک ضلع اور اس ضلعے کے سروں پر کے زاویے دوسرے مثلّث کے ایک ضلعے اور اس کے سروں پر کے زاویوں کے جُدا جُدا برابر ہوں۔

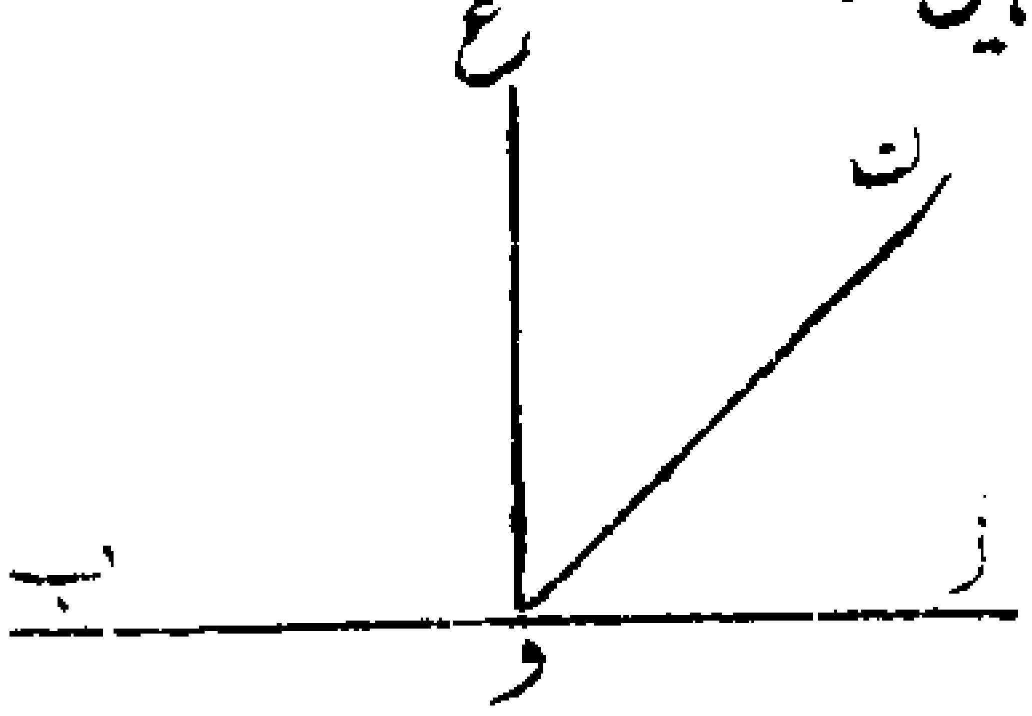
ان تین قاعدوں کی تصدیق آسانی کے ساتھ اس بات سے ہوتی ہے کہ اگر مثلّث کے (۱) تین ضلعے دیے جائیں یا (۲) دو ضلعے اور ان کا درمیانی زاویہ دیا جائے یا (۳) ایک ضلع اور اس کے سروں پر کے زاویے دیے جائیں تو مثلّث بنانے کا عمل یگانہ ہوتا ہے یعنی مثلث کے بنانے میں کوئی اشتباہ نہیں ہوتا ہے۔

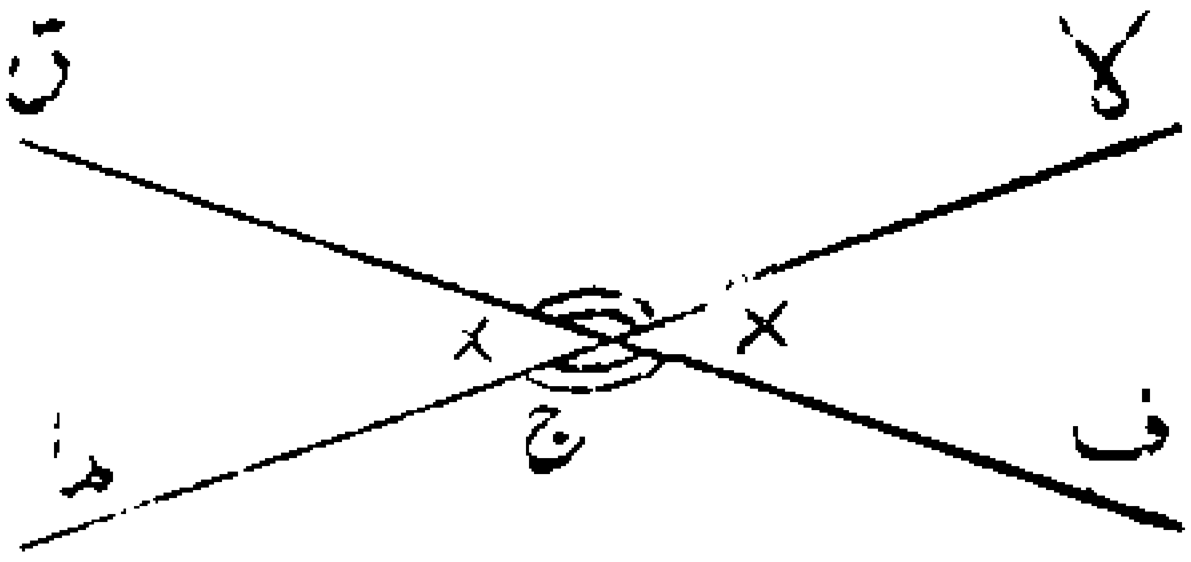
اقلیدسی علم ہندسہ کی ایک اور کوتاہی یہ ہے کہ اس کی تشکیل میں نسبت وتناسب کے اصول کو ابتدا ہی سے استعمال کرنے کی بجائے بالکل آخر میں استعمال کیا گیا ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ اس زمانے کے ماحول میں نسبت وتناسب کی ضرورت اس قدر عام نہیں تھی جیسا کہ موجودہ زمانے میں ہے۔ یونانی ریاضی داں عددوں کی نسبتوں سے پوری طرح واقف نہ تھے کیوں کہ عددوں کی غیر موزوں تحریر کی وجہ سے وہ تقسیم کا عمل نہایت پیچیدہ طریقے سے گنتارے کی مدد سے کرتے تھے۔ چوں کہ ہمارے زمانے میں آن شرح تبدیلی معلوم کرنے کے لیے نسبت وتناسب کا استعمال ہوتا ہے اس لیے ہمیں مثلثوں کی ایک اور نہایت اہم خاصیت سمجھنے میں وہ مشکلیں پیش نہیں آئیں جو اقلیدس کے شاگردوں کو پیش آتی تھیں۔ عملی طریقے سے

آسانی سے تصدیق کی جا سکتی ہے کہ اگر ایک مثلث کے زاویے دوسرے مثلث کے زاویوں کے جدا جدا برابر ہوں تو اِن مثلثوں کے نظیر کے ضلعے (یعنی مساوی زاویوں کے مقابل کے ضلعے) متناسب ہوتے ہیں یعنی ان کے طولوں میں ایک ہی نسبت ہوتی ہے۔ مثلثوں کی اس اہم اور کارآمد خاصیت کا ایک انکشاف اقلیدس سے تقریباً ۲۵۰ سال قبل ایونیہ کے ریاضی داں طالیس نے کیا تھا لیکن اقلیدس اور اس کے بعد کے ریاضی دانوں نے عددوں کی نسبتوں کو علم ہندسہ سے خارج کر کے اس مسئلے کے استعمال سے فائدہ حاصل نہیں کیا۔ موجودہ زمانے میں مثلث کے ضلعوں کی نسبتیں ہر وقت استعمال میں آتی ہیں۔ چناں چہ ریل کی پٹڑیوں کے میلان کو ظاہر کرنے کے لیے سڑک کے بازو کی ایک نسبت درج ہوتی ہے۔ مثلاً اگر یہ درج ہو کہ سڑک کا میلان $\frac{1}{10}$ ہے تو اس کے معنی صرف یہ ہیں کہ اگر سڑک پر فاصلہ (۱۰) اکائی طول طے کیا جائے تو مقام کی بلندی میں ایک اکائی طول کا اضافہ ہوگا یا کمی ہوگی۔ علم مثلث اور علمِ احصا میں زیادہ تر تبدیلی کی شرحوں یعنی نسبتوں ہی سے بحث کی جاتی ہے۔ ریاضی کی ان کارآمد شاخوں کا ذکر چھٹے باب میں کیا جائے گا۔ اس باب میں ہم یہ بتائیں گے کہ متشابہ مثلثوں کی مندرجہ بالا اہم خاصیت کی مدد سے کس طرح فاصلے اور بلندیاں معلوم کی جا سکتی ہیں۔

چوں کہ عمارتوں کی تعمیر میں قائمہ زاویہ کی ضرورت پیش آتی ہے اس لیے قدیم ریاضی دانوں نے بھی دو زاویوں کے مقابلے کے لیے قائمہ زاویہ کو اِکائی کے طور پر اختیار کیا۔ یہ عام مشاہدہ ہے کہ شاقول کی ڈوری افقی خط کے ساتھ دو مساوی زاویے بناتی ہے۔ اِن زاویوں

میں ہر ایک کو قائمہ زاویہ کہتے ہیں۔ نیز اگر شاقول کی ڈوری اور افقی خط کے نقطہ تقاطع میں سے اِن دو خطوں کی مستوی سطح میں کوئی خط کھینچا جائے تو یہ خط شاقول کی ڈوری اور افقی خط کے ساتھ جو زاویے بناتا ہے اُن کا مجموعہ ایک قائمہ زاویہ کے برابر ہوتا ہے۔ ایسے دو زاویے جن کا مجموعہ ایک قائمہ زاویہ کے برابر ہو مُتمِم زاویے کہلاتے ہیں۔ زاویے کی پیمائش میں سہولت کی خاطر قائمہ زاویہ کو (۹۰) مساوی حصّوں میں تقسیم کیا جاتا ہے جن میں سے ہر ایک حصہ ایک درجہ کہلاتا ہے۔ ذیل کی دو شکلوں سے زاویوں کے متعلق دو کارآمد قاعدے فوراً حاصل ہوتے ہیں۔



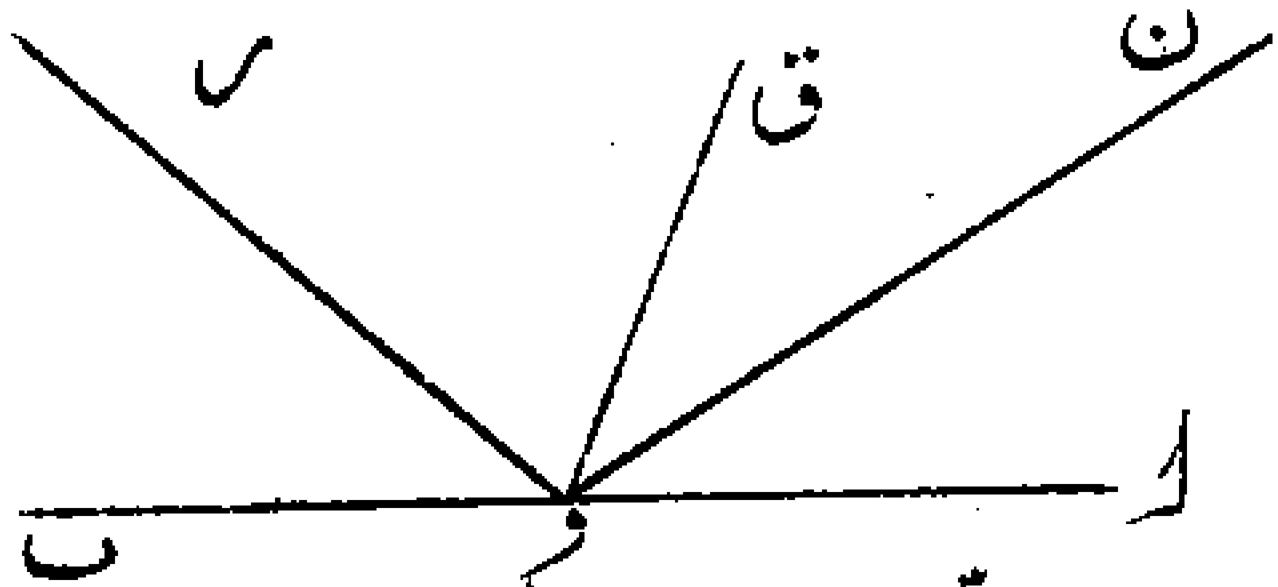


قاعدہ (۱) اگر ایک خط مستقیم ا ب کے ایک نقطہ و میں سے کوئی خط و ن کھینچا جائے تو ا و ن + ن و ب = دو قائمہ زاویے ہوں گے۔

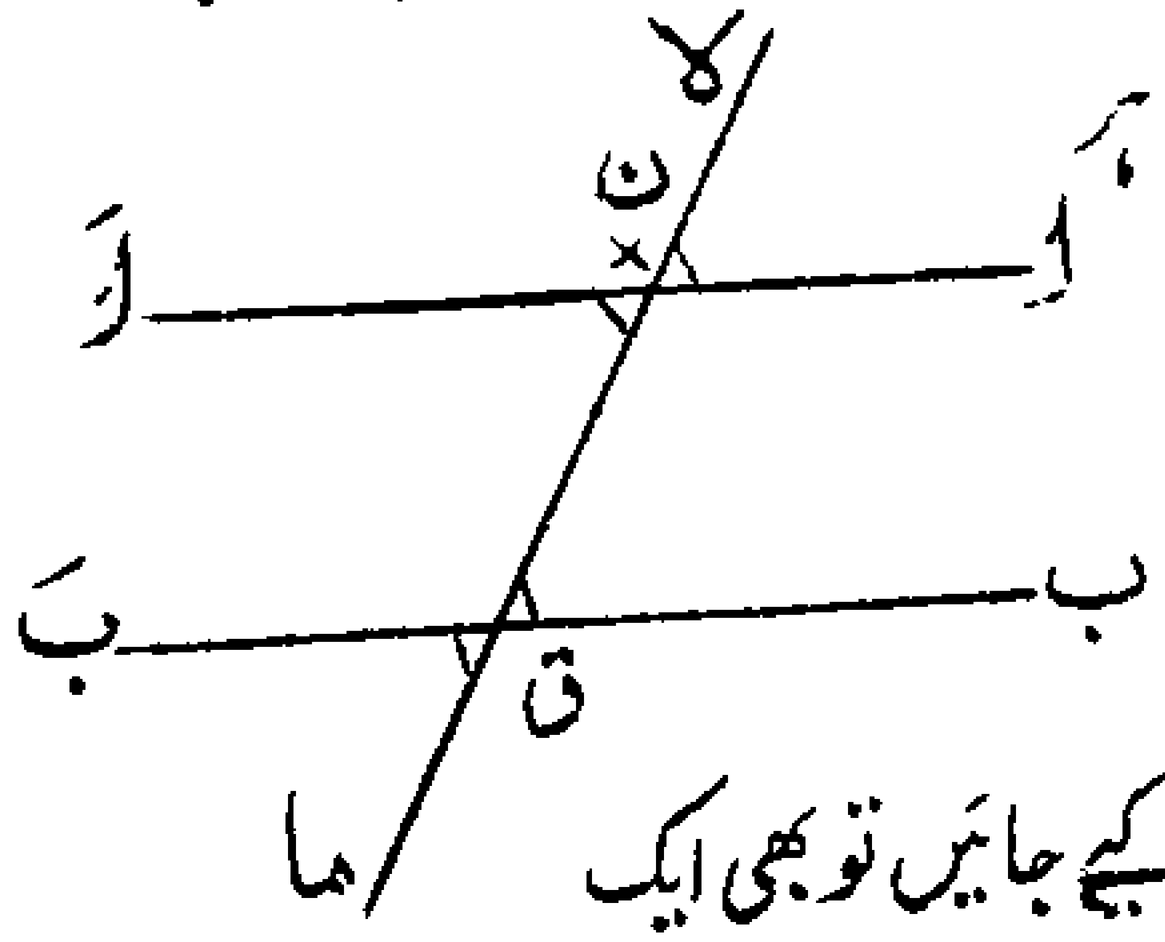
قاعدہ (۲) اگر دو خط مستقیم ایک دوسرے کو قطع کریں تو مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

قاعدہ (۱) سے حسبِ ذیل نتیجہ فوراً حاصل ہوتا ہے۔

اگر ایک خط مستقیم کے کسی نقطے میں سے اس خط کی ایک ہی جانب کئی خط کھینچے جائیں تو اس طرح سے جو زاویے بنتے ہیں ان کا مجموعہ دو قائمہ زاویوں کے مساوی ہوتا ہے۔ مثلاً ذیل کی شکل میں ا و ن + ن و ق + ق و م + م و ب = دو قائمہ زاویے۔



زاویوں کے متعلق دو اور کار آمد قاعدے متوازی خطوں کی مدد سے حاصل ہوتے ہیں۔ اگر ایک خط مستقیم لا ما پر دو نقطے ن اور ق لیے جائیں اور ن اور ق میں سے خطوط ن ا اور ق ب اس طرح کھینچے جائیں کہ ا ن لا = ب ق ن تو ظاہر ہے کہ خطوط ن ا اور ق ب کی ایک ہی سمت ہوگی۔ ایسے دو خط متوازی خط کہلاتے ہیں۔ یہ دو خط کسی دوری تک خارج کیے جائیں تو بھی ایک دوسرے کو قطع نہیں کریں گے۔ شکل سے یہ ظاہر ہے کہ اَ ن ق = ا ن لا



لیکن ا ن لا = ب ق ن

اس لیے اَ ن ق = ب ق ن

ان نتیجوں کے عکس بھی درست ہیں۔ یعنی اگر دو خط ا اَ اور ب بَ متوازی ہوں (یعنی ایک ہی مستوی میں ہوں اور ایک دوسرے کو قطع نہ کریں) اور انھیں ایک خط مستقیم لا ن ق ما کاٹے تو (۱) متبادل زاویے مساوی ہوں گے۔

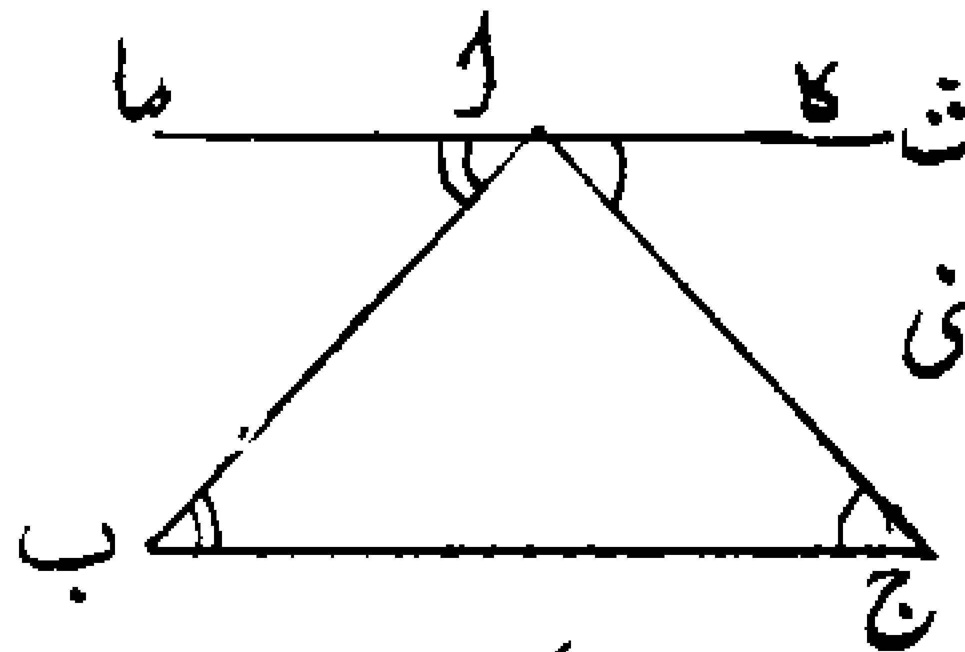
یعنی اَ ن ق = ن ق ب اور ا ن ق = ن ق بَ

(۲) نظیر کے زاویے مساوی ہوں گے۔

یعنی لا ن ا = ن ق ب اور لا ن اَ = ن ق بَ

اوپر کی شکل میں جو آٹھ زاویے ہیں اُن میں سے چار ایک دوسرے کے برابر ہیں اور بقیہ چار زاویے ایک دوسرے کے مساوی ہیں ۔

متوازی خطوں کے اِن قاعدوں سے کسی مثلث کے تین زاویوں کے مجموعے کے متعلق ایک کارآمد قاعدہ آسانی سے حاصل ہوتا ہے ۔

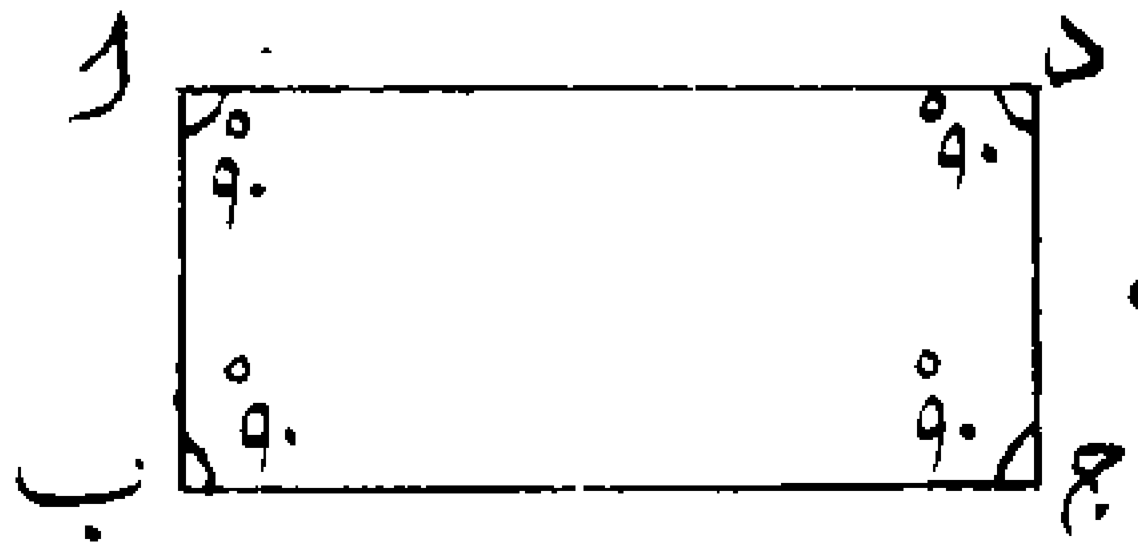


مثلث کے زاویوں کا قاعدہ ۔ کسی مثلث کے تین زاویوں کا مجموعہ دو قائمہ زاویوں یعنی (۱۸۰°) کے برابر ہوتا ہے ۔

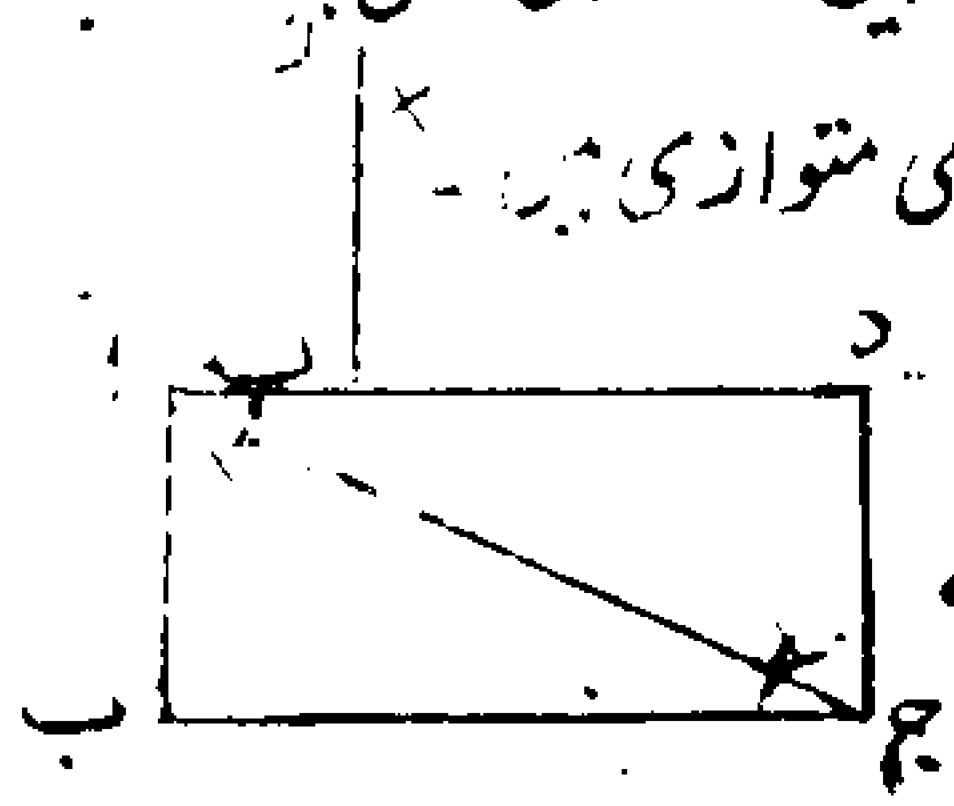
اگر مثلث ا ب ج کے راس ا میں سے ب ج کے متوازی خط کا ما کھینچا جائے تو شکل سے اوپر کا قاعدہ فوراً حاصل ہوتا ہے ۔

نوٹ ۔ مثلث کے لیے علامت △ استعمال کی جاتی ہے ۔

عمارتوں کی تعمیر میں ایک نہایت کارآمد شکل مستطیل ہے ۔ یہ وہ چار ضلعی شکل ہے جس کا ہر زاویہ قائمہ زاویے کے برابر ہے ۔ متوازی خطوں کے قاعدوں سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ



مستطیل کے مقابل کے ضلعے متوازی ہوتے ہیں ۔ ساتھ کی شکل میں ا ب اور ج د متوازی ہیں اور ب ج اور د ا بھی متوازی ہیں ۔



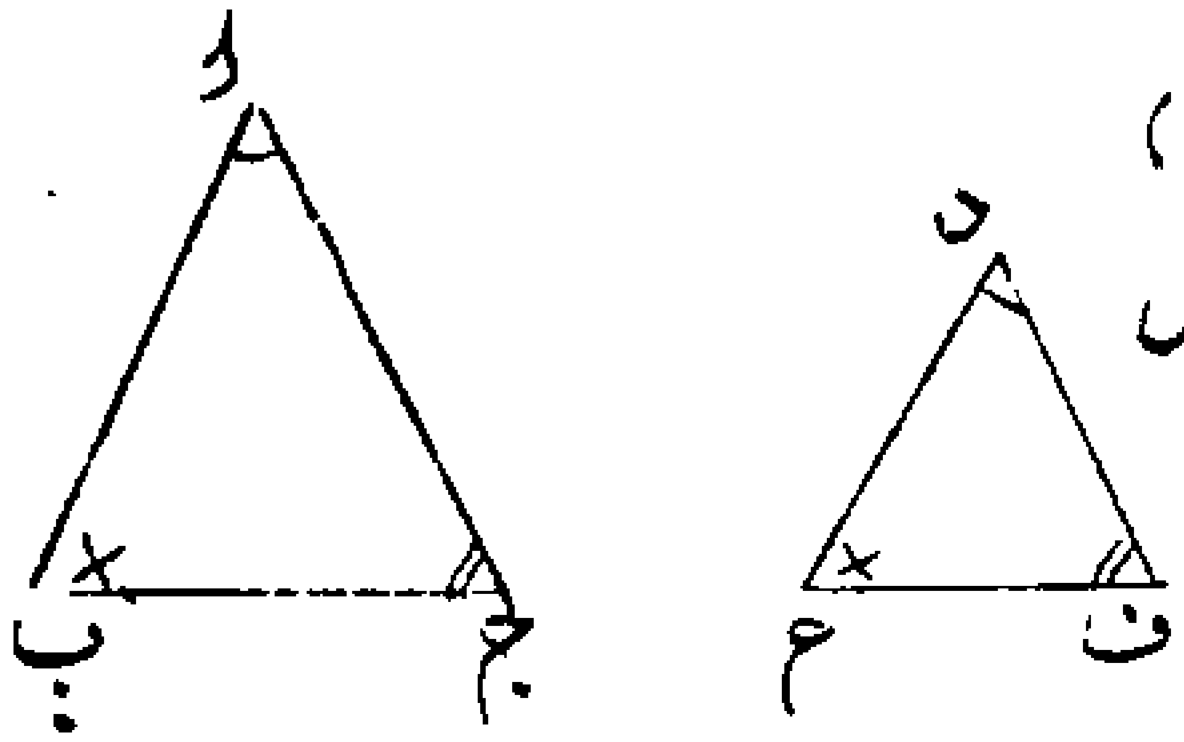
اگر مستطیل ا ب ج د کے راسوں ا اور ج کو ملایا جائے تو مثلثوں کے قاعدے (۳) کی مدد سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ۔

△ ا ب ج اور △ ج د ا آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں ۔

اسی لیے ا ب = ج د اور ب ج = د ا یعنی مستطیل کے مقابل

کے ضلعے مساوی ہوتے ہیں۔

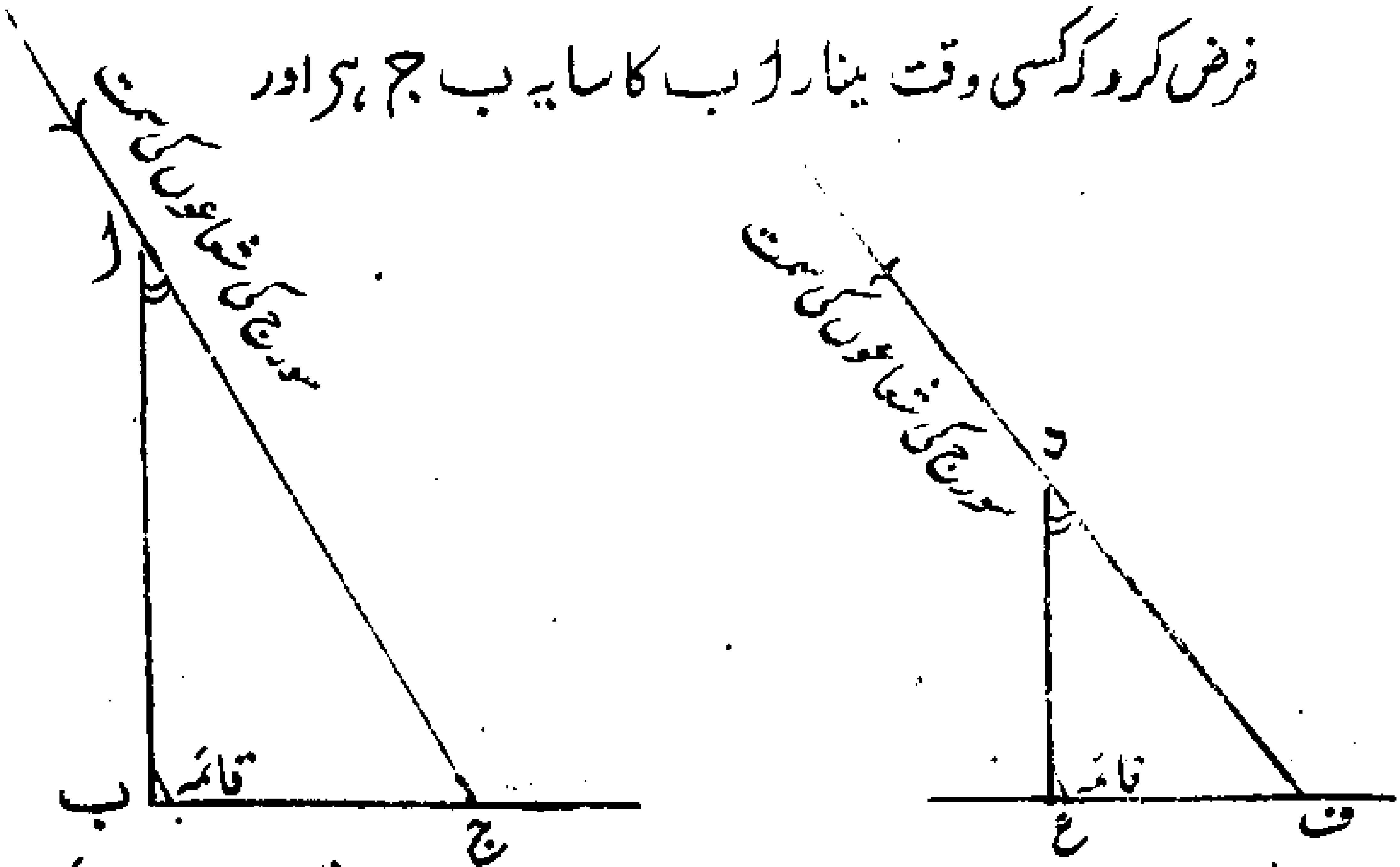
متشابہ مثلّث۔ اگر ∆ ا ب ج اور ∆ د ع ف ایسے ہوں کہ ایک مثلّث کے تین زاویے دوسرے مثلّث کے تین زاویوں کے جُدا جدا برابر ہوں تو شکل کھینچنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ یہ دونوں مثلّث متشابہ (یعنی ایک ہی شکل کے) ہوتے ہیں۔ ان مثلّثوں کے ضلعوں کو ناپ کر تصدیق کی جا سکتی ہے کہ نظیر کے ضلعے متناسب ہوتے ہیں۔



یعنی $\frac{\text{ا ب}}{\text{د ع}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ع ف}} = \frac{\text{ج ا}}{\text{ف د}}$

جیسا کہ اوپر بتایا جا چکا ہے۔ متشابہ مثلّثوں کی اس اہم اور کارآمد خاصیت سے طالیس واقف تھا اور اس نے اسی کی مدد سے مصر کے بڑے ہرم کی بلندی محسوب کی تھی۔ طالیس نے جو طریقہ اختیار کیا اس کی توضیح ذیل کی آسان مثال سے ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ کسی وقت مینار ا ب کا سایہ ب ج ہے اور



اسی وقت ایک سیدھی سلاخ د ع کا سایہ ع ف ہے۔ شکل سے ظاہر ہے کہ

مثلثات ا ب ج اور د ع ف متشابہ ہیں۔ اس لیے $\frac{\text{اب}}{\text{دع}} = \frac{\text{بج}}{\text{عف}}$

اب چوں کہ ب ج، د ع اور ع ف آسانی سے ناپے جا سکتے ہیں، اس لیے اوپر کے رشتے میں ان کی قیمتیں درج کرکے مینار ا ب کی بلندی محسوب کی جا سکتی ہے۔

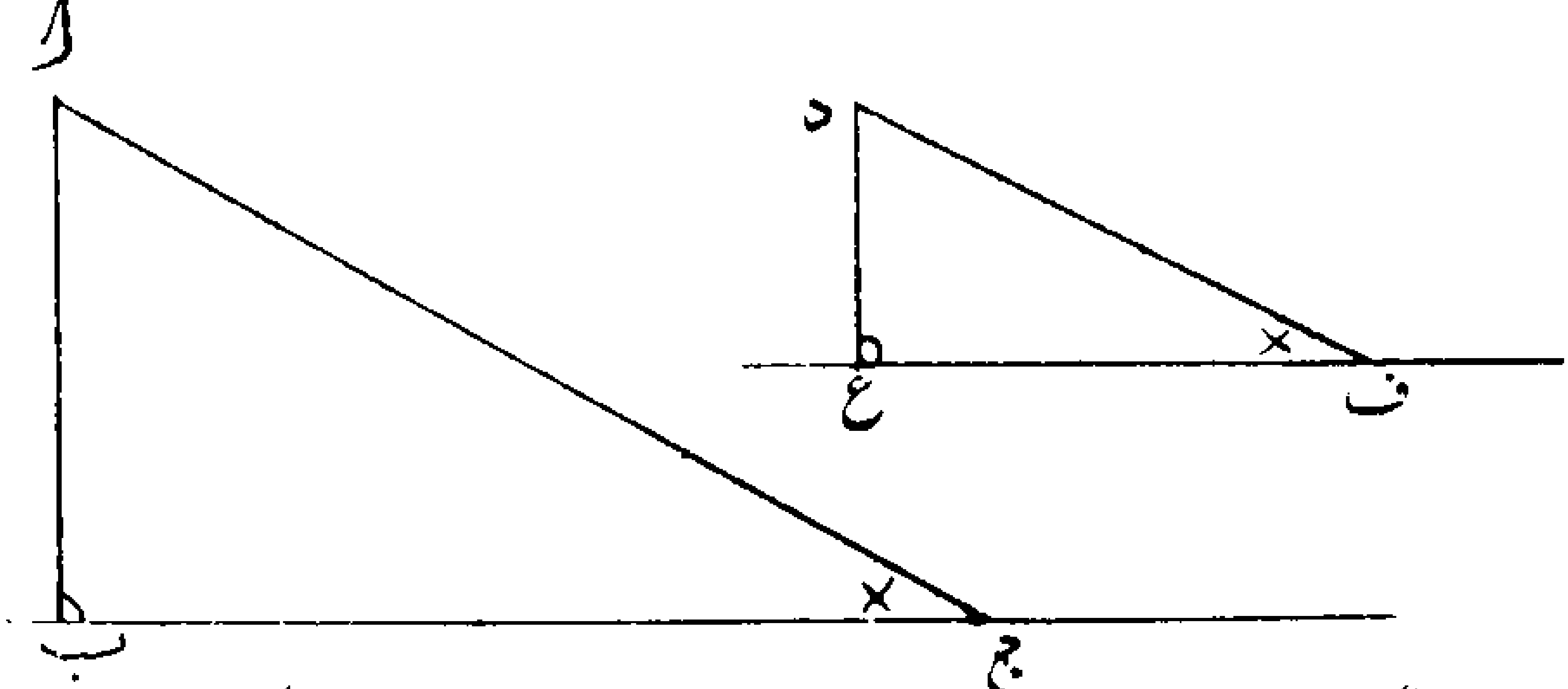
مثلاً اگر ب ج = ۹۰ فٹ، د ع = ۴ فٹ، ع ف = ۳ فٹ تو

$\frac{\text{اب}}{۴} = \frac{۹۰}{۳}$ اس لیے اب $= \frac{۹۰}{۳} \times ۴ = ۱۲۰$

پس معلوم ہوا کہ مینار ا ب کی بلندی (۱۲۰) فٹ ہے۔

سایے کے طول کی مدد سے بلندیاں معلوم کرنے کا یہ طریقہ ایسے مقاموں پر جہاں دن میں سورج اچھی طرح چمکتا ہے بہت مفید ثابت ہوتا ہے۔

اگر بادلوں کی وجہ سے سورج چھپا ہوا ہو یا رات کا وقت ہو اور ہمیں کسی مینار کی بلندی معلوم کرنی ہو تو ذیل کا طریقہ (جو متشابہ مثلثوں پر ہی مبنی ہے) اختیار کیا جا سکتا ہے۔



اگر افقی سطح پر ایک مینار ا ب واقع ہو تو افقی سطح کے کسی نقطہ ج پر زاویہ پیما (یعنی زاویے ناپنے کا آلہ مثلاً چاندہ) رکھ کر زاویہ ب جˆ ا ناپو۔ فرض کرو کہ ب ج = ۳۲°۔ نیز طول کے کسی پیمانے کی مدد سے فاصلہ ب ج ناپو۔ فرض کرو کہ ب ج = ۲۰۰ فٹ اب ایک △ د ع ف بناؤ

جو ا ب ج کے متشابہ ہو یعنی د ع ف = ا ب ج = قائمہ زاویہ اور ع فؔ د = ب جؔ ا = ۳۲°

مثلث د ع ف میں د ع اور ع ف کے طول ناپو۔

چوں کہ △ ا ب ج متشابہ ہے △ د ع ف کے

اس لیے $\frac{\text{ا ب}}{\text{د ع}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ع ف}}$ یعنی $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب ج}} = \frac{\text{د ع}}{\text{ع ف}}$

چوں کہ د ع اور ع ف کے طول ناپے گئے ہیں اس لیے $\frac{\text{د ع}}{\text{ع ف}}$ کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے۔ فرض کرو کہ د ع = ۷ر۵″ اور ع ف = ۱۲″

تب $\frac{\text{د ع}}{\text{ع ف}} = \frac{۷ر۵}{۱۲}$

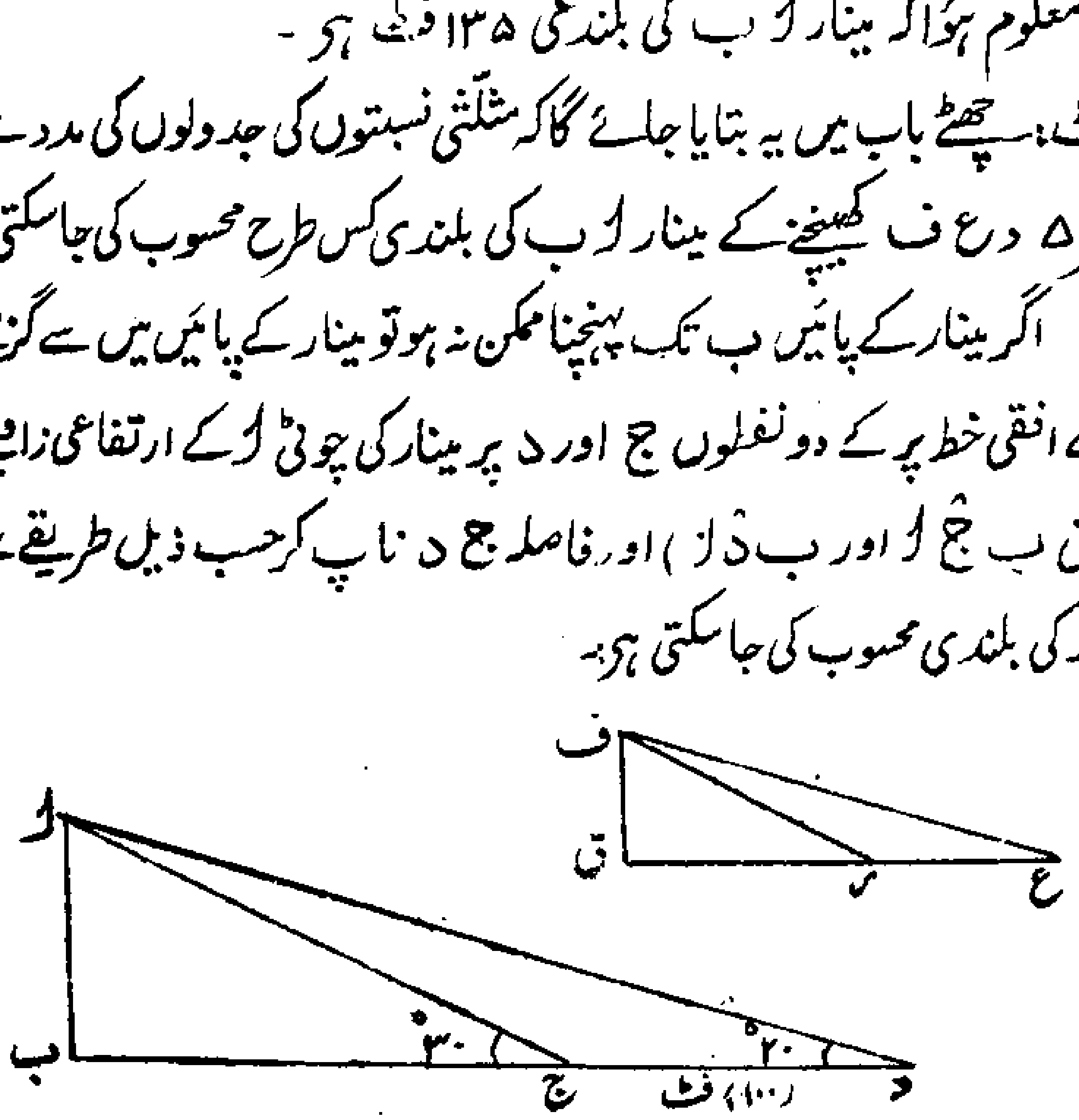
$\therefore \frac{\text{ا ب}}{۲۰۰} = \frac{۷ر۵}{۱۲}$

$\therefore \text{ا ب} = \frac{۷ر۵ \times ۲۰۰}{۱۲} = ۱۳۵$

پس معلوم ہوا کہ مینار ا ب کی بلندی ۱۳۵ فٹ ہے۔

نوٹ:- چھٹے باب میں یہ بتایا جائے گا کہ مثلثی نسبتوں کی جدولوں کی مدد سے بغیر △ د ع ف کھینچنے کے مینار ا ب کی بلندی کس طرح محسوب کی جا سکتی ہے۔

اگر مینار کے پائیں ب تک پہنچنا ممکن نہ ہو تو مینار کے پائیں میں سے گزرنے والے افقی خط پر کے دو نقطوں ج اور د پر مینار کی چوٹی ا کے ارتفاعی زاویے (یعنی ب جؔ ا اور ب دؔ ا) اور فاصلہ ج د ناپ کر حسب ذیل طریقے سے مینار کی بلندی محسوب کی جا سکتی ہے۔



فرض کرو کہ ب جؔ ا = ۳۰°، ب دؔ ا = ۲۰° اور ب ج = (۱۰۰) فٹ

ایک △ ف ر ع بناؤ جو △ ا ج د کے متشابہ ہو۔

یعنی ف ع ر = ا د ب = ۲۰°

اور ف ر ع = ا جؔ د = (۱۸۰° - ۳۰°) = ۱۵۰°

ع ر کو خارج کرکے اس پر ف سے عمود ف ق نکالو۔

(اس غرض کے لیے یہ کافی ہو کہ چاندہ کی مدد سے ر ف ق = ۹۰° - ۳۰° = ۶۰° بنایا جائے)

اب شکل سے حاصل ہوتا ہو کہ △ ا ب ج متشابہ ہو △ ف ق ر کے اور △ ا ج د متشابہ ہو △ ف ر ع کے۔

اس لیے $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا ج}} = \frac{\text{ف ق}}{\text{ف ر}}$ اور $\frac{\text{ا ج}}{\text{ج د}} = \frac{\text{ف ر}}{\text{ع ر}}$

$\therefore \frac{\text{ا ب}}{\text{ا ج}} \times \frac{\text{ا ج}}{\text{ج د}} = \frac{\text{ف ق}}{\text{ف ر}} \times \frac{\text{ف ر}}{\text{ع ر}}$

یعنی $\frac{\text{ا ب}}{\text{ج د}} = \frac{\text{ف ق}}{\text{ع ر}}$

ف ق اور ر ع کو ناپ کر $\frac{\text{ف ق}}{\text{ر ع}}$ کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہو۔

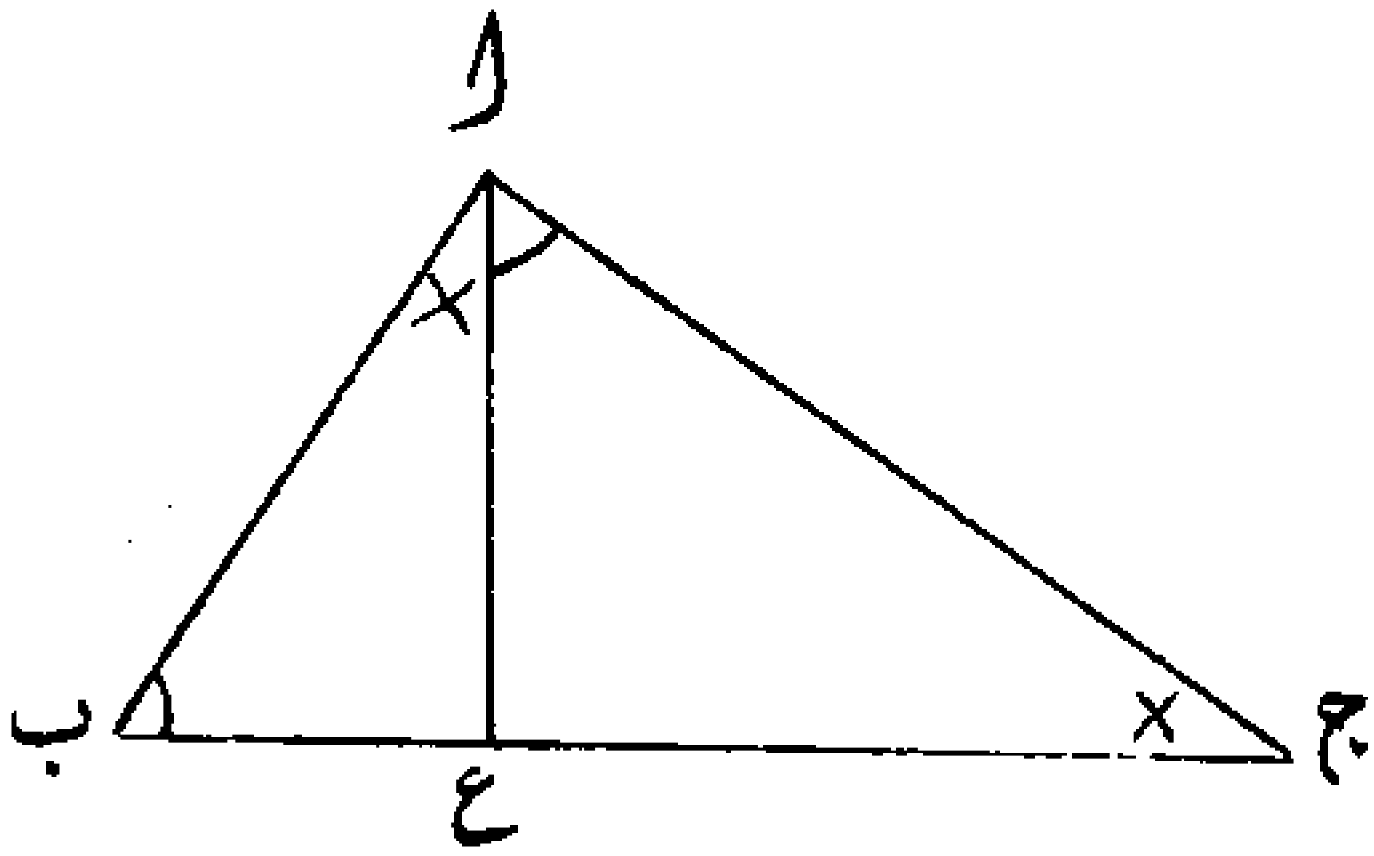
مثلاً اگر ف ق = ۹٫۵" اور ر ع = ۱۰ تو $\frac{\text{ف ق}}{\text{ر ع}} = \frac{۹٫۵}{۱۰} = \frac{۹۵}{۱۰۰} = \frac{۱۹}{۲۰}$

تب $\frac{\text{ا ب}}{\text{ج د}} = \frac{۱۹}{۲۰}$ اس لیے ا ب = ج د × $\frac{۱۹}{۲۰}$

= ($۱۰۰ \times \frac{۱۹}{۲۰}$) فٹ

= ۹۵ فٹ

فیثاغورث کا مسئلہ۔ قائم الزاویہ مثلث کی ایک اہم خاصیت (جس کو فیثاغورث کا مسئلہ کہتے ہیں) متشابہ مثلثوں کی مدد سے آسانی سے حاصل ہوتی ہو۔



فرض کرو کہ △ ا ب ج میں زاویہ ب ا ج قائمہ زاویہ کے مساوی ہی۔
ا سے ب ج پر عمود ا ع نکالو۔

تب △ ا ب ع اور △ ج ب ا متشابہ ہوں گے کیوں کہ △ ا ب ع کے زاویے ترتیب وار △ ج ب ا کے زاویوں کے جُدا جُدا برابر ہیں۔

اس لیے $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب ج}} = \frac{\text{ب ع}}{\text{ا ب}}$

اس لیے ا ب^2 = ب ج × ب ع ——— (۱)

اسی طرح چوں کہ △ ج ع ا اور △ ج ا ب متشابہ ہیں، اس لیے حاصل ہوتا ہی کہ:

ا ج^2 = ب ج × ع ج ——— (۲)

نتیجوں (۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہی کہ:

ا ب^2 + ا ج^2 = ب ج × ب ع + ب ج × ع ج

= ب ج (ب ع + ع ج)

= ب ج × ب ج

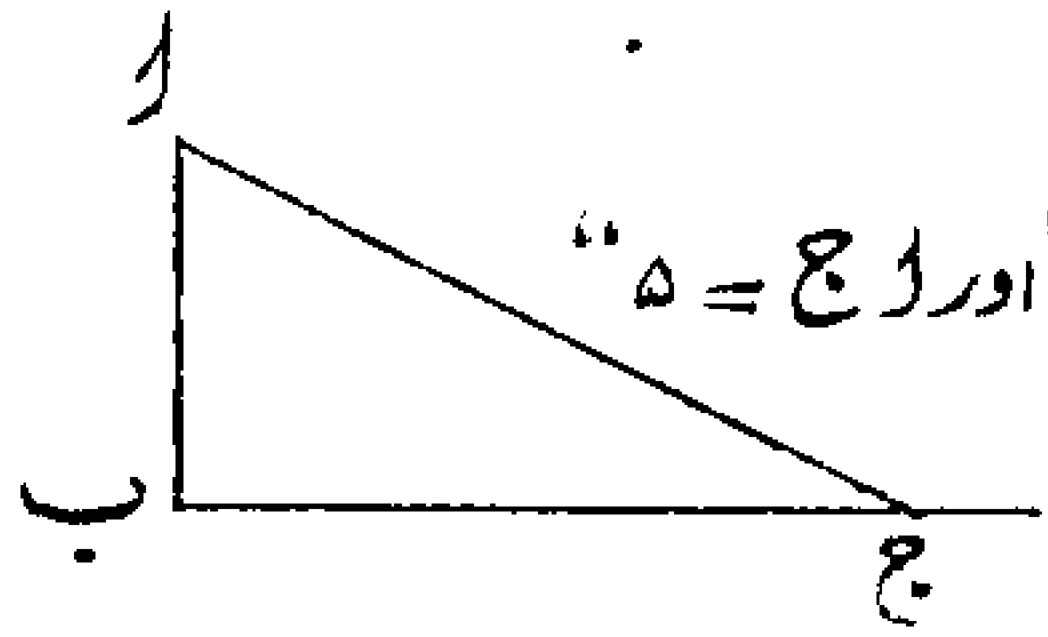
= ب ج^2

پس ثابت ہوا کہ قائم الزاویہ مثلث میں زاویہ قائمہ کے گرد کے ضلعوں کے مربعوں کا مجموعہ وتر (یعنی قائمہ زاویہ کے مقابل کے ضلعے) پر کے

مربع کے مساوی ہوتا ہے۔

نوٹ۔ قدیم چینی کتابوں سے یہ پتا چلتا ہے کہ فیثاغورث سے بہت پہلے چینی ریاضی داں اس مسئلے سے واقف تھے۔

فیثاغورث کے مسئلے کی مدد سے (۱) قائم الزاویہ مثلث کے وتر کا طول معلوم کیا جا سکتا ہے کہ اگر قائمہ زاویہ کے گرد کے ضلعے معلوم ہوں (۲) ایک ضلع محسوب کیا جا سکتا ہے اگر وتر اور دوسرا ضلع معلوم ہو۔



مثال (۱) اگر $\triangle$ ا ب ج میں

$\angle$ ا ب ج $= 90^\circ$ اور ا ب = ۳" اور ا ج = ۵"

تو ا ج^2 = ا ب^2 + ب ج^2

یعنی (۵)^2 = (۳)^2 + (ب ج)^2

یعنی (ب ج)^2 = ۲۵ − ۹ = ۱۶

$\therefore$ ب ج = ۴"

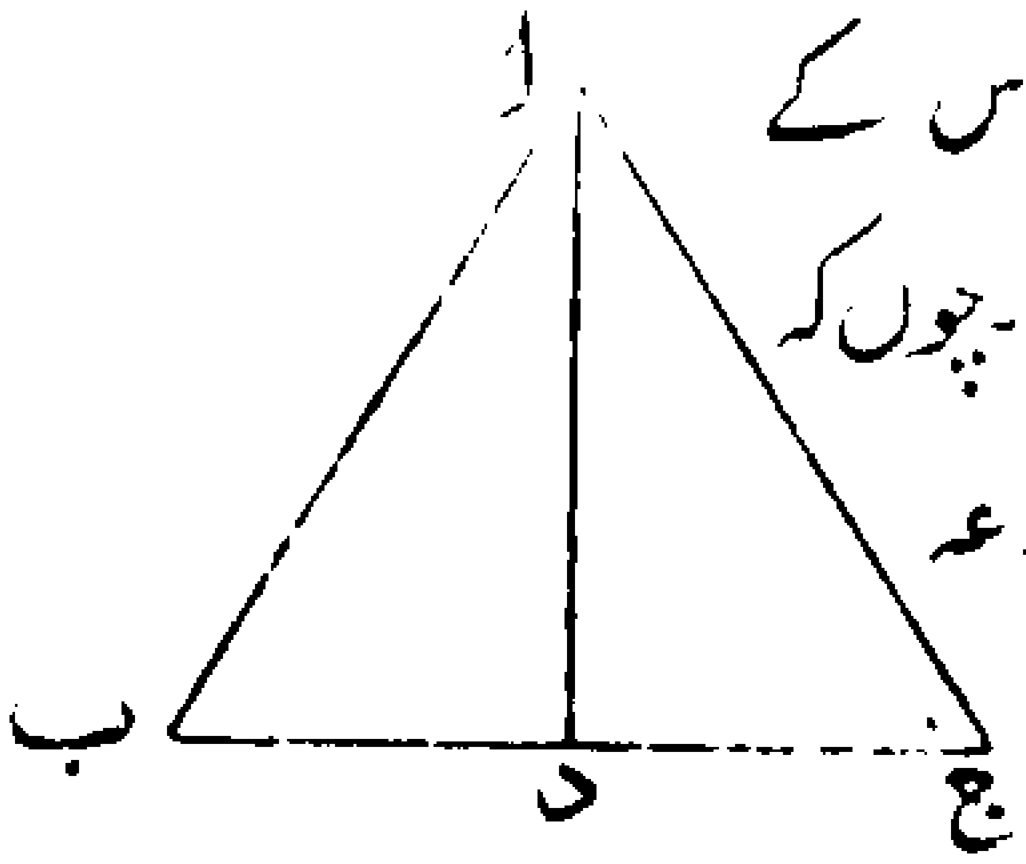
مثال (۲) اگر $\triangle$ ا ب ج میں $\angle$ ا ب ج $= 90^\circ$ اور ا ب = ب ج

تو ا ج^2 = ا ب^2 + ب ج^2 = ا ب^2 + ا ب^2 = ۲ (ا ب)^2

$\therefore$ ا ج = ا ب $\times \sqrt{۲}$

یعنی ا ب = $\dfrac{\text{ا ج}}{\sqrt{۲}}$

مثال (۳) اگر $\triangle$ ا ب ج مساوی الاضلاع ہو (یعنی اس کے تینوں ضلع مساوی ہوں) تو ظاہر ہے کہ اس کے تینوں زاویے بھی مساوی ہوں گے۔ چوں کہ کسی مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ (۱۸۰°) ہوتا ہے اس لیے مثلث



مساوی الاضلاع کا ہر زاویہ = ۶۰° اب فرض کرو کہ ب ج کا وسطی نقطہ د ہے۔ ا د کو ملاؤ۔ مثلثوں کے قاعدے (۳) سے حاصل ہوتا ہے کہ △ ا د ب اور △ ا د ج آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں۔ اس لیے د اَ ب = د اَ ج = ۳۰° اور ا دَ ب = ا دَ ج = ۹۰° اور ب د = ج د = ½ ب ج = ½ ا ب یعنی قائم الزاویہ مثلث ا د ب میں ب اَ د = ۳۰° اور اس زاویے کے مقابل کے ضلع ب د کا طول وتر ا ب کے طول کا نصف ہے۔

اس لیے فیثاغورث کے مسئلے کی رو سے $(\text{اب})^2 = (\text{اد})^2 + (\text{بد})^2$

یعنی $(\text{اب})^2 = (\text{اد})^2 + \left(\frac{\text{اب}}{2}\right)^2$

یعنی $(\text{اد})^2 = (\text{اب})^2 - \frac{(\text{اب})^2}{4} = \frac{3}{4} \times (\text{اب})^2$

$$\therefore \text{اد} = \sqrt{\frac{3}{4}}\,\text{اب}$$

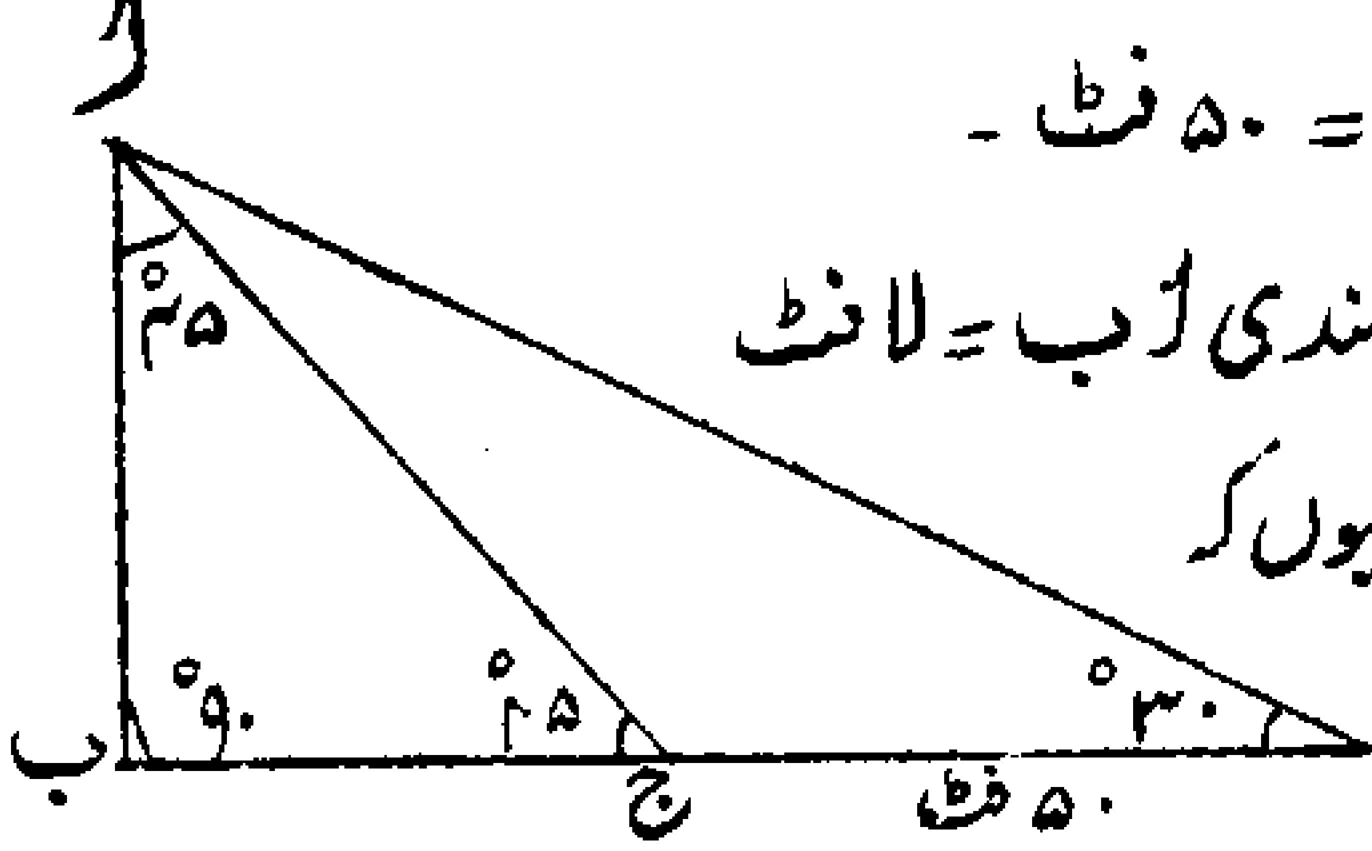
یعنی اگر قائم الزاویہ مثلث کا ایک حادّہ زاویہ ۳۰° ہو (اور اس لیے دوسرا حادّہ زاویہ ۶۰° ہو) تو وتر کا طول، ۳۰° کے زاویے کے مقابل کے ضلع کا طول اور ۶۰° کے زاویے کے مقابل کے ضلع کا طول ۲، ۱ اور $\sqrt{3}$ کے تناسب ہوں گے۔

اوپر کے نتیجوں کی مدد سے بغیر شکل کھینچے کے بلندیوں کے متعلق سوال حل کیے جا سکتے ہیں بہ شرطے کہ سوال کا حل ایسے قائم الزاویہ مثلثوں پر منحصر ہو جن میں ایک حادّہ زاویہ ۴۵° یا ۳۰° یا ۶۰° کا ہو۔

مثال۔ فرض کرو کہ ہمیں ایک چٹان کی بلندی ا ب معلوم کرنی ہے جب کہ چٹان کے پائیں ب تک جانے کی اجازت نہ ہو۔

چٹان کے پائیں ب میں سے گزرنے والے افقی خط پر دو نقطے ج اور د ایسے معلوم کرو کہ ج سے چٹان کی چوٹی ا کا زاویہ ارتفاع

= 45° اور د سے ا کا زاویۂ ارتفاع = 30°۔



نیز فرض کرو کہ ج د = ۵۰ فٹ۔

فرض کرو کہ چٹان کی بلندی ا ب = لا فٹ

تب ب ج = لا کیوں کہ

قائم الزاویہ مثلث

ا ب ج میں ب ج ا = ب ا ج = 45°)

نیز قائم الزاویہ $\triangle$ ا ب د میں ا د ب = 30°۔

اس لیے $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب د}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ یعنی ب د = ا ب $\sqrt{3}$ = $\sqrt{3}$ لا فٹ

لیکن ب د = ب ج + ج د = (لا + ۵۰) فٹ۔

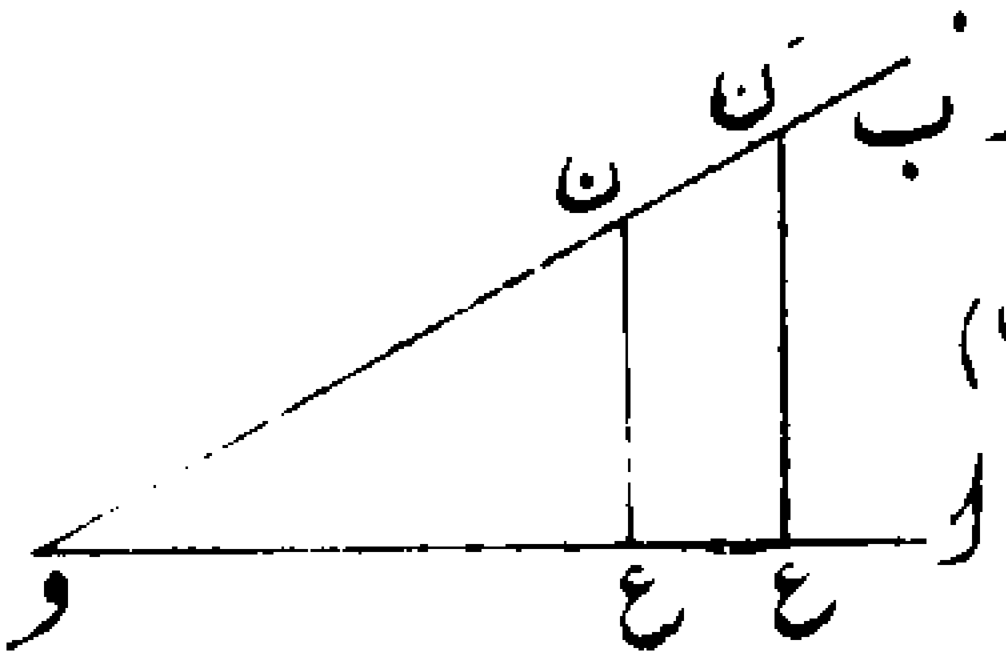
$\therefore$ $\sqrt{3}$ لا = لا + ۵۰

$\therefore$ لا ($\sqrt{3}-1$) = ۵۰

$\therefore$ لا = + $\frac{50}{\sqrt{3}-1}$ = ۶۸ تقریباً [$\sqrt{3}$ = ۲، را تقریباً لینے سے]

پس معلوم ہوا کہ چٹان کی بلندی = ۶۸ فٹ۔

متشابہ مثلثوں کی خاصیت کی مدد سے زاویوں کی مثلثی نسبتوں کی تعریف کی جاتی ہے اور مثلثی نسبتوں کے باہمی رشتے حاصل کیے جاتے ہیں۔



فرض کرو کہ ا و ب ایک زاویہ ہے۔ اس زاویے کی کسی ایک ساق (مثلاً و ب) پر کے کسی نقطہ ن سے دوسری ساق (و ا) پر عمود ن ع نکالو۔

تب $\frac{\text{ع ن}}{\text{و ن}}$ کی قیمت زاویہ ا و ب کی جیب کہلاتی ہے۔

اب یہ بتانا ضروری ہے کہ ا و ب کی جیب نقطہ ن کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔

و ب پر کے کسی دوسرے نقطہ نَ سے و ا پر عمود نَ عَ نکالو تب متشابہ مثلثوں عَ نَ و اور ع ن و سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{عَ نَ}}{\text{و نَ}} = \frac{\text{ع ن}}{\text{و ن}}$$

یعنی ا و ب کی جیب کی قیمت نقطہ ن کے مقام پر منحصر نہیں ہے [اختصار کی غرض سے ا و ب کی جیب کو علامت جب (ا و ب) سے تعبیر کیا جاتا ہے] اوپر کی شکل میں $\frac{\text{و ع}}{\text{ع ن}}$ کو زاویہ ا و ب کی جیب التمام کہتے ہیں اور اس کی علامت جم (ا و ب) سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ متشابہ مثلثوں کی مدد سے آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ جم (ا و ب) بھی نقطہ ن کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔

نیز $\frac{\text{ع ن}}{\text{و ع}}$ کو زاویہ ا و ب کا مماس کہتے ہیں اور اس کی علامت مس (ا و ب) سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ مس (ا و ب) کی قیمت بھی صرف زاویہ ا و ب پر منحصر ہوتی ہے نہ کہ نقطہ ن کے مقام پر۔ یہ بھی ظاہر ہے کہ مس (ا و ب) $= \frac{\text{ع ن}}{\text{و ع}} = \frac{\frac{\text{ع ن}}{\text{و ن}}}{\frac{\text{و ع}}{\text{و ن}}} = \frac{\text{جب (ا و ب)}}{\text{جم (ا و ب)}}$ یعنی کسی زاویے کا مماس اس زاویے کی جیب اور جیب التمام کی نسبت کے مساوی ہوتا ہے۔

نیز چونکہ قائم الزاویہ △ ن ع و میں

$$\text{ع ن}^2 + \text{و ع}^2 = \text{و ن}^2$$

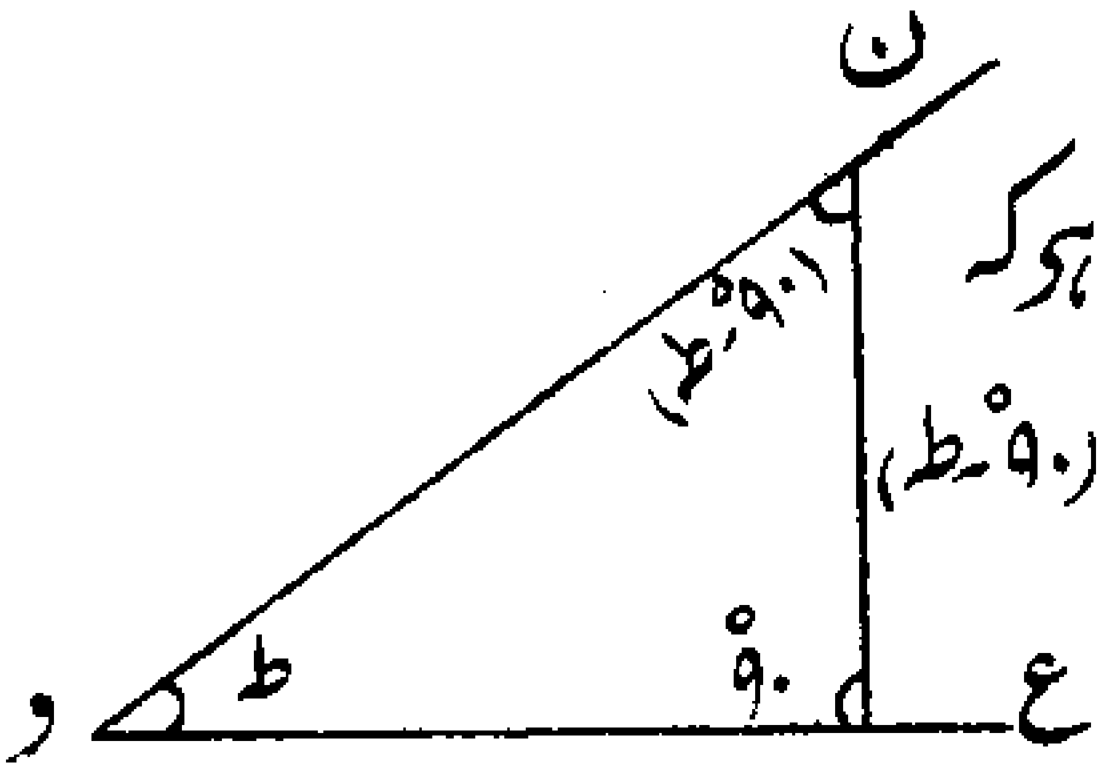
اس لیے $\left(\frac{\text{ع ن}}{\text{و ن}}\right)^2 + \left(\frac{\text{و ع}}{\text{و ن}}\right)^2 = 1$

یعنی $[\text{جب (ا و ب)}]^2 + [\text{جم ا و ب}]^2 = 1$

اس نتیجے کو مختصر طور پر اس طرح لکھا جاتا ہے:-

$$\text{جب}^2\ \text{(ا و ب)} + \text{جم}^2\ \text{(ا و ب)} = 1$$

پس معلوم ہوا کہ کسی زاویے کی جیب اور جیب التمام کے مربعوں کا مجموعہ ایک کے مساوی ہوتا ہے۔ اس نتیجے کی مدد سے اگر کسی زاویے کی جیب معلوم ہو تو جیب التمام معلوم کی جا سکتی ہے اور اگر جیب التمام معلوم ہو تو جیب معلوم کی جا سکتی ہے۔ مثلاً اگر کسی زاویہ طہ کی جیب $\frac{4}{5}$ ہو تو $\text{جم}^2\ \text{طہ} = 1 - \text{جب}^2\ \text{طہ} = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$

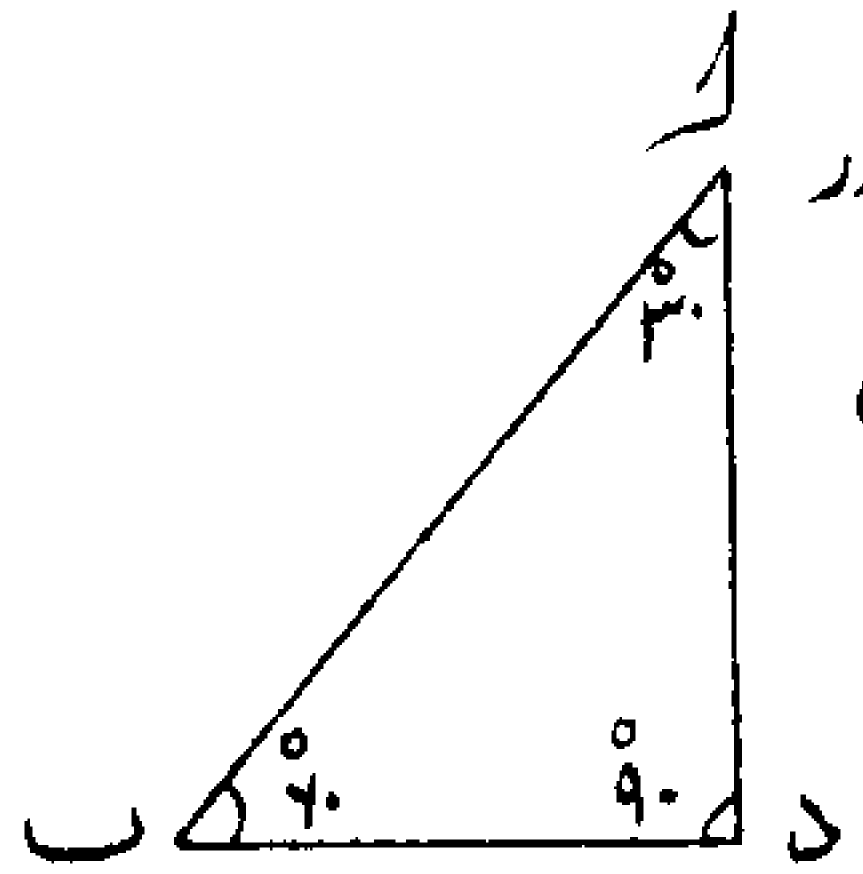


اس لیے جم ط = $\frac{۳}{۵}$ ۔

ساتھ کی شکل سے یہ بھی ظاہر ہوتا ہو کہ

جب ط = جم (۹۰° - ط) اور جم ط = جب (۹۰° - ط)

ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر قائم الزاویہ مثلث کا ایک حادّہ زاویہ ۳۰° ہو وتر کا طوُل، ۳۰° کے زاویے کے مقابل کے ضلعے کا طوُل اور ۶۰° کے زاویے کے مقابل کے ضلعے کا طول میں ۲، ۱ اور $\sqrt{۳}$ کے متناسب ہوتے ہیں ۔



اس نتیجے سے حاصل ہوتا ہو کہ

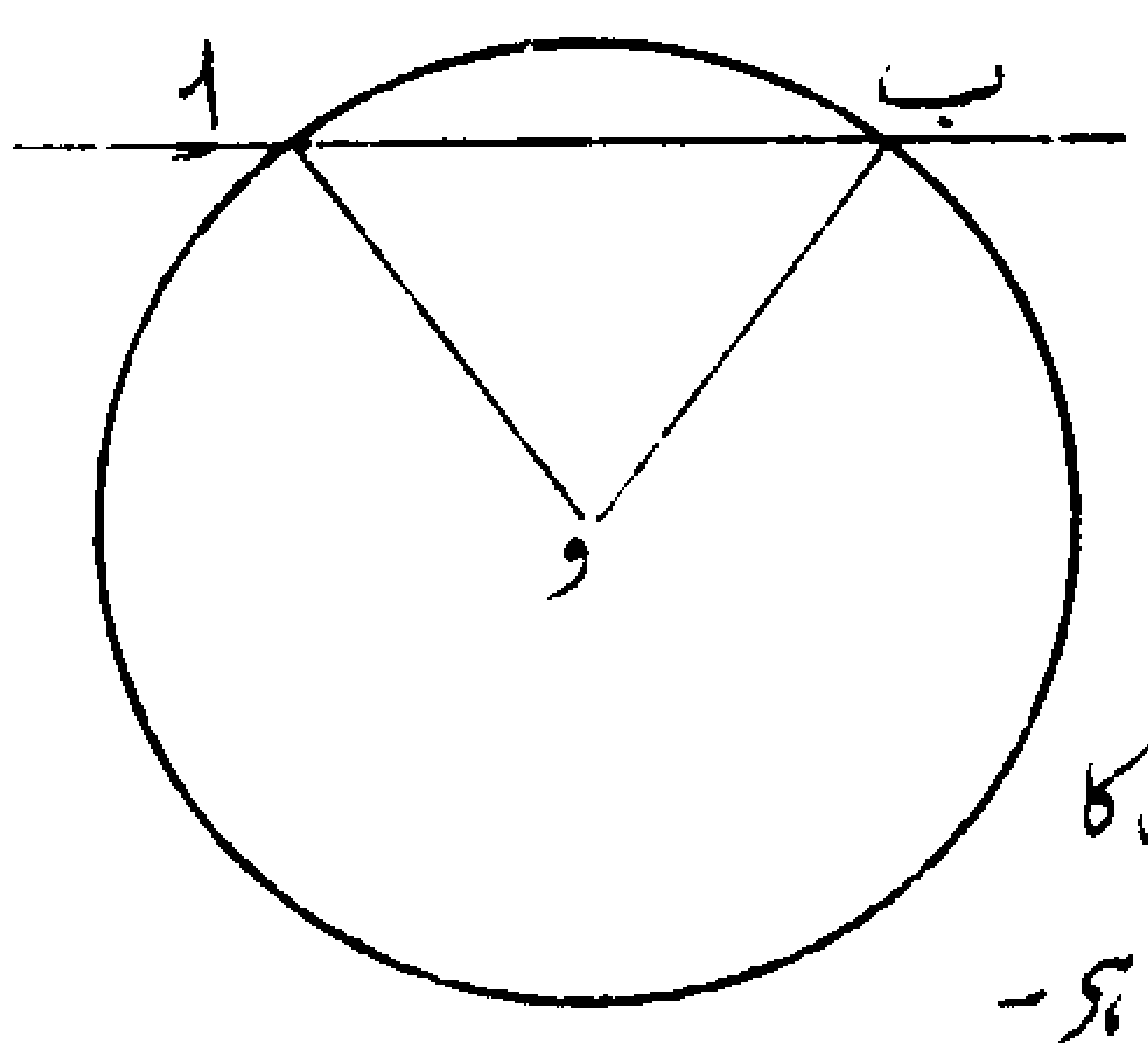
جب ۳۰° = $\frac{۱}{۲}$ ؛ جم ۳۰° = $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ ؛ مس ۳۰° = $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ جب ۶۰° = $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ ؛

جم ۶۰° = $\frac{۱}{۲}$ ؛ مس ۶۰° = $\sqrt{\frac{۳}{۱}}$

نوٹ ۔ چھٹے باب میں یہ بتایا جائے گا کہ مثلثی نسبتوں سے پیمایش میں کس طرح فائدہ اٹھایا جاسکتا ہو۔

دائرے کے مماس ۔ مماس کی ایک اہم خاصیت ۔

اگر دائرے کا مرکز و ہو اور دائرے پر دو نقطے ا اور ب ہوں تو



∆ و ا ب میں و ا = و ب

اس لیے تشاکل سے ظاہر ہو کہ

و ا̂ ب = و ب̂ ا

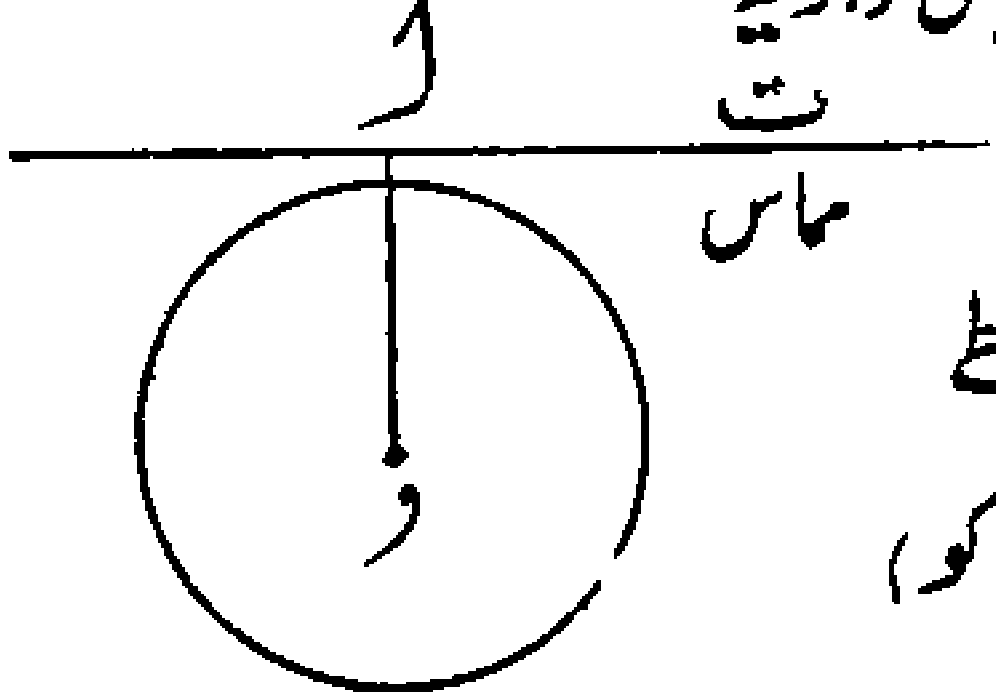
فرض کرو کہ و ا̂ ب = لا°

چوں کہ مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ (۱۸۰°) کے مساوی ہوتا ہو۔

اس لیے ∠ ا و ب + لا° + لا° = ۱۸۰°

اس لیے لا° = $\frac{۱۸۰° - ∠ ا و ب}{۲}$ = ۹۰° - $\frac{∠ ا و ب}{۲}$

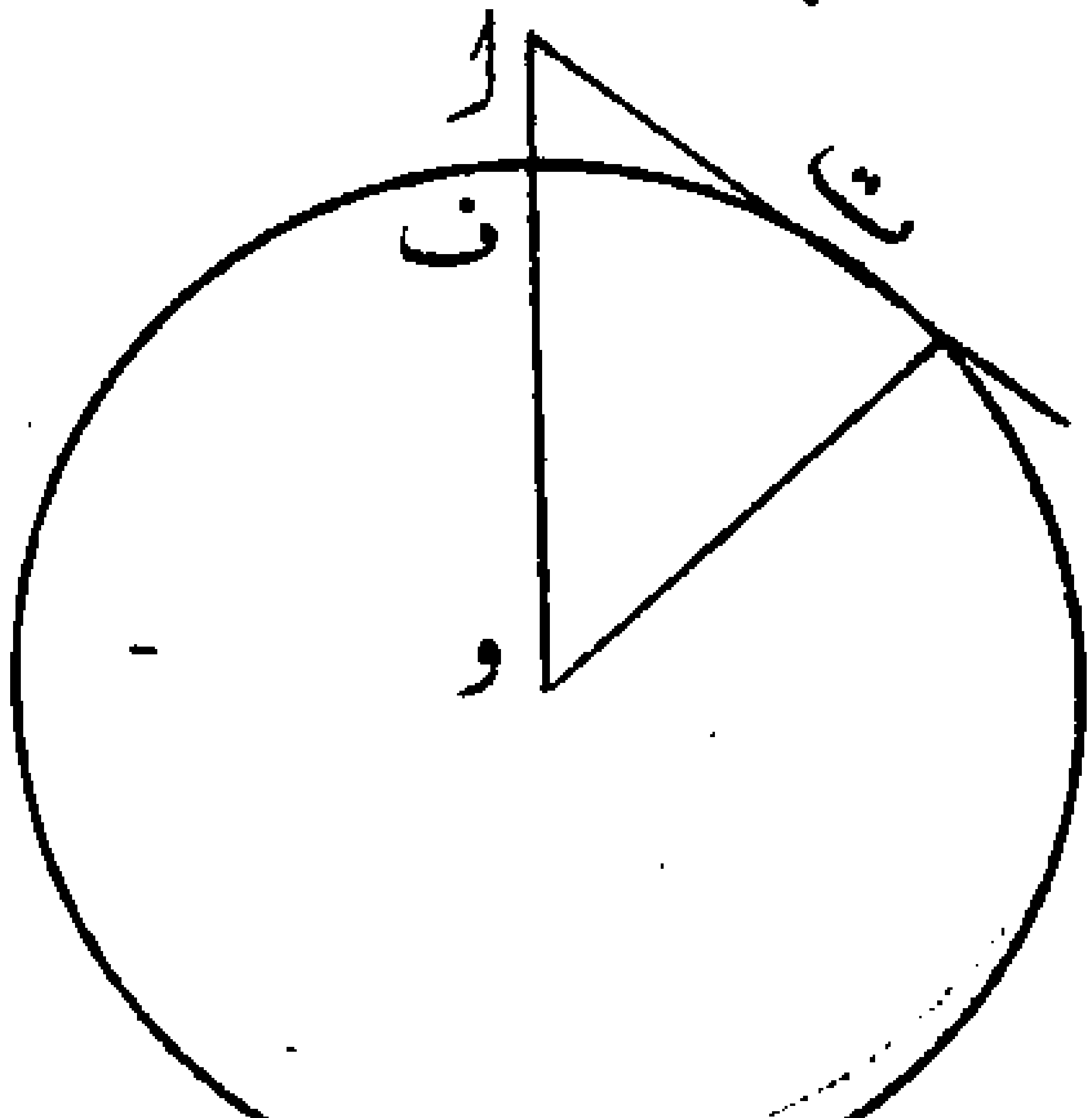
اب اگر نقطہ ب نقطہ ا کے بہت قریب آجائے تو ا اور ب میں سے گزرنے والے خط کا انتہائی مقام دائرے کے نقطے ا پر کا مماس کہلاتا ہے۔ اس انتہائی مقام میں ∠ ا و ب = صفر۔ اس لیے ا ب کے انتہائی مقام (یعنی ا پر کے مماس) اور ا و کا درمیانی زاویہ



= ۹۰° - $\frac{صفر}{۲}$ = ۹۰°

پس معلوم ہوا کہ دائرے کے کسی نقطے پر کا مماس اُس نقطے کو (یعنی نقطہ تماس کو) مرکز سے ملانے والے خط پر عمود دار ہوتا ہے۔

دائرے کے مماس کی اس خاصیت اور فیثاغورث کے مسئلے کی مدد سے ہم افق کی دوری کے متعلق ایک نہایت دلچسپ سوال حل کرسکتے ہیں۔ فرض کرو کہ ایک شخص ہموار سطح پر کھڑا ہوا ہے اور اس کی آنکھ سطح سمندر سے بلندی (ھ) پر ہے۔ یہ شخص زمین کی سطح پر دور سے دور کا جو نقطہ دیکھ سکتا ہے وہ اس مماس کا نقطہ تماس ہے جو اس کی آنکھ سے کرۂ زمین تک کھینچا جائے۔



فرض کرو کہ آنکھ ا سے کرۂ زمین تک کھینچے ہوئے مماس کا نقطہ تماس ت ہے۔ فرض کرو کہ ا کو زمین کے مرکز

و سے ملانے والا خط کرۂ زمین کو ف پر کاٹتا ہے۔ فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر ر ہے۔ قائم الزاویہ △ و ت ل میں

(و ل)² = (و ت)² + (ل ت)²

یعنی (ر + ھ)² = ر² + (ل ت)²

یعنی ر² + ۲ ر ھ + ھ² = ر² + (ل ت)²

یعنی (ل ت)² = ۲ ر ھ + ھ²

اس لیے ل ت = √(۲ ر ھ + ھ²)

اگر زمین کے نصف قطر ر کی قیمت (۴۰۰۰) میل لی جائے اور سطح سمندر سے آنکھ کی بلندی ھ = ۱/۸۰ میل ہو تو ل ت = √(۲ × ۴۰۰۰ × ۱/۸۰ + (۱/۸۰)²) میل

= √(۱۰۰ + (۱/۸۰)²) میل

چوں کہ جذر کی علامت کے اندر کی پہلی رقم کے مقابلے میں (۱/۸۰)² چھوٹا ہے اس لیے (۱/۸۰)² کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

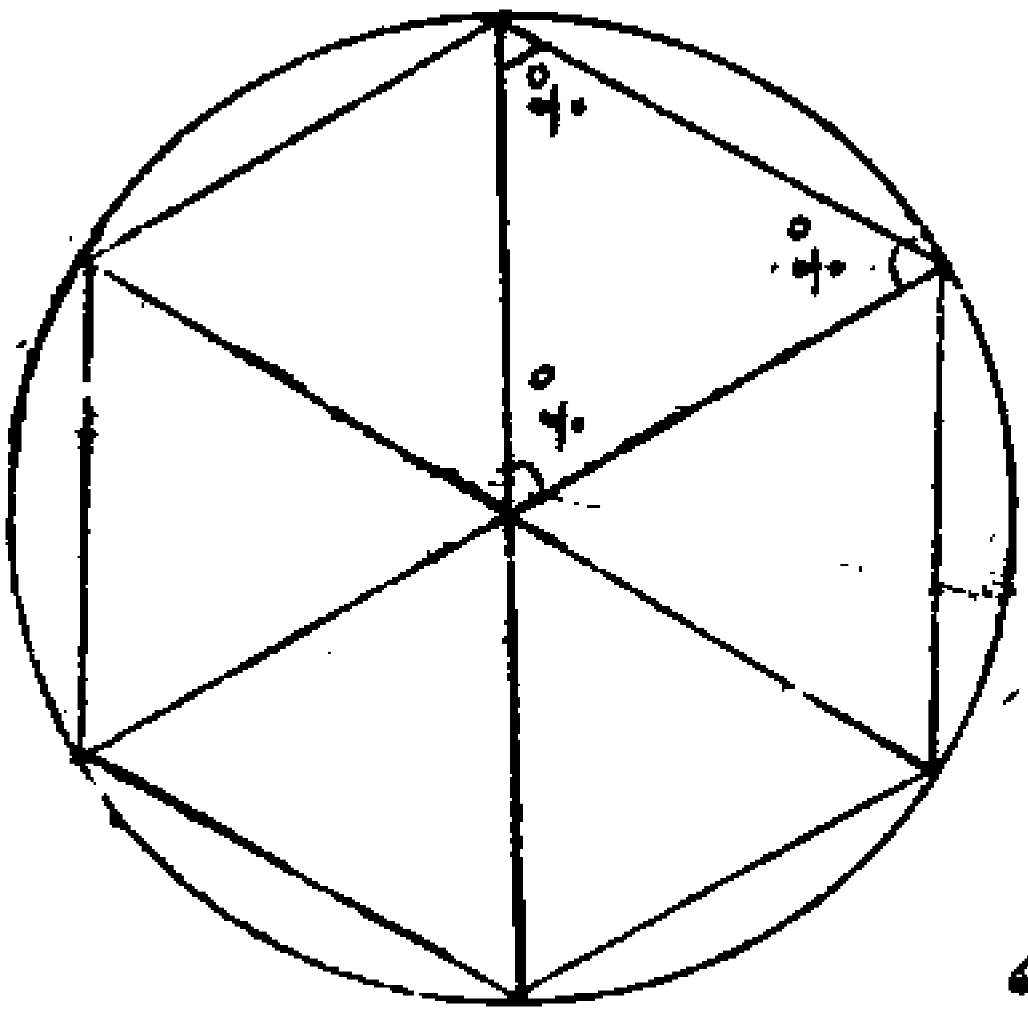
اس لیے ل ت = √۱۰۰ میل تقریباً = ۱۰ میل تقریباً

پس معلوم ہوا کہ ایک شخص جس کی آنکھ سطح سمندر سے (۱/۸۰) میل یعنی (۶۶) فٹ کی بلندی پر ہو زمین کی سطح پر ۱۰ میل تک دیکھ سکتا ہے۔ اس نتیجے کو اس طرح بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ اس شخص کے لیے افق کی دوری (۱۰) میل ہے۔

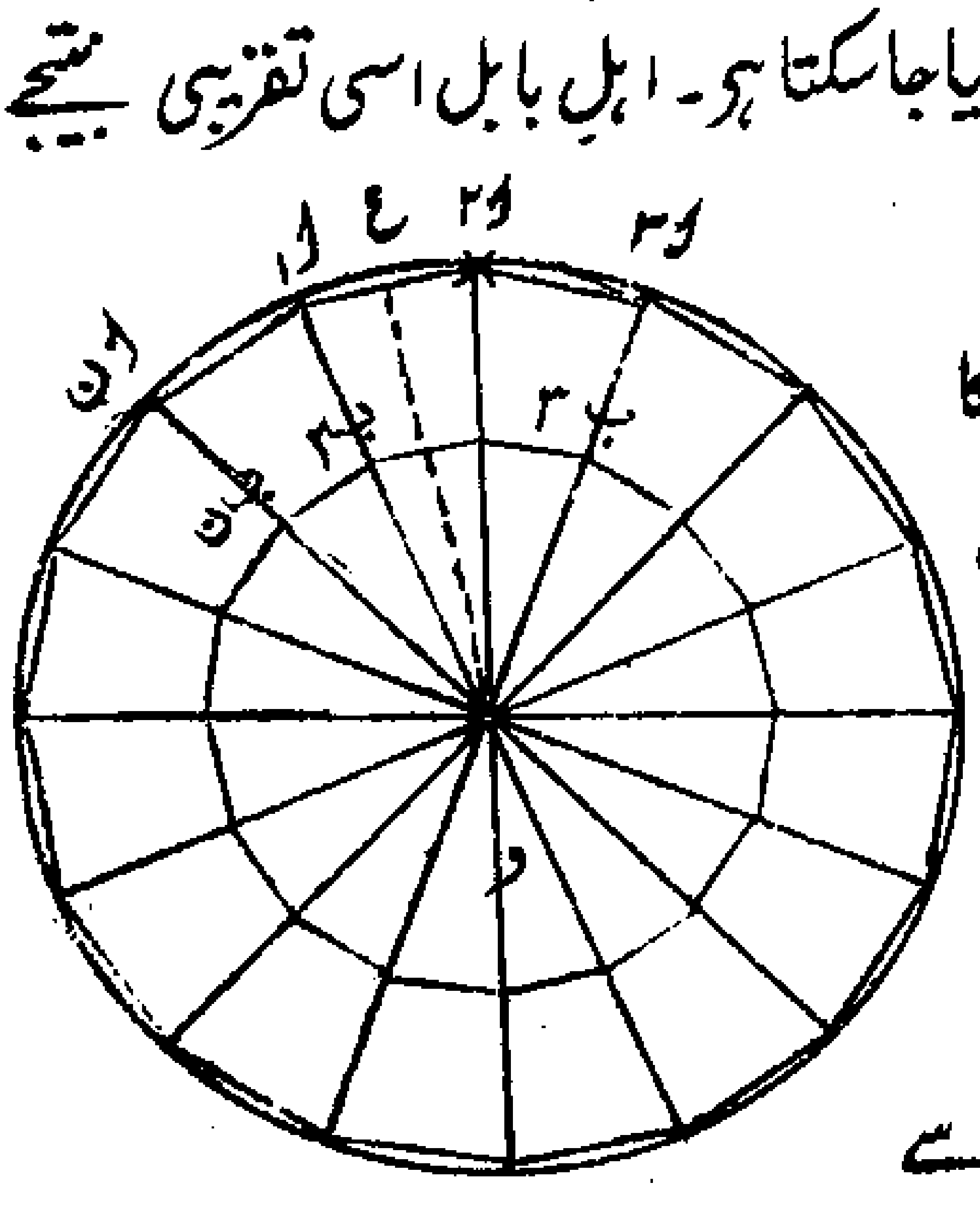
اسی طرح سے ہم اس مقام کا فاصلہ معلوم کر سکتے ہیں جس سے ایک روشنی گھر کی قندیل جس کی بلندی سطح سمندر سے ھ میل ہو عین دکھائی دیتی ہے۔ اس صورت میں ہمیں یہ فرض کرنا ہوگا کہ دیکھنے والے کی آنکھ ت پر ہے اور روشنی گھر کی قندیل ل پر ہے۔

دائرے کے محیط اور قطر کی نسبت۔

یہ قیاس غالباً صحیح ہے کہ سب سے پہلے اہلِ بابل نے ایک دائرے کے اندر بنے ہوئے منتظم مسدس (یعنی چھ ضلعے والی شکل جس کے تمام ضلعے اور زاویے مساوی ہوں) کی مدد سے دائرے کے محیط اور دائرے کے قطر کی نسبت کی تقریبی قیمت معلوم کی۔ ساتھ کی شکل سے ظاہر ہے کہ



اس منتظم مسدس کا ہر ضلع دائرے کے نصف قطر کے مساوی ہے۔ اس لیے منتظم مسدس کا محیط (۶ س) ہوگا اگر دائرے کے نصف قطر کو (س) سے تعبیر کیا جائے۔ یہ بھی ظاہر ہے کہ مسدس کا محیط دائرے کے محیط سے کسی قدر کم ہے۔ پس معلوم ہوا کہ دائرے کا محیط دائرے کے قطر کے ۳ گنے سے کسی قدر بڑا ہوتا ہے۔ اس نتیجے کی بنا پر تقریبی حسابات کے لیے دائرے کا محیط دائرے کے قطر کا ۳ گنا لیا جا سکتا ہے۔ اہلِ بابل اسی تقریبی نتیجے کو استعمال کرتے تھے۔



دائرے کے محیط کی قیمت کا اندازہ لگانے سے پہلے یہ بتانا ضروری ہے کہ کسی دائرے کے محیط کو دائرے کے قطر کے ساتھ ایک مستقل نسبت ہوتی ہے۔ اس اہم مسئلے کا ثبوت متشابہ شکلوں کی مدد سے آسانی سے

دیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ دائرہ (و) کے اندر ن ضلع والی ایک منتظم کثیر ضلعی شکل بنائی گئی ہے۔ اس کا ایک ضلع ل۱ ل۲ ہے۔ اگر ول۱ اور ول۲ ایک اور دائرے سے جس کا مرکز وؔ ہی پر ہے ب۱ اور ب۲ پر ملیں تو ب۱ ب۲ اُس منتظم ن ضلعی شکل کا ضلع ہوگا جو اس دوسرے دائرے کے اندر بنائی گئی ہے۔ نیز اگر ن بہت بڑا ہو تو اِن کثیر ضلعی شکلوں کے محیط اُن دائروں کے محیطوں کے تقریباً برابر ہوں گے جن کے اندر یہ شکلیں بنائی گئی ہیں۔ اس لیے پہلے دائرے کا محیط = ن × ل۱ ل۲ تقریباً

اور دوسرے دائرے کا محیط = ن × ب۱ ب۲

$$\text{اس لیے}\quad \frac{\text{پہلے دائرے کا محیط}}{\text{دوسرے دائرے کا محیط}} = \frac{\text{ن} \times \text{ل۱ ل۲}}{\text{ن} \times \text{ب۱ ب۲}} = \frac{\text{ل۱ ل۲}}{\text{ب۱ ب۲}}$$

شکل سے یہ بھی ظاہر ہے کہ مثلث ول۱ ل۲ مثلث وب۱ ب۲ کے متشابہ ہے اس لیے ان دو مثلثوں کے نظیر کے ضلعے متناسب ہوں گے۔

$$\text{یعنی}\quad \frac{\text{ل۱ ل۲}}{\text{ب۱ ب۲}} = \frac{\text{ول۱}}{\text{وب۱}}$$

$$\therefore \frac{\text{پہلے دائرے کا محیط}}{\text{دوسرے دائرے کا محیط}} = \frac{\text{ول۱}}{\text{وب۱}} = \frac{2 \times \text{ول۱}}{2 \times \text{وب۱}} = \frac{\text{پہلے دائرے کا قطر}}{\text{دوسرے دائرے کا قطر}}$$

اس سے حاصل ہوتا ہے کہ کسی دائرے کے محیط کو اس دائرے کے قطر سے جو نسبت ہے وہ ایک مستقل مقدار ہے۔ اس مستقل نسبت کو عبرانی حرف π سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

پس اگر کسی دائرے کا نصف قطر (ر) ہو تو اس دائرے کا محیط = ۲ π ر

دائرے کا رقبہ۔ شکل سے یہ بھی ظاہر ہے کہ دائرے کا رقبہ منتظم ن ضلعی ل۱ ل۲ ل۳ . . . . ل ن کے رقبے کے تقریباً برابر ہے اور دائرہ

اور کثیر ضلعی کے رقبوں کا فرق نظر انداز کرنے کے قابل ہوتا ہے جب کہ ن بہت بڑا ہو۔

اس لیے دائرے کا رقبہ = ن × △ و ا۱ ا۲ کا رقبہ

= ن × ½ ا۱ ا۲ × و ع (جہاں و ع عمود ہے ا۱ ا۲ پر)

= ن × ½ ا۱ ا۲ × س، [جہاں دائرے کا نصف قطر س ہے کیوں کہ و ع تقریباً س کے برابر ہے]

= ½ × ن × ا۱ ا۲ × س

= ½ (دائرے کا محیط) × س = ½ × ۲ π س × س = π س²

اس ضابطے کی مدد سے π کی تقریبی قیمت معلوم ہو تو دائرے کا رقبہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

دائرے کے اندر ۱۲ یا ۲۴ ضلعوں والی منتظم کثیر ضلعی شکلیں بنا کر ان کے محیطوں کی مدد سے π کی تقریبی قیمت محسوب کی جا سکتی ہے۔ معمولی حساب میں π کی قیمت ۲۲/۷ لی جائے تو کافی صحت کے ساتھ جواب حاصل ہوتا ہے۔

چھٹے باب میں π کی قیمت معلوم کرنے کا ایک آسان طریقہ بتایا جائے گا۔

یونانی علمِ ہندسہ کا انتہائی عروج۔ یونانی علم ہندسہ اپنے معراجِ کمال کو پہنچ چکا تھا۔ جب اقلیدس (۳۰۰ ق۔م) اسکندریہ آیا۔ اس علم ہندسہ میں وہ تمام ضروری اصول موجود تھے جن سے اسکندریہ والوں نے اور عربوں نے علم ہیئت اور جغرافیائی مساحت کے آسان اور کارآمد طریقے معلوم کیے۔ نیز تعمیری اور خانگی ضرورتوں کے لیے بھی یہ یونانی علم ہندسہ بہت مفید ثابت ہوتا تھا۔ اگر یونانی ریاضی دان اس قسم کی پیمائشوں میں زیادہ دل چسپی لیتے جن کے خاکے اپنے گو راس

(ANAXAGORAS) اور اریسٹارکس (ARISTARCHUS) نے پیش کیے تھے تو مزید ترقی ممکن تھی لیکن چوں کہ علم ہندسہ اُن خوش حال لوگوں کی بے کاری کا ایک ذہنی کھیل بن گیا تھا جنھیں محنتی کاری گروں اور مُہم جو ملاحوں کی معاشی کام یابیوں سے کسی قسم کی دل چسپی نہ تھی اس لیے ترقی کی تمام راہیں بند ہو گئیں۔ جب یونانی ریاضی دانوں کو $\sqrt{2}$ اور ۲۱ جیسے عددوں سے واسطہ پڑا جو دو صحیح عددوں کی نسبت سے ٹھیک ٹھیک طور پر تعبیر نہیں کیے جا سکتے تو انھوں نے عددوں کے نئے تصوّر ایجاد کرنے کی بجائے عددوں اور پیمائش کو علم ہندسہ سے خارج کر کے مجرّد تکمیل کی آڑ میں پناہ لی۔ اس طرح عملی مساحت کو علم ہندسہ سے نکال دیا گیا۔ چناں چہ اقلیدس کے مقالوں میں طولوں اور رقبوں کو ظاہر کرنے کے لیے عددوں کی بجائے صرف حرف استعمال کیے گئے ہیں۔ افلاطون کا یہ نظریہ تھا کہ علم ہندسہ کا مطالعہ صرف روحانی تکمیل کا آلۂ کار ہے اور اس لیے یہ ہرگز درست نہیں ہے کہ اس علم کو دنیاوی ضرورتوں کے لیے استعمال کیا جائے۔ افلاطون کے اس نظریے کی وجہ سے علم ہندسہ کو عام لوگوں کے لیے زیادہ سے زیادہ مشکل اور ناقابلِ فہم بنایا گیا۔ یونان کے فارغ البال تعلیم یافتہ طبقے کے لیے علم ہندسہ بے کاری کا ایک دماغی کھیل بن گیا تھا اور اُن کا خیال تھا کہ اس کھیل کو دل چسپ بنانے کے لیے اُس کو زیادہ سے زیادہ پیچیدہ بنایا جائے۔ اس مضر رجحان کے خلاف جب ارخیطاس (AREHYTAS) اور دوسرے چند ریاضی دانوں نے پٹری اور پرکار کے علاوہ اور آلوں کی مدد سے مختلف قسم کے منحنی بنانے کی کوشش کی تو اُن کی یہ گراں قدر

کوششیں مقبول نہیں ہوئیں اور علمِ ہندسہ میں مزید انکشاف کا دروازہ بند ہوگیا۔

یاد رکھنے کی باتیں۔

(۱) مثلث کے تین زاویوں کا مجموعہ ۱۸۰ کے مساوی ہوتا ہے۔

(۲) دائرے کا مماس نقطۂ تماس میں سے گزرنے والے نصف قطر پر عمودوار ہوتا ہے۔

(۳) قائم الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویہ کے مقابل کے ضلع پر کا مربع بقیہ دو ضلعوں پر کے مربعوں کے مجموعے کے مساوی ہوتا ہے (اور اس کا عکس بھی درست ہے)

(۴) متشابہ مثلثوں میں نظیر کے ضلعے متناسب ہوتے ہیں۔

(۵) نصف قطر (ر) والے دائرے کا محیط ۲ π ر اور رقبہ π ر^2 ہے۔

(۶) جب (°۹۰ - ط) = جم (ط)؛ جم (°۹۰ - ط) = جب ط

(۷) جب^2 ط + جم^2 ط = ۱

پانچواں باب

حساب کی ابتدا

جامعہ اسکندریہ کے قیام (۳۲۰ ق-م) کے بعد یونان نے ریاضی کی ترقی میں کوئی خاص حصّہ نہیں لیا۔ نہ صرف یونان میں بلکہ تمام یورپی ملکوں میں علم و فن کی جگہ توہم پرستی کا دور دورہ رہا یہاں تک کہ مسلمانوں نے دوبارہ مغرب میں علم کا چراغ روشن کیا۔ پندرھویں صدی میں ریاضی سے اہلِ یورپ کا تعلق صرف اس قدر تھا کہ تعویذوں کے طور پر طلسمی مربعوں (MAGICSQUARE) کی کثرت سے استعمال کیا جاتا تھا۔

ایسے ایک طلسمی مربع کی نقل (مروّجہ ہندسوں میں) سامنے کی شکل میں دی گئی ہے۔ اس مربع میں ہر آڑی اور کھڑی سطر کے عددوں کا مجموعہ ۳۴ ہے۔ نیز مربع کے ہر وتر پر کے عددوں کا مجموعہ بھی ۳۴ ہے۔ اس مربع میں (۱) سے (۱۶) تک کے عدد استعمال کیے گئے ہیں۔

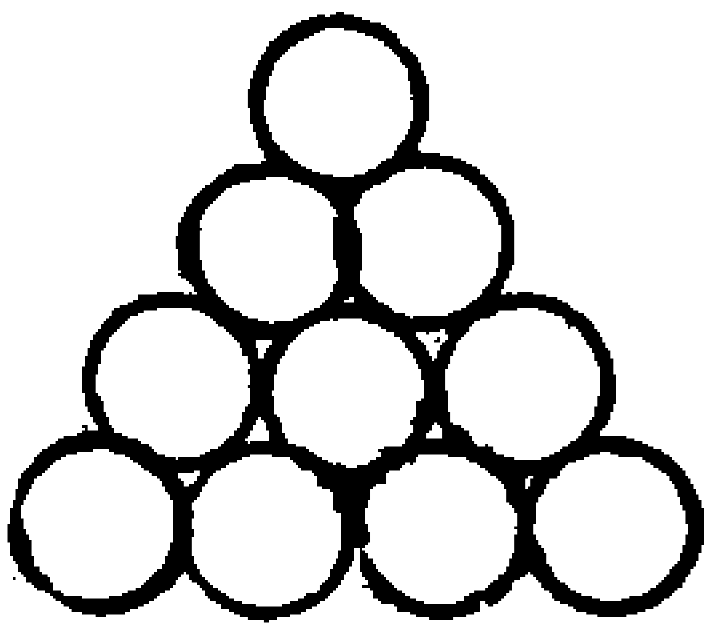
۱	۱۵	۱۴	۴
۱۲	۶	۷	۹
۸	۱۰	۱۱	۵
۱۳	۳	۲	۱۶

ایسے عددی مربعوں کے ذریعے مذہبی پیشوا جسمانی اور نفسیاتی بیماریوں کو دفع کرنے کا دعوا کرتے تھے۔ ایسے عددی مربعے ذہنی کھیل کے طور پر بھی مرتب کیے جاتے تھے۔

ظاہر ہو کہ جب علم و فن صرف خوش حال اور بے کار لوگوں کی ذہنی تفریح کا ذریعہ بن جائے اور اس سے کوئی عملی فائدہ حاصل نہ کیا جائے تو ترقی مسدود ہو جاتی ہو۔ یونان میں جہاں دیمقراطیس جیسے حکیم بھی تھے جو علم کو عام اور کار آمد بنانا چاہتے تھے وہاں فیثا غورث (پانچویں صدی ق۔م میں) بڑے بڑے مجمعوں کے سامنے حساب اور علمِ ہندسہ کے درس دیتا تو ان میں عددوں کی روحانی خاصیتوں پر بھی بحث کی جاتی تھی۔ اس سے رفتہ رفتہ یہ خیال عام ہوا کہ عددوں کی یہی خاصیتیں نہایت اہم اور سیکھنے کے قابل ہیں۔ مثلاً عدد (۱) کو تمام عددوں کا مبدا تصور کیا جاتا تھا۔ عدد (۲) سے مشورہ اور رائے کو تعبیر کیا جاتا تھا۔ نیز عدد (۲) پہلا مونث عدد اور عدد (۳) پہلا مذکر عدد کہلاتا تھا۔ عدد (۴) کے ذریعے انصاف کو تعبیر کیا جاتا تھا اور عدد (۵) جو پہلے مونث عدد (۲) اور پہلے مذکر عدد (۳) کے اتحاد سے حاصل ہوتا ہو ازدواج (یا شادی) کو تعبیر کرتا تھا۔ اسی طرح علم ہندسہ میں مکعب سے زمین کو اور بارہ سطحی سے کائنات کو تعبیر کیا جاتا تھا۔ ایسا عدد جس کے تمام اجزائے ضربی کا مجموعہ اُسی عدد کے برابر ہو مکمل عدد کہلاتا تھا۔ مثلاً (۶) ایک مکمل عدد ہو کیوں کہ اس کے اجزائے ضربی ۱، ۲، ۳ ہیں جن کا مجموعہ (۶) ہو۔ عدد (۶) پہلا مکمل عدد ہو۔ دوسرا مکمل عدد ۲۸، تیسرا (۴۹۶) اور چوتھا (۸۱۲۸) اور پانچواں (۳۳۵۵۰۳۳۶) ہو۔ چوں کہ مکمل عدد بہت ہی کم یاب ہیں اس لیے قدیم ریاضی داں اِن عددوں کو نیک لوگوں سے تشبیہ دیتے تھے۔ (۲۲۰) اور (۲۸۴) جیسے دو عدد جن میں سے ایک کے اجزائے ضربی

کا مجموعہ دوسرے کے برابر ہو اور دوسرے عدد کے اجزائے ضربی کا مجموعہ پہلے عدد کے برابر ہو ایک دوسرے کے "رفیق" کہلاتے تھے۔ ایسے عددوں کی تحقیق میں بھی بہت سا وقت صرف کیا جاتا تھا۔ ابتدائی عددوں کا مجموعہ لینے سے جو عدد حاصل ہوتے ہیں وہ مثلثی عدد کہلاتے ہیں۔ ان عددوں سے ایک مثلث کی شکل میں ترتیب دی ہوئی گولیوں کی تعداد حاصل ہوتی ہے۔

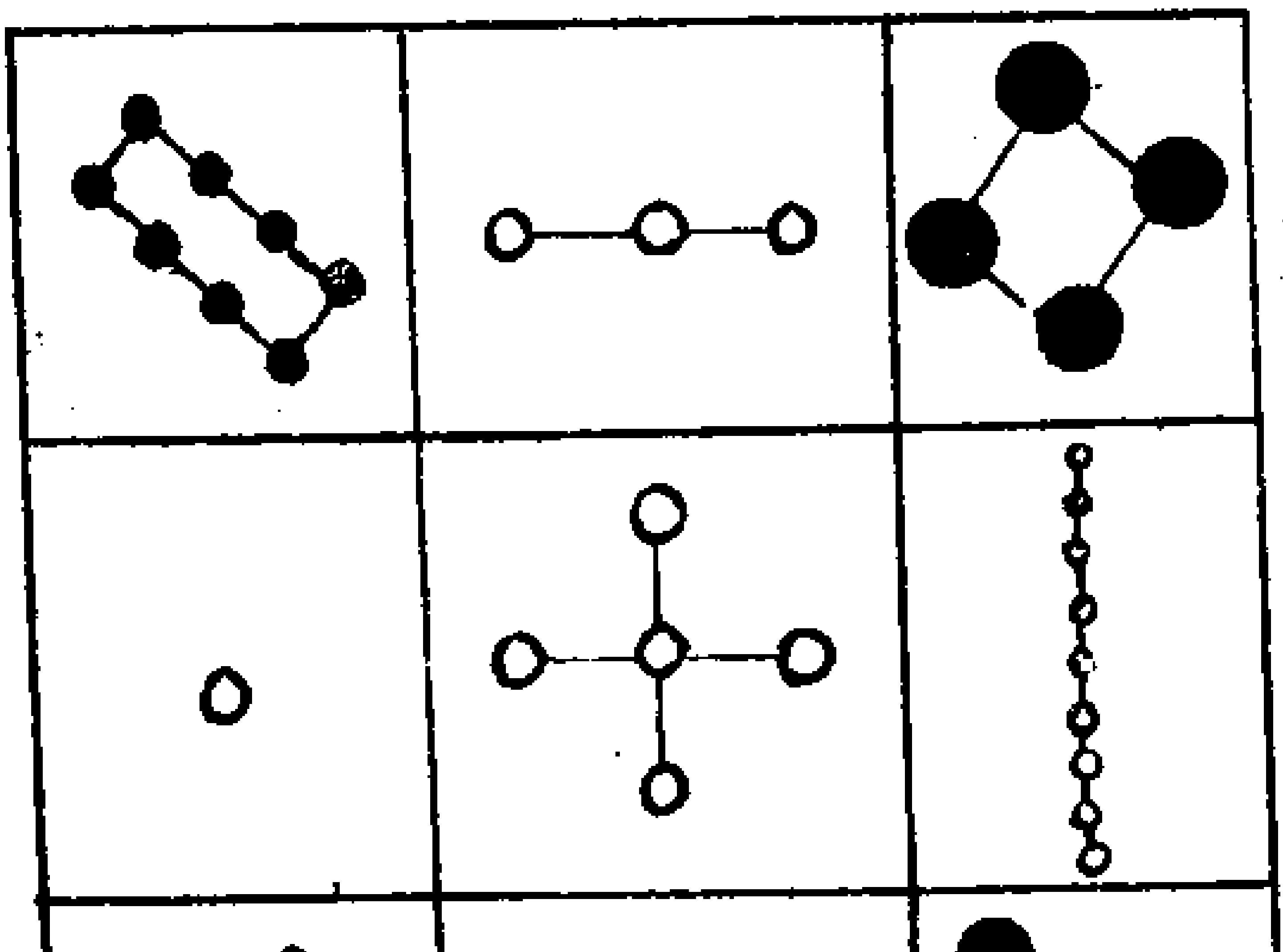
مثلاً چوتھا مثلثی عدد = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ = ۱۰



یعنی اگر گولیوں سے ایک ایسا مثلث بنایا جائے جس کے ہر ضلع میں ۴ گولیاں ہوں تو گولیوں کی تعداد (۱۰) ہوگی۔ مثلثی عددوں کو نیک شگون خیال کیا جاتا تھا۔

بہت قدیم زمانے سے طلسمی عددوں کا عقیدہ موجود تھا اور اُن تجارتی شاہ راہوں پر پایا جاتا تھا جو سُمیری تہذیب کے مرکز سے نکلتی تھیں۔ فیثاغورث سے بہت پہلے ہندستانیوں اور عبرانیوں کو "مکمل عددوں" اور "رفیق عددوں" کا علم تھا۔ کائنات کی تخلیق کے (۶) دن اور ہلالی مہینے کے (۲۸) دن اِس قدیم عقیدے کی نشانیاں ہیں۔ شاید یہ قیاس غلط نہیں ہے کہ وہ علم ہندسہ اور عددوں کا علم جو فیثاغورث کو حاصل تھا قدیم چینی ماخذوں سے لیا گیا تھا۔ یہ سمجھنے کے لیے کہ انسان نے عددوں کی خاصیتیں کس طرح دریافت کیں ہمیں یونانی ریاضی دانوں سے پانسو سال بلکہ اس سے زیادہ قبل کے زمانے کی تاریخ کی ورق گردانی کرنی پڑے گی۔

عددوں کی قدیم چینی ترقیم کا اصول یہ تھا کہ اس میں عددوں کو خطوں، دائروں اور نقطوں کی سادہ شکلوں کے ذریعے ظاہر کیا جاتا تھا۔ اس سے اس امر پر بھی روشنی پڑتی ہے کہ کس طرح ہندستانیوں نے اس طرزِ تحریر سے عددوں کی ترقیم کا ایک معقول طریقہ دریافت کیا۔ ایک چینی کتاب سے، جو فیثا غورث سے تقریباً پانسو سال پہلے لکھی گئی تھی، یہ معلوم ہوتا ہے کہ عدد ایک تا آٹھ کو افقی خطوں کے اجتماعوں سے تعبیر کیا جاتا تھا۔ اس ترقیم کو دیاسلائی ترقیم کہتے ہیں۔ مثلاً عدد دو کو علامت = سے اور عدد تین کو علامت ≡ سے تعبیر کیا جاتا تھا جس سے بعد میں (کسی قدر تبدیلی سے) ہندستانی ترقیم کی علامتیں ۲ اور ۳ حاصل ہوئیں۔ عددوں کی ترقیم کا ایک اہم طریقہ یہ تھا کہ اس میں سیاہ اور سفید دائروں کے ذریعے عددوں کو تعبیر کیا جاتا تھا۔ سفید دائرے نر (یعنی طاق) عددوں کے لیے اور سیاہ دائرے مادہ (یعنی جفت) عددوں کے لیے استعمال کیے جاتے تھے۔ ساتھ کی شکل میں ایک طلسمی مربع اس ترقیم میں لکھا گیا ہے۔ اس مربع کی ہر آڑی یا کھڑی سطر یا وتر کے عددوں کا مجموعہ (۱۵) ہے۔ ممکن ہے کہ اسی قسم کے نقشی طلسمی مربعوں سے علمِ جفر حاصل کیا گیا ہو۔ علمِ جفر میں عددوں



ب

کو حروفِ تہجی سے تعبیر کیا جاتا تھا۔ اور اس طرح عددوں کی بجائے جو لفظ بنتے تھے اُن میں سے چند مبارک اور چند نحس خیال کیے جاتے تھے۔ اس قسم کے نقشوں سے توہم پرستی کو تقویت حاصل ہوئی لیکن ریاضی کو بہت نقصان پہنچا کیوں کہ کارآمد ریاضی کی طرف لوگوں کی توجہ کم ہو گئی۔

قدیم ریاضی (خاص طور پر چینی ریاضی) میں طاق عددوں کو مذکر اور جفت عددوں کو مونث قرار دینے کی اصلی وجہ غالباً یہ تھی کہ اس زمانے میں انسان کو اپنی اور اپنے گھریلو جانوروں کی نسل کی افزائش سے گہری دل چسپی تھی۔ اس لیے انسان نے فطری طور پر عددوں کو بھی مذکر اور مونث جماعتوں میں تقسیم کیا۔ عددوں کے اس تصور کے ساتھ ساتھ طاق (یعنی مذکر) عددوں میں سے اُن عددوں کا خاص طور پر مطالعہ کیا گیا جن کا کوئی جزوِ ضربی نہ ہو۔ یہ عدد "مفرد" عدد کہلاتے ہیں مثلاً ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷ مفرد ہیں۔ روزمرّہ حساب میں مفرد عدد صرف اس وقت کام آتے ہیں جب کہ اجزاے ضربی کی مدد سے کسی صحیح عدد کا جذر معلوم کرنا ہو۔ لیکن اب جذر نکالنے کے لیے ایسے طریقے دریافت ہو چکے ہیں کہ مفرد عددوں کے استعمال کی زیادہ ضرورت نہیں پڑتی۔

۲ یا ۳ جیسے عددوں کے جذر معلوم کرنے کے سلسلے میں یونانی ریاضی دانوں کو جس مشکل سے دوچار ہونا پڑا اس کا ذکر ہم کر چکے ہیں اور یہ بھی بتا چکے ہیں کہ ان اہم عددوں سے بچنے کے لیے یونانی ریاضی دانوں نے کس طرح علم ہندسہ سے عددوں اور پیمائش کو خارج کر کے

مجرّد تکمیل کی آڑ میں پناہ لی۔

ایسے عددوں کے مطالعے سے جو نقطوں (یا دائروں) سے بنے ہوئے مربعوں اور مثلثوں سے تعبیر کیے جا سکتے ہیں کوئی فوری کارآمد نتیجے حاصل نہیں ہوئے۔ البتہ عددوں کے مطالعے سے چند کارآمد سلسلوں کی طرف توجہ ہوئی۔

عددوں کے سلسلے سے مراد عددوں کا ایک جُٹ (SET) ہے جس میں ایک خاص رشتہ پایا جائے۔ مثلاً سلسلہ ۱، ۴، ۷، ۱۰، ۱۳۔۔۔ میں ہر عدد اپنے سے پہلے عدد میں ۳ جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔
طبعی عدد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ......
عددوں کے سلسلے کی سب سے آسان مثال ہیں۔
یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ پہلے ۷ طبعی عددوں کا مجموعہ = ۲۸

$$= \frac{۸ \times ۷}{۲}$$

اسی طرح پہلے ن طبعی عددوں کا مجموعہ = $\frac{ن(ن+۱)}{۲}$

اس ضابطہ کو حسب ذیل طریقے سے ثابت کیا جاتا ہے:-

مان لو کہ $۱ + ۲ + ۳ + \quad + ن = \frac{ن(ن+۱)}{۲}$

تب $۱ + ۲ + ۳ + \quad + ن + (ن+۱) = \frac{ن(ن+۱)}{۲} + (ن+۱)$

$$= \frac{(ن+۱)}{۲}\left[ن+۲\right]$$

اس سے ظاہر ہے کہ (ن+۱) طبعی عددوں کا مجموعہ اسی قاعدے سے حاصل ہوتا ہے جو ن طبعی عددوں کے مجموعے کے لیے مان لیا گیا۔ نیز تصدیق کی جا سکتی ہے کہ ن = ۲، ۳، ۴ کے لیے ضابطہ درست ہے۔ اس لیے ن = ۵ کے لیے ضابطہ درست ہے۔ اس لیے ن = ۶ کے لیے ضابطہ درست ہے۔ اس طرح ن کی ہر قیمت کے لیے ضابطہ درست ہے۔

یہ طریقہ استدلال ''استقرائے حسابیہ'' کا طریقہ کہلاتا ہے۔ اسی طرح استقرائے حسابیہ کی مدد سے حسب ذیل نتیجے حاصل کیے جا سکتے ہیں:-

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \text{ن}^2 = \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(2\text{ن}+1)}{6}$$

اور

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + \text{ن}^3 = \left[\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2}\right]^2$$

ان سلسلوں کے علاوہ ہندسی سلسلہ بھی بہت اہم اور کارآمد ہے۔ ہندسی سلسلے میں ہر رقم کو اپنے سے پہلی رقم کے ساتھ ایک مستقل نسبت ہوتی ہے۔ مثلاً

$$\text{ل} + \text{ل}\,\text{ر} + \text{ل}\,\text{ر}^2 + \text{ل}\,\text{ر}^3 + \ldots + \text{ل}\,\text{ر}^{\text{ن}-1}$$

ایک ہندسی سلسلہ ہے۔ اس سلسلے میں ن رقمیں ہیں۔ پہلی رقم ل کو ر سے ضرب دینے سے دوسری رقم حاصل ہوتی ہے۔ دوسری رقم کو ر سے ضرب دینے سے تیسری رقم حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح عمل کرنے سے سلسلے کی تمام رقمیں حاصل ہوتی ہیں۔ اس ہندسی سلسلے کی ہر رقم کو رقم ماقبل سے جو نسبت ہے (یعنی مقدار ر) وہ نسبت مشترک کہلاتی ہے۔ ہم اس سلسلے کی ن رقموں کا مجموعہ معلوم کریں گے۔

فرض کرو کہ $\text{ص}_{\text{ن}} = \text{ل} + \text{ل}\,\text{ر} + \text{ل}\,\text{ر}^2 + \text{ل}\,\text{ر}^3 + \ldots + \text{ل}\,\text{ر}^{\text{ن}-1}$

تب $\text{ر} \times \text{ص}_{\text{ن}} = \text{ل}\,\text{ر} + \text{ل}\,\text{ر}^2 + \text{ل}\,\text{ر}^3 + \ldots + \text{ل}\,\text{ر}^{\text{ن}-1} + \text{ل}\,\text{ر}^{\text{ن}}$

اس لیے تفریق سے، $\text{ص}_{\text{ن}}(1-\text{ر}) = \text{ل} - \text{ل}\,\text{ر}^{\text{ن}} = \text{ل}(1-\text{ر}^{\text{ن}})$

اس لیے $\text{ص}_{\text{ن}} = \frac{\text{ل}(1-\text{ر}^{\text{ن}})}{1-\text{ر}}$

اس ضابطہ کی مدد سے ایک ہندسی سلسلے کی ن رقموں کا مجموعہ حاصل ہوتا ہے جب کہ رقم اوّل اور نسبت مشترک معلوم ہو۔

مثلاً اگر رقم اوّل ل = ۱ ، نسبت مشترک ر = $\frac{۱}{۲}$ اور رقموں کی تعداد ن = ۱۰۰ تو ہندسی سلسلے کا مجموعہ

$$= \frac{۱\left[۱ - \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰۰}\right]}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۲\left[۱ - \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰۰}\right]$$

اگر رقموں کی تعداد ن بہت بڑی ہو تو

$$\text{ص}_{\text{ن}} = ۲ - \frac{۱}{۲^{\text{ن}-۱}}$$

چوں کہ ن بہت بڑا ہے اس لیے بائیں جانب کی دوسری رقم $\frac{۱}{۲^{\text{ن}-۱}}$ بہت چھوٹی ہوگی یعنی نظر انداز کرنے کے قابل ہوگی۔ اس لیے ن کی بہت بڑی قیمتوں کے لیے سلسلے کا مجموعہ = ۲

اس صورت میں کہا جاتا ہے کہ لا متناہی ہندسی سلسلہ

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} + \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳} + \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴} + \cdots \text{ تا } \infty$$

کا مجموعہ ۲ ہے۔

اس کا مطلب یہ ہے کہ ن کو کافی بڑا مان لینے سے سلسلے کی ن رقموں کے مجموعہ کو ۲ کے کافی قریب لایا جا سکتا ہے۔

ملحوظِ خاطر رہے کہ ن کی ہر قیمت کے لیے ص ن چھوٹا ہوتا ہے ۲ سے لیکن ن کی بڑی قیمتوں کے لیے ص ن اور ۲ کا فرق نظر انداز کرنے کے قابل ہوتا ہے یعنی تقریباً صفر ہوتا ہے۔

اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر نسبت مشترک (ر) چھوٹی ہو ایک سے تو لا متناہی ہندسی سلسلہ

$$\text{ل} + \text{ل}\text{ر} + \text{ل}\text{ر}^{۲} + \cdots + \text{ل}\text{ر}^{\text{ن}-۱} + \text{ل}\text{ر}^{\text{ن}} + \cdots \text{ تا } \infty$$

کا مجموعہ $= \frac{\text{ل}}{۱-\text{ر}}$

پہلے باب میں بتایا جا چکا ہے کہ اکلیز اور کچھوے کی دوڑ والے سوال

کا حل لامتناہی سلسلہ $10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$ کا مجموعہ معلوم کرنے پر منحصر ہے۔ یہ ایک لامتناہی ہندسی سلسلہ ہے جس کا مجموعہ $= \frac{10}{1-(\frac{1}{10})} = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$

ہندسی سلسلے کی طرح حسابی سلسلہ بھی دل چسپ ہے۔ حسابی سلسلے کی دو مثالیں حسب ذیل ہیں:-

(i) ۱ + ۵ + ۹ + ۱۳ + ۱۷ + ۔۔۔۔۔۔

(ii) ل + (ل + ف) + (ل + ۲ ف) + (ل + ۳ ف) + ۔۔۔۔

پہلے سلسلے میں دو متصل رقموں کا فرق ۴ ہے اور دوسرے سلسلے میں دو متصل رقموں کا فرق ف ہے۔ سلسلہ (ii) حسابی سلسلے کی عام مثال ہے۔ فرض کرو کہ سلسلہ (ii) کی ن رقموں کا مجموعہ = م ن

تب م ن = ل + (ل + ف) + (ل + ۲ ف) + ۔۔۔ + (ل + ن-۱ ف)

رقموں کو الٹی ترتیب میں لینے سے م ن = (ل + ن-۱ ف) + (ل + ن-۲ ف) + ۔۔۔ + ل

اس لیے جمع کرنے سے ۲ م ن = (۲ ل + ن-۱ ف) + (۲ ل + ن-۱ ف) + ۔۔۔ ن رقموں تک = ن [۲ ل + ن-۱ ف]

اس لیے م ن = $\frac{1}{2}$ ن [۲ ل + ن-۱ ف] = $\frac{1}{2}$ ن [ل + (ل + ن-۱ ف)]

یعنی حسابی سلسلے کی ن رقموں کا مجموعہ حاصل ہوتا ہے اگر پہلی اور آخری رقم کے مجموعے کے نصف کو رقموں کی تعداد سے ضرب دیا جائے۔

مثال سلسلہ ۱ + ۵ + ۹ + ۱۳ + ۔۔۔۔۔۔

کی (۱۰۰) رقموں کا مجموعہ = $\frac{100}{2}$ (۲ × ۱ + ۹۹ × ۴)

= ۱۰۰ (۱ + ۱۹۸) = ۱۹۹۰۰

ظاہر ہے کہ اس ضابطہ کے بغیر معمولی طریقے سے مجموعہ معلوم کرنے کے لیے

بہت طویل عمل سے جمع کرنا ہوگا۔ اس لیے یہ ضابطہ نہایت کارآمد ہو۔ پہلے ن طبعی عددوں کا مجموعہ بھی حسابی سلسلے کے ضابطہ کی مدد سے حاصل ہوتا ہو کیوں کہ طبعی عددوں سے ایک ایسا حسابی سلسلہ حاصل ہوتا ہو جس کی رقم اول (۱) ہو اور فرق مشترک بھی (۱) ہو۔

اب ذیل کے سلسلے پر غور کرو۔

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\cdots + \frac{1}{ن} + \cdots\cdots$$

اس سلسلے کی رقموں کو الٹانے سے سلسلہ

$$\frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \frac{4}{1} + \frac{5}{1} + \cdots\cdots + \frac{ن}{1} + \cdots\cdots$$

حاصل ہوتا ہو جو ایک حسابی سلسلہ ہو۔

ایسا سلسلہ جس کی رقموں کو الٹانے سے حسابی سلسلہ حاصل ہوتا ہو، موسیقی سلسلہ کہلاتا ہو۔

قدیم ہیئت دانوں کا یہ خیال تھا کہ ستاروں کے فاصلے موسیقی سلسلے میں ہیں یعنی ان کے خیال کے مطابق ستاروں کے فاصلوں کو الٹانے سے ایک حسابی سلسلہ حاصل ہوتا ہو۔

ان سلسلوں کے علاوہ کئی اور دل چسپ سلسلے ہیں جن میں سے چند سلسلوں کا ذکر آیندہ کیا جائے گا۔

ہم اوپر مثلثی عددوں کا ذکر کرچکے ہیں اور یہ بھی بتا چکے ہیں کہ ن واں مثلثی عدد $\frac{ن(ن+1)}{2}$ ہو۔ اب ہم اجتماعوں اور مثلثی عددوں کا تعلق ظاہر کریں گے۔

فرض کرو کہ ایک شخص کے تین دوست ا، ب، ج ہیں اور وہ اپنے دوستوں میں سے دو دو کو اپنے ہاں ایک ایک دن دعوت پر بلانا چاہتا ہو۔

یہ شخص ایک دن ا اور ب کو، دوسرے دن ب اور ج کو اور تیسرے دن ج اور ا کو دعوت پر بلا سکتا ہے۔ یعنی تین دوستوں میں سے دو دو کو منتخب کرنے کے طریقوں کی تعداد = ۳ = $\frac{۳ \times ۲}{۲}$ = دوسرا شلثی عدد۔ اسی طرح آسانی سے بتایا جا سکتا ہے کہ ن مختلف چیزوں میں سے دو دو چیزوں کو منتخب کرنے کے طریقوں کی تعداد = $\frac{ن(ن-۱)}{۲}$ = (ن-۱) واں شلثی عدد

مثلاً ایک جماعت کے ۳۵ طلبہ میں سے ۲ طلبہ کو منتخب کرنے کے طریقوں کی تعداد = ۳۴ واں شلثی عدد = $\frac{۳۵ \times ۳۴}{۲}$ = ۱۷ × ۳۵

= ۵۹۵

ن مختلف چیزوں میں سے ر، ر چیزیں منتخب کرنے کے طریقوں کی تعداد کو علامت $_{ن}ج_{ر}$ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ پس اوپر کے نتیجے کے مطابق

$_{ن}ج_{۲}$ = $\frac{ن(ن-۱)}{۲}$ = (ن-۱) واں شلثی عدد ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$_{ن}ج_{ر} = \frac{ن(ن-۱)(ن-۲) - - (ن-ر+۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times - - - \times ن}$$

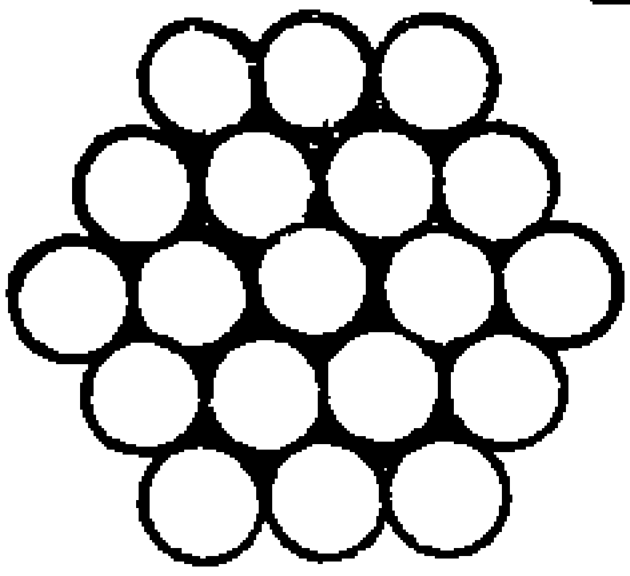
$$مثلاً\ _{۶}ج_{۳} = \frac{۴ \times ۵ \times ۶}{۳ \times ۲ \times ۱} = ۲۰$$

اوپر کی مثالوں میں منتخب کی ہوئی چیزوں کی ترتیب کو ملحوظ نہیں رکھا جاتا۔ مثلاً ا اور ب وہی ہے جو ب اور ا ہے۔ لیکن اگر انھیں ایک صف میں ترتیب دینا ہو یا یکے بعد دیگرے ایک کمرے میں داخل کرنا ہو تو ا، ب اور ب، ا دو مختلف ترتیبیں ہوں گی۔ پس ۳ چیزوں میں سے دو دو کو ترتیب دینے کے طریقوں کی تعداد = ۶ کیونکہ ہر اجتماع سے دو دو ترتیبیں حاصل ہوتی ہیں۔ اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ن مختلف چیزوں میں سے ر، ر چیزوں کی ترتیبوں کی تعداد = ن (ن-۱) (ن-۲) ... (ن-ر+۱) ن مختلف چیزوں میں ر، ر کی ترتیبوں کی تعداد کو علامت

$_{\text{ن}}\text{پ}_{\text{ر}}$ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ نیز پہلے ن طبعی عددوں کے حاصل ضرب کو یعنی (۱ × ۲ × ۳ × --- × ن) کو علامت $\lfloor\text{ن}$ سے تعبیر کیا جاتا ہے اور اس کو پڑھتے ہیں ضربی ن۔ پس اس ترقیم کے مطابق

$$_{\text{ن}}\text{پ}_{\text{ر}} = {}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}} \times \lfloor\text{ر}$$

قدیم ریاضی دانوں کو مثلثی عددوں کے علاوہ مسدّسی عددوں سے بھی بہت دل چسپی تھی۔ مثلاً تیسرے مسدّسی عدد سے مراد ایسے مسدّس میں گولیوں کی تعداد ہے جس کے ہر ضلع میں ۳ گولیاں ہوں۔ ساتھ کی شکل سے معلوم ہوتا ہے کہ تیسرا مسدّسی عدد ۱۹ ہے۔



اس طرح شکلیں بنا کر کسی مسدّسی عدد کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے۔

اگر ن ویں مثلثی عدد کو $\text{ث}_{\text{ن}}$ سے اور ن ویں مسدّسی عدد کو $\text{س}_{\text{ن}}$ سے تعبیر کیا جائے تو حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{س}_{\text{ن}} = ۶\,(\text{ث}_{\text{ن}-۲}) + ۶\,(\text{ن}-۱) + ۱$$

مذکّر، مونّث، مکمل، رفیق، مثلثی اور مسدّسی عددوں سے قدیم ریاضی دانوں کو عددوں کی مفروضہ طلسمی اور روحانی خاصیتوں کی وجہ سے دل چسپی تھی نہ کہ ان عددوں کی عملی ضرورت کے لحاظ سے۔ لیکن یہ عدد اور سلسلے، روزمرہ حساب میں اور خاص طور پر مثلثی عدد توریث کے مسئلوں پر بحث کرنے کے لیے جدید حیاتیات میں بہت کارآمد ثابت ہوئے ہیں۔ اس لیے ہمارے لیے ان عددوں اور سلسلوں سے واقف ہونا ضروری اور مفید ہے۔

یاد رکھنے کی باتیں۔

(۱) $\text{۱} + \text{۲} + \text{۳} + \cdots + \text{ن} = \dfrac{\text{ن}(\text{ن}+\text{۱})}{\text{۲}}$

(۲) $\text{۱}^{\text{۲}} + \text{۲}^{\text{۲}} + \text{۳}^{\text{۲}} + \cdots + \text{ن}^{\text{۲}} = \dfrac{\text{ن}(\text{ن}+\text{۱})(\text{۲ن}+\text{۱})}{\text{۶}}$

(۳) $\text{۱}^{\text{۳}} + \text{۲}^{\text{۳}} + \text{۳}^{\text{۳}} + \cdots + \text{ن}^{\text{۳}} = \left(\dfrac{\text{ن}(\text{ن}+\text{۱})}{\text{۲}}\right)^{\text{۲}}$

(۴) $\text{ل} + \text{لر} + \text{لر}^{\text{۲}} + \cdots + \text{لر}^{\text{ن}-\text{۱}} = \dfrac{\text{ل}(\text{۱}-\text{ر}^{\text{ن}})}{\text{۱}-\text{ر}}$

اور اگر ر چھوٹا ہو (۱) سے تو لا متناہی سلسلے کا مجموعہ = $\dfrac{\text{ل}}{\text{۱}-\text{ر}}$

(۵) $\text{ل} + \overline{\text{ل}+\text{ف}} + \overline{\text{ل}+\text{۲ف}} + \cdots + (\text{ل}+\overline{\text{ن}-\text{۱}}\,\text{ف})$

$= \dfrac{\text{ن}}{\text{۲}}\left[\text{۲ل} + (\text{ن}-\text{۱})\text{ف}\right]$

(۶) ن واں مثلثی عدد = $\dfrac{\text{ن}(\text{ن}+\text{۱})}{\text{۲}}$

چھٹا باب

دُنیا کا حجم۔ علم مثلّث سے کیا کام لیا جا سکتا ہے

سکندر اعظم نے ۳۳۲ھ ق۔م میں مصر کو فتح کر کے یادگار کے طور پر بحیرۂ روم کے کنارے پر شہر اسکندریہ آباد کیا جس کی شہرت رفتہ رفتہ اتنی بڑھی کہ قدیم دُنیا کے تمام علوم مثلاً ریاضی، ہیئت، طب، مشین سازی وغیرہ اس میں کھنچ کر آ گئے اور ترقی کرنے لگے۔ جہاز رانی میں بھی یہ لوگ سب سے پیش پیش تھے۔ سکندر کی وفات (۳۲۳ھ ق۔م) کے بعد اس کے مشہور جرنیل بطلی موس نے (جو حکیم بطلی موس سے جدا شخص تھا) یادگار کے طور پر انسانی تاریخ میں سب سے پہلے منظم دارالعلوم کی بنا ڈالی جس کے ساتھ ایک عجائب خانہ، کتب خانہ اور جامعہ تھے۔ اس کے تین سو سال بعد جولیس سیزر کی فاتح فوجوں نے اس عظیم الشان مخزنِ علوم کو جلا ڈالا۔ رومیوں کی حکومت کے زمانے میں بھی اسکندریہ مہذب دُنیا کا علمی مرکز بنا رہا۔ لیکن تیسری صدی عیسوی میں عیسائی مذہبی اقتدار کے شروع ہوتے ہی یہ شمعِ علم خاموش ہو گئی۔ سینٹ سیرل کے مذہبی پیشواؤں نے اسکندریہ کے دوسرے کتب خانے کو جس میں علوم و فنون کا بیش بہا ذخیرہ موجود تھا جلا کر خاک کر دیا۔ ان کی دلیل یہ تھی کہ بائیبل خدا کا کلام ہے اور اس کے علاوہ اور کچھ پڑھنا شیطان کی شاگردی ہے۔ تیسری صدی عیسوی سے

عربوں کی فتح مصر تک یعنی ساتویں صدی عیسوی تک اسکندریہ کا دور تاریک رہا۔ یہ خیال رکھنا ضروری ہے کہ اسکندریہ کا تمدّن برخلاف قدیم یونانی ورومی تمدّن کے ایک بین الملی تمدّن تھا۔

عربوں کی فتح مصر سے اسکندریہ کا روشن دور شروع ہوتا ہے۔ عربوں نے عددوں کے مشرقی طرزِ تحریر کو یونانی ریاضیات سے ملاکر نئی علمی ترقیوں کا دروازہ کھول دیا۔ اسکندریہ کا پہلا دور علم مثلّث کی ترقی کے لیے نمایاں ہے۔ اس دور میں علم ہندسہ اور علم مساحت میں ارتباط قائم کیا گیا۔ گنتی میں بڑے بڑے عدد استعمال ہونے لگے۔ اس ترقی کا اصل راز یہ تھا کہ ریاضی کا تعلق پہلے پہل عملی دنیا سے قائم ہونے لگا۔

جامعہ اسکندریہ کے ابتدائی دور میں ارس طارکوس (۳۱۰ تا ۲۵۰ ق-م) اور ارشمیدس (۲۸۷ تا ۲۱۲ ق-م) خاص طور پر قابلِ ذکر ہیں۔ ارس طارکوس نے سب سے پہلے زمین سے چاند اور سورج کے اضافی فاصلے محسوب کیے۔ ارشمیدس سب سے پہلا شخص تھا جس نے دائرے کے محیط اور اس کے قطر کی نسبت کی قیمت کسی مطلوبہ درجہ صحت تک معلوم کرنے کا طریقہ حاصل کیا۔ وہ میکانیکی ایجادوں کے لیے بھی بہت مشہور ہے جن میں بیرم اور تیرنے والے جسموں کا کلیہ خاص طور پر قابلِ ذکر ہیں۔ وہ افلاطون کی طرح روحانی گورکھ دھندوں اور خالص ذہنی مشغلوں میں گُم نہیں ہوا تھا۔ اس نے بیرم کے انصاب سے قوت کے فاصلوں میں رشتہ معلوم کیا اور آلہ جرِ ثقیل ایجاد کیا۔ کثافت اضافی کے قاعدے کی مدد سے اُس نے قیمتی دھاتوں میں کھوٹ معلوم کرنے کا طریقہ نکالا۔ π کی قیمت کی مدد سے پہیوں والی

مشینیں بنائیں اور دندانوں دار پہیوں کے ذریعے جہاز کو پانی میں اُتارنے کا طریقہ بتایا۔ اس نے ایک ایسا پمپ ایجاد کیا جس میں پیچ کے ذریعے پانی خارج کیا جاتا تھا۔ یہ تمام ایجادیں ریاضی اور عملی ضرورتوں کے ارتباط سے وجود میں آئیں۔ تقریباً سنہ ۱۰۰ ق م میں اسکندریہ کے ایک باشندے ہیرو (HIRO) نامی نے ایک کتاب لکھی جس میں تقریباً ایک سو ایجادوں کا ذکر ہے۔ جس میں قابلِ ذکر آلہ ارتفاع والسمت، دُہرا پمپ اور بھاپ انجن کا نمونہ ہیں۔ اس وقت کا تمدن اپنی ترقی میں سائنس کو عملی طور پر استعمال کر رہا تھا اور ایجادوں کی مانگ روز افزوں تھی۔

اسکندریہ کا یہ علمی دوْر ہر لحاظ سے عملی دنیا سے متعلق تھا۔ چناں چہ ہپارکوس نے (۱۰۸۰) ثابت ستاروں کی ایک فہرست مرتب کی۔ ارشمیدس نے کرۂ سماوی کی حرکت اور ستاروں کے مقام کی ظاہری تبدیلی کو واضح کرنے کے لیے ایک نمونہ تیار کیا جس میں پہیے کے ذریعے حرکت حاصل کی گئی تھی۔ ممکن ہے کہ اُس نے زاویوں کی جدولیں بھی جہازرانی کے متعلق عملی مسئلے حل کرنے کے لیے مرتب اور استعمال کی ہوں۔ اسکندریہ کے رومی حکومت میں داخل ہونے سے قبل ہی زمین سے چاند اور سورج کے فاصلے، اور زمین، چاند اور سورج کے محیط تقریباً معلوم کیے جا چکے تھے۔ چناں چہ زمین کے محیط کی محسوب شدہ قیمت اور موجودہ صحیح قیمت میں صرف پچاس میل کا فرق نکلتا ہے۔ شہر صور (TYRE) کے باشندے میرنیس (MARINUS) نے تقریباً سنہ ۱۵۰ء میں ارضی طول بلد و عرض بلد کے لحاظ سے زمین کے نقشے مرتب کیے۔ علم ہیئت کی اس ترقی نے زمین کی ساحت اور جہازرانی میں بہت مدد دی۔ بطلیموس

کی مشہور کتاب المجسطی دراصل ہپارکوس اور اس کے ہم عصروں کی تحقیقات پر مبنی ہی۔

چوتھے باب میں یہ بتایا گیا ہی کہ کسی چٹان کے پائیں تک پہنچنے کے بغیر علم ہندسہ کی مدد سے چٹان کی بلندی کس طرح ناپی جا سکتی ہی۔ بالکل اسی طرح اصطرلاب (یعنی آلۂ زاویہ پیما) کی مدد سے زمین کے دو مختلف مقاموں سے چاند یا سیارے کے ارتفاع معلوم کرکے زمین سے اُس فلکی جرم کا فاصلہ محسوب کیا جا سکتا ہی۔ اراطوس تینیس (ERATOS THENES) نے سب سے پہلے زمین کی مساحت کرکے علم ہندسہ اور جغرافیہ میں تعلق قائم کیا۔ اس کے طریقے کی انتہائی سادگی اس بات سے ظاہر ہوتی ہی کہ اُس نے ذیل کے صرف چار اصولوں سے کام کیا۔

(۱) بہت دُور سے آنے والی شعاعیں تقریباً متوازی ہوتی ہیں۔

(۲) دو متوازی خطوں کو قطع کرنے والا خط مساوی نظیر کے زاویے بناتا ہی۔

(۳) جب کوئی فلکی جرم راس پر ہو (یعنی عین سر پر ہو) تو اس کو مشاہدہ کرنے والے سے ملانے والا خط زمین کے مرکز میں سے گزرتا ہی۔

(۴) دوپہر کے وقت مشاہدہ کرنے والے میں سے گزرنے والے خط کے ایک نہ ایک نقطے پر سورج عین سمت الراس میں ہوتا ہی۔

پوسیڈونیس (POSEIDONIUS) نے ستارہ کینوپس (CANOPUS) کے مشاہدے سے زمین کے محیط اور نصف قطر کی قیمت معلوم کی۔ اصول کے لحاظ سے اس کا طریقہ وہی ہی جو عرب ہیئت دانوں نے قطب ستارے کے ارتفاع کی مدد سے زمین کا محیط معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا۔ علم ہندسہ کو عملی ضرورتوں کے لیے استعمال کرکے انسان نے یہ معلوم کیا کہ

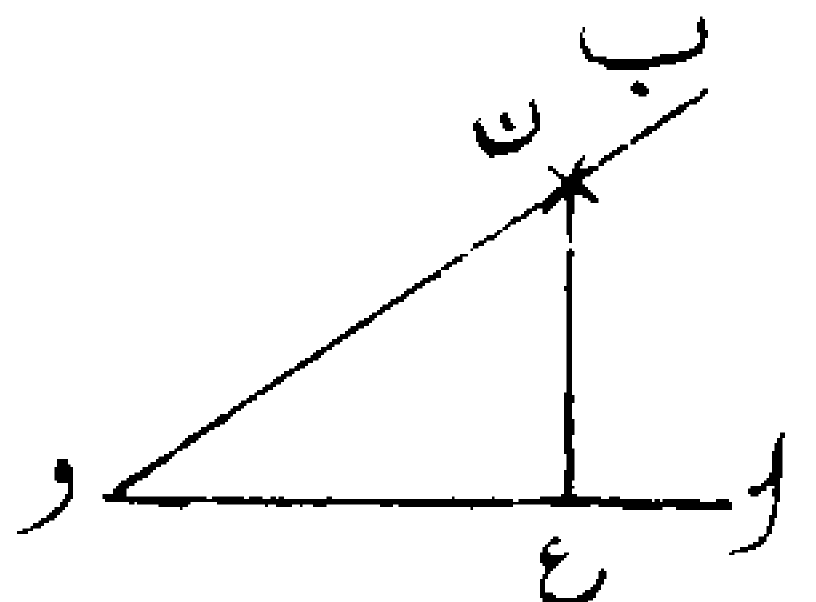
دُنیا کا بہت سا حصّہ ابھی دریافت طلب ہی۔

جب کوپرنیکس اور کیپلر (KEPLER) نے سیاروں کی حرکت کے متعلّق قاعدے معلوم کیے اور علمی دنیا پھر ارس طارکوس اور فیثاغورث کے نظریوں کے طرف متوجہ ہوئی تو ان نظریوں کی دل فریبی کی وجہ سے اس بطلی موسی ہیئت کے عملی فائدے نظر انداز کر دیے گئے جو مسلمانوں کے اخراج کے بعد اُندلس کی درس گاہوں میں یہودی ہیئت داں حاصل کرتے تھے۔ زمین کے محیط کی مساحت علم ہندسہ کے سادہ استعمال پر مبنی ہی۔ اگر ہم زمین پر ایک ہی طوُل بلد پر کے دو مقاموں کا فاصلہ معلوم کریں اور ان کے عرض بلد کا فرق بھی معلوم کریں تو زمین کا محیط فوراً حاصل ہوتا ہی کیوں کہ زمین کے محیط کو ان دو مقاموں کے درمیانی فاصلے سے وہی نسبت ہی جو ۳۶۰° درجے کو ان دوُ مقاموں کے عرض بلد کے فرق سے ہی۔ اگر ہم زمین سے چاند کا فاصلہ معلوم کرنا چاہیں تو ہم زمین پر کے دو مقاموں کا درمیانی فاصلہ معلوم کرتے ہیں اور زاویہ پیما کی مدد سے وہ زاویے معلوم کرتے ہیں جو چاند کو ان مقاموں سے ملانے والے خط ان دو مقاموں میں سے گزرنے والے خط کے ساتھ بناتے ہیں۔ ان زاویوں کی مدد سے چاند کے فاصلے اور زمین پر کے دو مقاموں کے فاصلے کی نسبت حاصل ہوتی ہی جس سے چاند کا فاصلہ فوراً نکلتا ہی۔ تقریباً اِسی طریقے سے سورج کا فاصلہ بھی معلوم کیا جا سکتا ہی لیکن سورج کی بہت بڑی دوُری کی وجہ سے زاویوں کی صحیح پیمائش میں کئی عملی مشکلیں پیدا ہوتی ہیں۔ اگر مثلّث کا ایک زاویہ قائمہ زاویہ ہو جائے تو عمل میں اور بھی آسانی ہوتی ہی۔ اسکندریہ کے ہیئت دانوں نے اس عملی ضرورت

کے لیے قائمہ زاویہ والے مثلّث کے ضلعوں کی نسبتوں کی جدولیں مرتب کیں۔ انھوں نے یونانی علم ہندسہ سے ایک نیا علم یعنی علم مثلّث ایجاد کیا۔ فلکی جِرموں کے فاصلے معلوم کرنے کے طریقے پر بحث کرنے سے پہلے ہم علم مثلّث کے جدولوں کی کسی قدر تشریح کریں گے۔

کسی زاویے کی جیب معلوم کرنا

فرض کرو کہ ا و ب ایک حادّہ زاویہ ہے جس کی جیب کی قیمت عملی طور پر معلوم کرنا ہے۔ خط و ب پر نقطہ ن اس طرح لو کہ و ن = ایک اکائی طول مثلاً ایک فٹ نقطہ ن سے و ا پر عمود ن ع نکالو اور اس کا طول ناپو۔ تب $\frac{ن ع}{و ن}$ کی قیمت کو زاویہ ا و ب کی جیب کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ و ن اور ن ع کو کافی صحت کے ساتھ ناپنے سے جیب کی قیمت بھی کافی صحت کے ساتھ اس عملی طریقے سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ اس طریقے



سے مختلف حادّہ زاویوں کے جیب معلوم کر کے ان کی جدول مرتب کی جا سکتی ہے۔ یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ قائمۃ الزاویہ مثلّث ع ن و میں ضلع $\overline{ع ن}$ ہرگز بڑا نہیں ہو سکتا وتر $\overline{و ن}$ سے۔ اس لیے زاویہ ا و ن کی جیب یعنی $\frac{ن ع}{و ن}$ کی قیمت کسی صورت میں ایک سے بڑی نہیں ہو سکتی۔ جیسے جیسے زاویہ ا و ن قائمہ زاویہ کے قریب آتا جاتا ہے۔ ع ن تقریباً مساوی ہوتا جاتا ہے و ن کے، اس لیے اگر زاویہ ا و ن مساوی ہو جائے قائمہ زاویہ کے تو اس کی جیب ایک کے

مساوی ہو جائے گی۔ اس نتیجے کو ہم اس طرح لکھتے ہیں جب ۹۰° = ۱
اگر زاویہ ل و ب گھٹ کر صفر کے بہت قریب آ جائے تو ع ن کا طول
بہت چھوٹا ہوتا ہے۔ اس لیے $\frac{\text{ع ن}}{\text{و ن}}$ کی قیمت تقریباً صفر کے مساوی
ہوتی ہے۔ اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ جب (صفر) = صفر۔ اگر کسی
زاویہ ل و ن کی جیب مساوی ہے ک کے تو ہم لکھتے ہیں۔ جب (ل و ن) = ک

اوپر کے بیان میں ہم نے آسانی کی خاطر و ن = ایک اکائی طول
لیا ہے۔ اگر اس کی بجائے و ن کی کوئی قیمت لی جائے یعنی خط و ب
پر نقطہ ن کہیں بھی لیا جائے اور ن سے و ل پر عمود ن ع نکال کر
حسب بالا طریقے سے جب (ل و ن) کی قیمت معلوم کی جائے تو بھی
وہی قیمت حاصل ہوگی جو پہلے حاصل ہوئی ہے۔

اب اسی شکل کی مدد سے اور دو کار آمد مثلثی نسبتوں کی تشریح
کی جائے گی۔ نسبت $\frac{\text{و ع}}{\text{و ن}}$ کو زاویہ ل و ب کی جیب التمام
کہتے ہیں اور اس کو علامت جم (ل و ب) سے تعبیر کیا جاتا ہے۔
یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ اگر دو زاویے ایسے ہوں کہ ان کا مجموعہ
ایک قائمہ زاویہ یعنی ۹۰° کے مساوی ہو تو ایک زاویے کی جیب دوسرے
زاویے کی جیب التمام کے مساوی ہوتی ہے۔ مثلاً جب ۵۰° = جم ۴۰°
اور جب ۴۰° = جم ۵۰°

اس نتیجے سے یہ قاعدہ حاصل ہوتا ہے کہ اگر ہم صفر درجے سے لے کر
۹۰° تک مناسب وقفوں سے زاویوں کی جیب معلوم کریں تو اسی
جدول کی مدد سے انھی زاویوں کی جیب التمام لکھی جا سکتی ہے۔

اوپر کی شکل میں، نسبت $\frac{\text{ع ن}}{\text{و ع}}$ کو زاویہ ل و ب کا مماس کہتے

ہیں اور اس کو علامت مس (لہ و ب) سے تعبیر کرتے ہیں شکل سے ظاہر ہے کہ مس (لہ و ب) = $\frac{\text{ع ن}}{\text{و ع}} = \frac{\frac{\text{ع ن}}{\text{و ن}}}{\frac{\text{و ع}}{\text{و ن}}} = \frac{\text{جب ا و ب}}{\text{جم ا و ب}}$ پس مماس کی قیمت جیب اور جیب التمام کی جدولوں کی مدد سے سادہ تقسیم کے ذریعے حاصل کی جاسکتی ہے یا شکل کی مدد سے ع ن اور و ع کو ناپ کر محسوب کی جاسکتی ہے۔

ذیل کی جدول میں ۵، ۵ درجوں کے وقفے سے صفر سے ۴۵° تک کے زاویوں کی جیب، جیب التمام اور مماس کی تقریبی قیمتیں دی گئی ہیں۔

زاویہ	صفر	۵°	۱۰°	۱۵°	۲۰°	۲۵°	۳۰°	۳۵°	۴۰°	۴۵°
جیب	۰	٫۰۸۷	٫۱۷۴	٫۲۵۹	٫۳۴۲	٫۴۲۳	٫۵۰۰	٫۵۷۴	٫۶۴۳	٫۷۰۷
جیب التمام	۱	٫۹۹۶	٫۹۸۵	٫۹۶۶	٫۹۴۰	٫۹۰۶	٫۸۶۶	٫۸۱۹	٫۷۶۶	٫۷۰۷
مماس	۰	٫۰۸۸	٫۱۷۶	٫۲۶۸	٫۳۶۴	٫۴۶۶	٫۵۷۷	٫۷۰۰	٫۸۳۹	۱

اس جدول کی مدد سے ہم ۴۵° سے ۹۰ تک کے زاویوں کی جیب، جیب التمام اور مماس کی قیمتیں بھی محسوب کر سکتے ہیں۔ مثلاً اگر ہمیں جب ۶۰° معلوم کرنا ہو تو ہم جانتے ہیں کہ جب (۶۰°) = جم (۹۰° − ۶۰°) = جم ۳۰° = ۰٫۸۶۶

اور جیب اور جیب التمام کی قیمتوں کی مدد سے کسی حادّہ زاویہ کے مماس کی قیمت محسوب کی جاسکتی ہے۔ مثلاً مس ۷۰° = $\frac{\text{جب ۷۰°}}{\text{جم ۷۰°}} = \frac{\text{جم ۲۰°}}{\text{جب ۲۰°}} = \frac{٫۹۴۰}{٫۳۴۲}$

= ۲٫۷۴۸ تقریباً

اگر اسی طرح سے ہم مس (۸۵°) کی قیمت معلوم کرنا چاہیں تو حاصل ہوگا

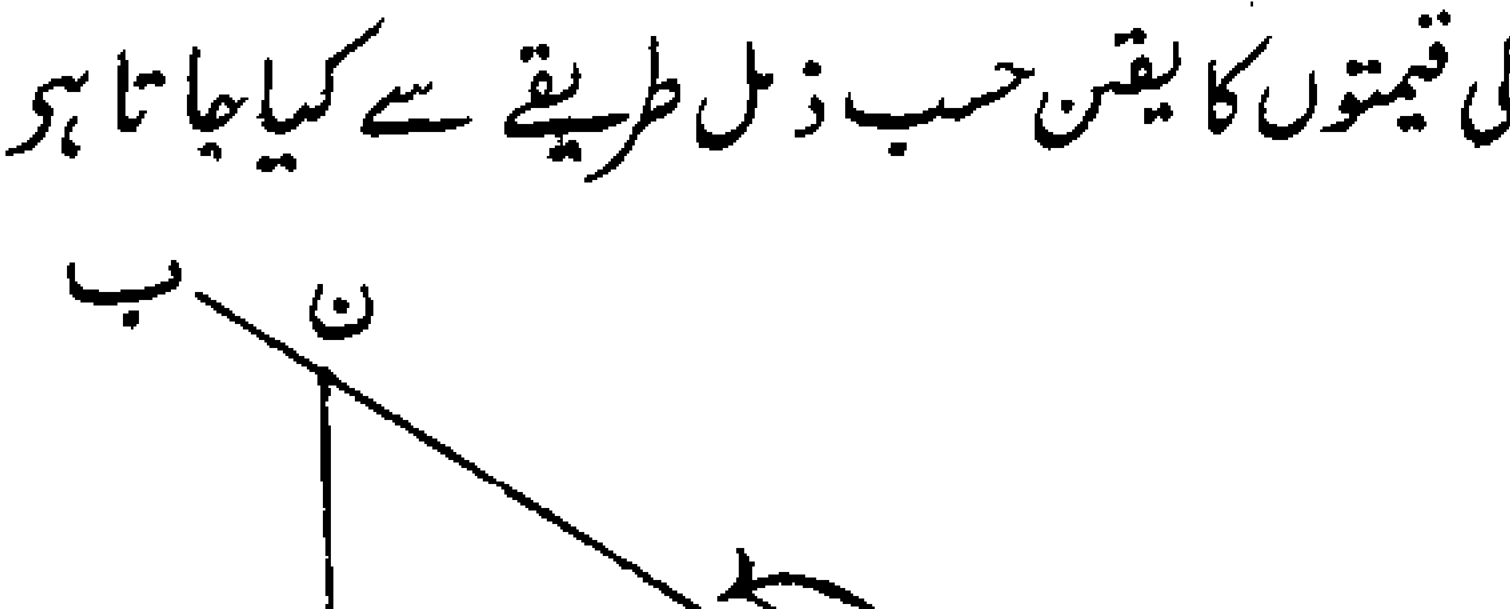
مس ۸۵° = $\frac{\text{جم ۵°}}{\text{جب ۵°}} = \frac{٫۹۹۶}{٫۰۸۷}$ = ۱۱٫۴۳

اب جیسے جیسے زاویہ قریب آتا ہے قائمہ زاویہ کے اس زاویے کی

جیب التمام بہت چھوٹی ہوتی جاتی ہے۔ اس لیے ۹۰ کے قریب کے زاویے کا مماس بہت بڑا عدد ہوتا ہے۔ اس نتیجے کو ہم یوں بھی بیان کرتے ہیں کہ مس ۹۰° = لامتناہی۔ اس کا مطلب صرف یہ ہے کہ زاویے کو ۹۰° کے کافی قریب لینے سے اس زاویے کے مماس کو جتنا بڑا چاہیں بنایا جا سکتا ہے۔ لامتناہی کے لیے علامت ∞ استعمال کی جاتی ہے۔

ہم نے اختصار کی خاطر ۵، ۵ درجوں کے وقفوں سے جدول مرتب کی ہے۔ عملی کام کے لیے جو جدولیں کام آتی ہیں اُن میں ۶ منٹ یعنی ۱/۱۰ درجے کے وقفے سے زاویوں کی مثلثی نسبتیں درج ہوتی ہیں جو عملی ضرورتوں کے لیے بہت کافی ہیں کیوں کہ معمولی آلات سے اس سے زیادہ صحت کے ساتھ زاویے ناپے نہیں جا سکتے۔ زیادہ صحیح عمل کے لیے اس سے زیادہ صحیح جدولیں مرتب کی گئی ہیں۔ البتہ ان جدولوں کو مرتب کرنے کے لیے علمِ ہندسہ کے عملی طریقے کارآمد نہیں ہوتے کیوں کہ عملی پیمائش میں ہمیشہ خطا ہوتی ہے۔ اس لیے احصا کے نظری طریقے استعمال کیے جاتے ہیں۔

اگر زاویہ منفرجہ ہو یعنی ایک قائمہ زاویہ سے بڑا ہو تو اس کی مثلثی نسبتوں کی قیمتوں کا یقن حسب ذیل طریقے سے کیا جاتا ہے: ۔



فرض کرو کہ دیا ہوا منفرجہ زاویہ ا و ب ہے۔ ہم یہ خیال کر سکتے ہیں کہ ایک گھومنے والا خط ابتدائی مقام و ا سے شروع کر کے مخالف سمت ساعت میں گھوم کر مقام و ب پر پہنچا ہے اور اسی طرح سے

منفرجہ زاویہ ل ؤ ب مرتسم ہوا ہو۔ خط و ب کے کسی نقطے ن سے ل د ممدودہ (یعنی خارج شدہ) پر عمود ن ع نکالو۔ جبر و مقابلہ کی قرا داد (دیکھو ساتواں باب) کے مطابق اگر و ل کو مثبت مانا جائے تو و ع کو منفی ماننا ہوگا۔ نیز ع ن مثبت ہوگا۔

اس لیے جب ل ؤ ب = $\frac{ع ن}{و ن}$ = ایک مثبت مقدار

اور جم (ل ؤ ب) = $\frac{و ع}{و ن}$ = ایک منفی مقدار

پس معلوم ہوا کہ منفرجہ زاویے کی جیب مثبت ہوتی ہو اور جیب التمام منفی۔ نیز شکل سے یہ بھی آسانی سے حاصل ہوتا ہو کہ

جب (۱۸۰° - طہ) = جب طہ

اور جم (۱۸۰° - طہ) = -جم طہ

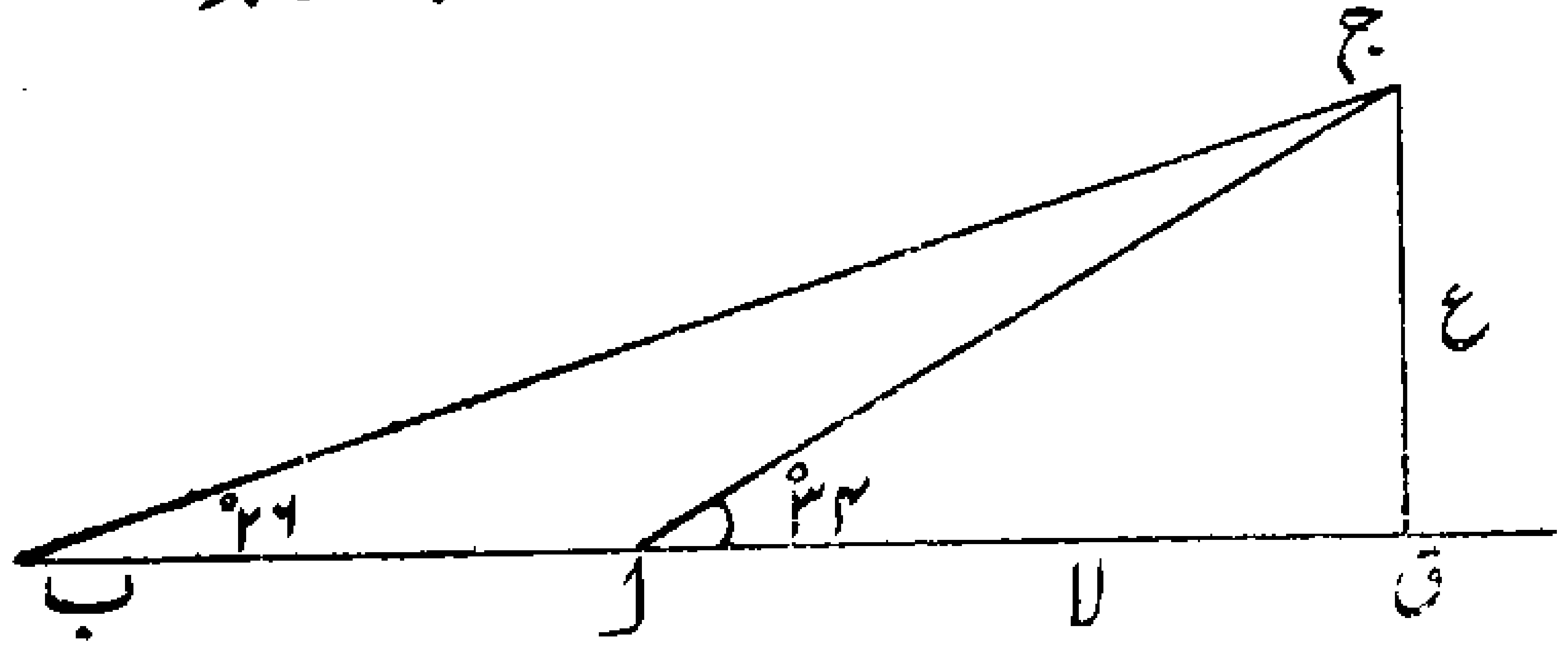
جہاں طہ کوئی حادّہ زاویہ ہو۔

اِن ضابطوں کی مدد سے کسی منفرجہ زاویے کی جیب یا جیب التمام کی قیمت حادّہ زاویے کی جیب یا جیب التمام کی رقوم میں حاصل کی جا سکتی ہو۔ مثلاً جم (۱۲۰°) = جم (۱۸۰° - ۶۰°) = - جم ۶۰° = $-\frac{۱}{۲}$

اور جب (۱۵۰°) = جب (۱۸۰° - ۳۰°) = جب ۳۰° = $\frac{۱}{۲}$

عملی فائدہ - ہم ان جدولوں کے ذریعے نہ صرف صحت سے نقشے تیار کر سکتے ہیں بلکہ زمین کی پیمائش بھی بڑی صحت سے کر سکتے ہیں۔ باب چہارم میں چٹان کی بلندی معلوم کرنے کا جو قاعدہ ہم نے بتلایا تھا اُس میں دو تین باتیں فرض کر لی گئی ہیں۔ یعنی یہ کہ ہم چٹان کے پائین میں سے گزرنے والے خط پر اِدھر اُدھر گھوم کر یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ کس مقام سے چٹان کا ارتفاع ۳۰° یا ۴۵° ہو۔ اس کے برخلاف اوپر کی جدول کی

مدد سے دو مقاموں ا اور ب سے چٹان کے ارتفاعی زاویے ناپ کر ذیل کے قاعدے سے چٹان کی بلندی محسوب کی جاسکتی ہے۔



ا اور ب مشاہدے کے دو مقام ہیں جو ایک چٹان کے پائیں میں سے گزرنے والے خط پر لیے گئے ہیں اور ان مقاموں کا درمیانی فاصلہ ف ہے۔ ا اور ب سے چٹان کی چوٹی کے ارتفاعی زاویے ۳۴ اور ۲۶ ہیں۔ نیز فرض کرو کہ ا سے چٹان کے پائیں کا فاصلہ لا ہے اور چٹان کی بلندی ع ہے۔ تب $\frac{\text{ع}}{\text{لا}} = \text{مس } 34^\circ = 0.674$ (جدول سے) $\therefore \text{لا} = \frac{\text{ع}}{0.674}$

نیز $\frac{\text{ع}}{\text{لا} + \text{ف}} = \text{مس } 26^\circ = 0.488 \quad \therefore \text{ع} = 0.488\,(\text{لا} + \text{ف})$

$$\therefore \text{ع} = 0.488\left(\frac{\text{ع}}{0.674} + \text{ف}\right)$$

اب اگر فاصلہ ف ناپ کر معلوم کیا جائے۔ مثلاً اگر ف = ۶۴ گز تو $\text{ع} = 0.488\left(\frac{\text{ع}}{0.674} + 64\right)$

اس کو حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ ع = ۱۱۳ گز تقریباً

اس مثال سے یہ واضح ہوتا ہے کہ کسی مثلث کا ایک ضلع اور دو زاویے معلوم ہوں تو ارتفاع معلوم کیا جاسکتا ہے اور اس کی رو سے بقیہ دو ضلعوں کے طول محسوب کیے جاسکتے ہیں۔ چناں چہ اوپر کی شکل میں $\frac{\text{ج ق}}{\text{ج ب}} = \text{جب } 26^\circ$۔ چوں کہ ج ق یعنی ع معلوم ہو گیا ہے اور

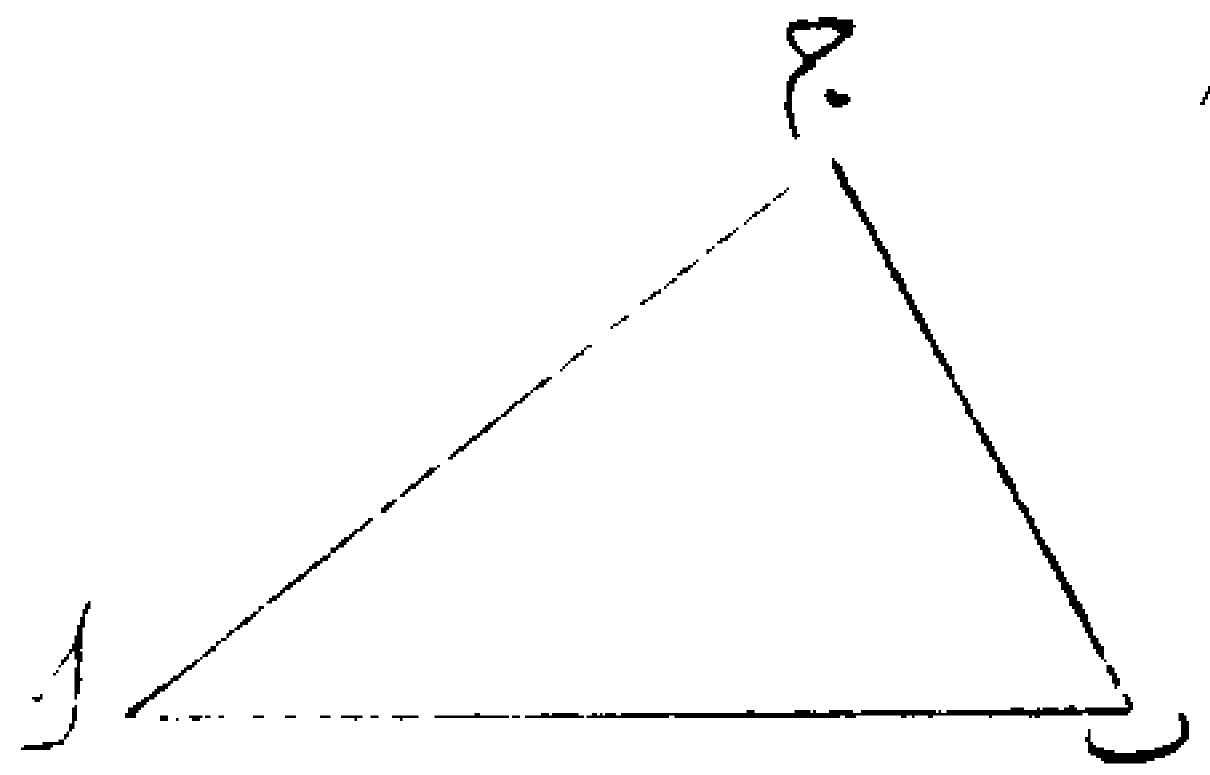
جب ۲۶° جدول سے معلوم ہو سکتا ہے اس لیے ج ب کا طول محسوب کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح ج ا، کا طول بھی محسوب کیا جا سکتا ہے۔

اس طرح اگر مثلث کے تینوں ضلعے معلوم ہوں تو ضابطہ $\text{جم ا} = \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ا}^2}{\text{۲ ب ج}}$ اور اس طرح کے دو اور ضابطوں کی مدد سے مثلث کے زاویے ا، ب، ج محسوب کیے جا سکتے ہیں۔

نیز انھی ضابطوں کی مدد سے اگر مثلث کے دو ضلعے اور ان کا درمیانی زاویہ معلوم ہو تو تیسرا ضلع محسوب کیا جا سکتا ہے۔ چناں چہ $\text{ا}^2 = \text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{۲ ب ج جم ا}$ اس کی مدد سے ضلع ا محسوب کیا جا سکتا ہے جب کہ ب، ج اور زاویہ ا معلوم ہوں۔

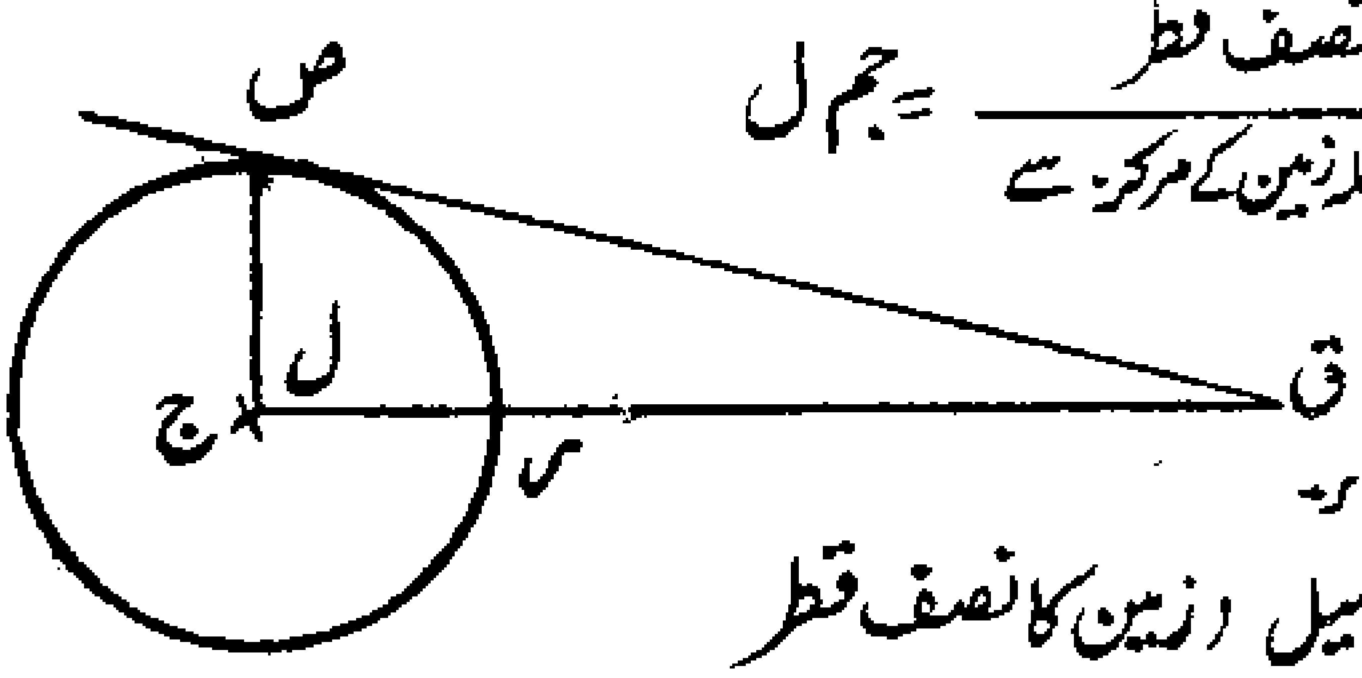
کسی خطۂ زمین کا نقشہ بنانا۔

پہلے دو مقاموں ا اور ب کا درمیانی فاصلہ نہایت صحت سے ناپ لیا جاتا ہے۔ پھر اصطرلاب (یعنی زاویہ پیما) کی مدد سے مقام ا پر فاصلہ ب ج کے مقابل زاویہ ناپ لیا جاتا ہے جہاں ج کوئی اور معین مقام مثلاً درخت ہے۔



پھر مقام ب پر فاصلہ ا ج کے مقابل زاویہ ناپ لیا جاتا ہے اس طرح اس مثلث کا ایک ضلع اور دو زاویے معلوم ہوتے ہیں۔ اس لیے جدول سے ضلعے ا ج، ب ج معلوم ہو سکتے ہیں۔ اس طرح دیے ہوئے کھیت یا خطۂ زمین کو مختلف موزوں مثلثوں میں تقسیم کر کے ہر ایک کی جدا جدا مساحت آسانی سے کی جا سکتی ہے اور کھیت کا نقشہ تیار ہو سکتا ہے۔

چاند کا فاصلہ زمین سے فرض کرو کہ دو رصدگاہیں م اور ص ایسی ہیں کہ اُن کے عرض بلد مساوی ہیں اور چاند کسی خاص آن پر ایک مقام ص کے افق پر اور دوسرے مقام م کے راس پر ہے۔ اور فرض کرو کہ ان مقاموں کے طول بلد کا فرق ل ہے۔ زمین کے مرکز کو ج سے اور چاند کو ق سے تعبیر کیا گیا ہے۔ اس طرح ہمیں ایک قائم الزاویہ مثلث ج ق ص ملتا ہے۔



جب (۹۰° ـ ل) = جم ل = $\frac{\text{زمین کا نصف قطر}}{\text{چاند کا فاصلہ زمین کے مرکز سے}}$

فرض کرو کہ ل = $89\frac{1}{16}°$

جدول سے جم $89\frac{1}{16}°$ = ۰۱۶۳ء۰

یعنی ∴ ۰۱۶۳ء۰ = $\frac{\text{۴۰۰۰ میل (زمین کا نصف قطر)}}{\text{چاند کا فاصلہ}}$

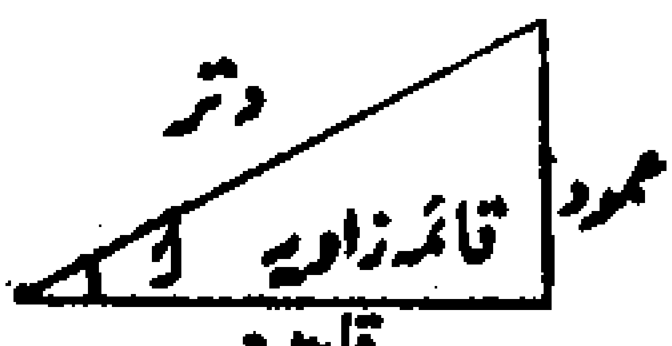
∴ چاند کا فاصلہ زمین کے مرکز سے = ۲۴۵۰۰۰ میل (تقریباً)

چاند کا فاصلہ معلوم ہونے کے بعد ہم اس کا محیط اور نصف قطر بھی معلوم کر سکتے ہیں۔ اس کے لیے ماہ کامل کے محیط پر دو متقابل داغوں (چاند کے دھبوں) کا مُشاہد کی آنکھ پر بننے والا زاویہ ناپا جاتا ہے۔ اگر یہ زاویہ ا ہو تو جب $\frac{ا}{۲}$ = $\frac{\text{چاند کا نصف قطر}}{\text{زمین سے چاند کا فاصلہ}}$ مشاہدے سے معلوم ہوتا ہے کہ ا = نصف درجہ، نیز جب $\frac{۱°}{۴}$ = ۰۰۴۴ء۰ (جدول سے)

= $\frac{\text{چاند کا نصف قطر}}{۲۴۵۰۰۰}$

∴ چاند کا نصف قطر = ۱۰۸۱ میل

ہم ایک اور کارآمد قاعدہ لکھتے ہیں۔



کسی مثلث قائمۃ الزاویہ میں

(عمود)^2 + (قاعدہ)^2 = (وتر)^2 یا $\left(\frac{\text{عمود}}{\text{وتر}}\right)^2 + \left(\frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}}\right)^2 = ۱$

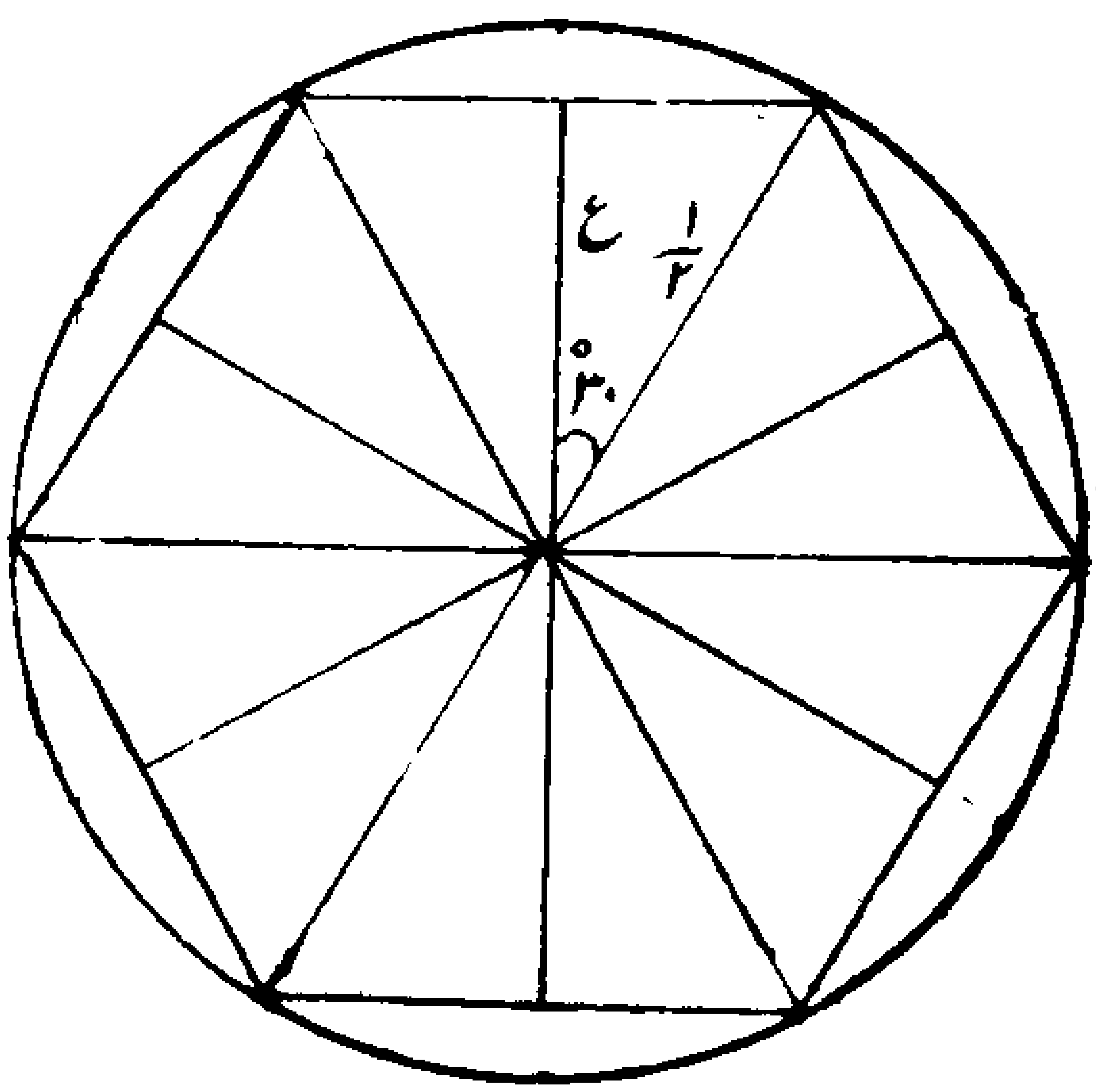
یا جب^{2} ل + جم^{2} ل = ۱

مثلاً اگر زاویہ ل = ۳۰°، جب ۳۰° = $\frac{1}{2}$ اس لیے اوپر کے قاعدے کی رو سے

(جم ۳۰°)^{2} + ($\frac{1}{2}$)^{2} = ۱ جس سے جم ۳۰° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

π کی قیمت

اہلِ بابل کی طرح یہودی بھی π کی قیمت ۳ کے مساوی خیال کرتے تھے۔ لیکن جب اسکندریہ کے ریاضی دانوں، بالخصوص ارشمیدس اور ہیرو نے نازک میکانکی آلے ایجاد کیے تو انھیں اندازہ ہوا کہ π کی قیمت کے لیے اس سے بہتر تخمینہ کی شدید ضرورت ہے۔ ارشمیدس نے π کی قیمت معلوم کرنے کے لیے جو طریقہ اختیار کیا اس سے پتا چلتا ہے کہ ہپارکوس سے پہلے اس نے مثلثی جدولیں تیار کرلی تھیں اور انھی سے کام لیا۔ کیوں کہ جب، اور مس، کی قیمت معلوم کرنے کے بعد ہم π کی قیمت کسی درجۂ صحت تک محسوب کرسکتے ہیں۔ ہم بتا چکے ہیں کہ کسی دائرے میں محیط اور قطر کی نسبت مستقل ہوتی ہے اور یہ ظاہر ہے کہ اگر کسی دائرے کے اندر اور باہر کثیر ضلعی شکلیں بنائی جائیں تو دائرے کا محیط ان



دونوں محیطوں کے درمیان ہوگا۔ فرض کرو کہ کثیر ضلعی کے ضلعوں کی تعداد ن ہے اور دائرے کا محیط = م اور قطر = ٥ = ١ تو نصف قطر = ١/٢، اور م = π

ہم اِن کثیر ضلعی شکلوں میں سے ہر ایک کو ٢ن قائم الزاویہ مثلثوں میں تقسیم کرتے ہیں جن میں سے ہر ایک کا مرکزی زاویہ ﻟ کے برابر ہے تو زاویہ ﻟ = ٣٦٠°/٢ن اس لیے بیرونی کثیر ضلعی کا محیط مب = ٢ن × ع

جہاں ع = ١/٢ مس (٣٦٠°/٢ن) مثلاً اگر ن = ٦، تو

مب = ٦ مس (٣٦٠°/١٢)
= ٦ مس ٣٠°
= ٣٫٤٨

اسی طرح داخلی کثیر ضلعی کا محیط (مد) = ن جب (٣٦٠°/٢ن)

اور اگر ن = ٦، مد = ٦ جب (٣٠°) = ٦ × ١/٢ = ٣

گویا π کی قیمت ٣ اور ٣٫٤٨ کے بین بین ہے یعنی اوسطاً ٣٫٢٤ ± ٠٫٢٤ کے بین بین ہے۔ جیسے جیسے ضلعوں کی تعداد بڑھے گی فرق کم ہوتا جائے گا اور ہم جب اور مس کی جدول سے π کی قیمت آسانی کے ساتھ معلوم کر سکتے ہیں۔

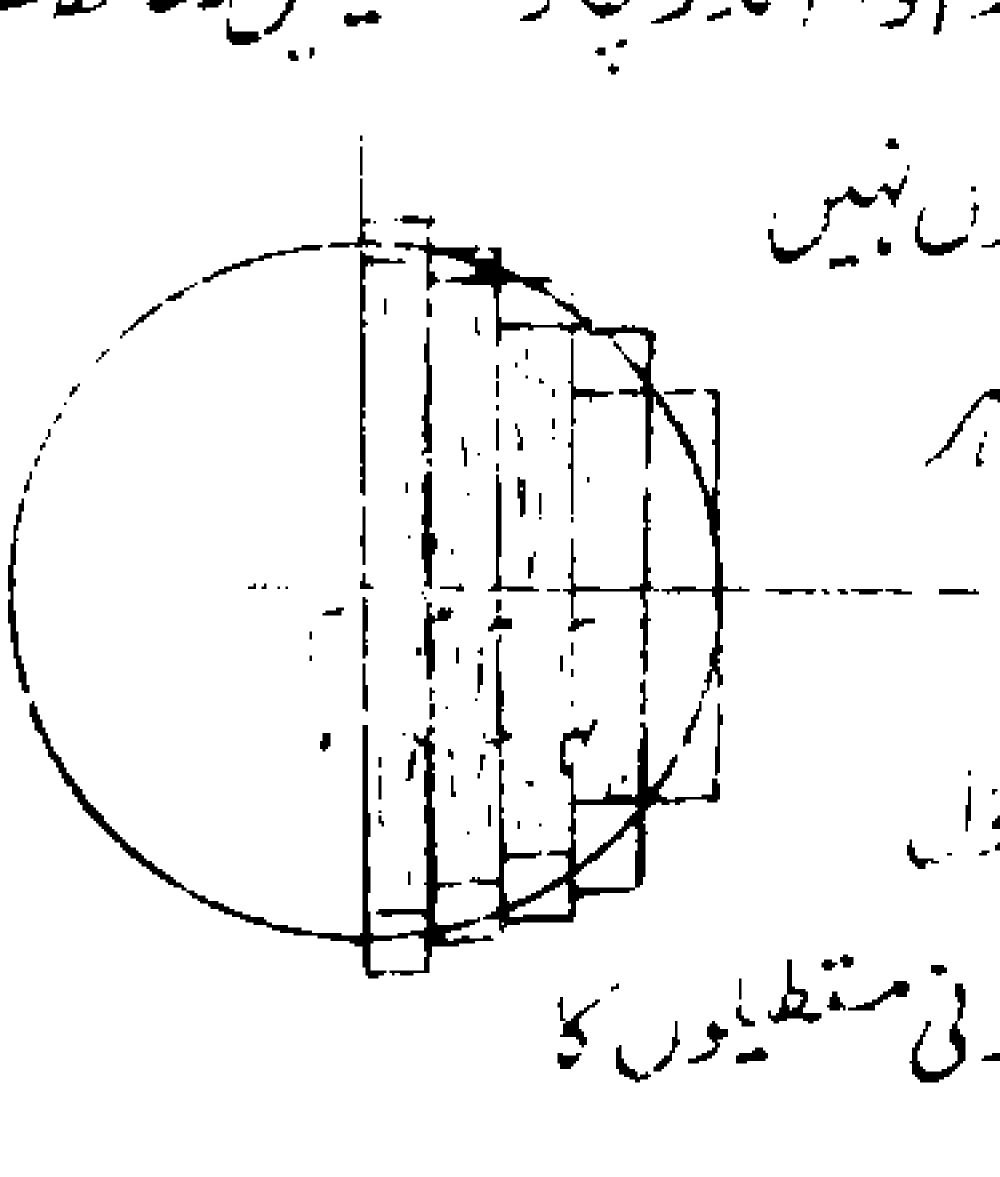
ارشمیدس نے π کی قیمت ٣ ١/٧ اور ٣ ١٠/٧١ کے درمیان لی۔ اہمیس (AHMES) کے مخطوطہ (PAPYRUS) (مورخہ ١٥٠٠ ق۔م تقریباً) میں π کی قیمت √١٠ یا ٣٫١٦ بتلائی گئی ہے۔ چینی تقویم ساز اور انجنیر بھی اس قیمت کو استعمال کرتے تھے۔ قریباً ٤٨٠ء میں ایک چینی انجنیر آبرسانی سو چنگ چی نے (جس نے ایک موٹر بوٹ بھی بنائی اور اس میں بحری کمپاس بھی لگایا) π کی قیمت کا تخمینہ حیرت انگیز طور پر صحیح لگایا ہے۔ یعنی ٣٫١٤١٥٩٢٦ اور

۳٫۱۴۱۵۹۲۷ کے درمیان وہ قاعدہ تو ابھی تک نہیں معلوم ہو سکا جس کی مدد سے اس نے اتنی صحیح قیمت اخذ کی تھی لیکن معلوم ہوا ہے کہ اُس زمانے میں جاپانی بھی ان قاعدوں کو استعمال کر رہے تھے جنھیں یورپ نے بعد میں تقریباً ۱۷۰۰ء سے استعمال کرنا شروع کیا۔ اور جب جاپانی جو چینیوں کے کے شاگرد تھے یہ طریقے جانتے تھے تو اغلب ہے کہ چینی بھی بہت پیشتر سے یہ قاعدہ جانتے ہوں گے۔ ممکن ہے کہ جب اور مس، والے ارشمیدس کے کے قاعدے چینیوں کو ارشمیدس کے زمانے میں یا اس سے پیشتر بھی معلوم ہوں۔

اس طرح جاپانیوں نے بھی π کی قیمت نہایت صحت کے ساتھ معلوم کر لی تھی۔ انھوں نے دائرے کو نہایت باریک مستطیلوں میں تقسیم کیا اور یہ قاعدہ استعمال کیا کہ دائرے کا رقبہ = $\pi \times$ ر^2 جہاں ر = نصف قطر۔ اس طرح اگر اکائی نصف قطر والا دائرہ ہو تو دائرے کا رقبہ = π

π کی قیمت معلوم کرنے کا جاپانی طریقہ

اگر کسی ترسیمی کاغذ پر ہم دائرہ بنائیں تو وہ دو قسم کے مستطیلی ٹکڑوں میں تقسیم ہو جائے گا۔ اب فرض کرو کہ ہم ایک نصف دائرے میں باہر کی طرف پانچ مستطیلیں بناتے ہیں۔ اور اندر چار مستطیلیں۔ ساتھ کے



خاکے سے ظاہر ہے کہ پانچویں مستطیل اندر کیوں نہیں بن سکتی اگر دائرے کا نصف قطر = ۱، تو ہر مستطیل کا عرض = $\frac{1}{5}$ فرض کرو کہ دائرے کا مرکز مبدا ہے اور مستطیل کا طول م اور ل ہیں۔ اس لیے مربع دائرے کی بیرونی مستطیلوں کا

$$\text{رقبہ} = \frac{1}{5}\text{م}_0 + \frac{1}{5}\text{م}_1 + \frac{1}{5}\text{م}_2 + \frac{1}{5}\text{م}_3 + \frac{1}{5}\text{م}_4 = \frac{1}{5}(\text{م}_0 + \text{م}_1 + \text{م}_2 + \text{م}_3 + \text{م}_4)$$

∴ پورے دائرے میں ایسی بنائی ہوئی مستطیلوں کا رقبہ =

$\frac{۴}{۵}$ (م۰ + م۱ + م۲ + م۳ + م۴)

اور اس طرح اندرونی مستطیلوں کا رقبہ = $\frac{۴}{۵}$ (م۱ + م۲ + م۳ + م۴)

فیثاغورث کے مسئلے سے م۰، م۱، م۲ ... کی قیمتیں معلوم ہو سکتی ہیں۔

اس طرح عمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ بیرونی مستطیلوں کا رقبہ = ۳،۴۴ تقریباً

اور اندرونی مستطیلوں کا رقبہ = ۲،۶۴ تقریباً

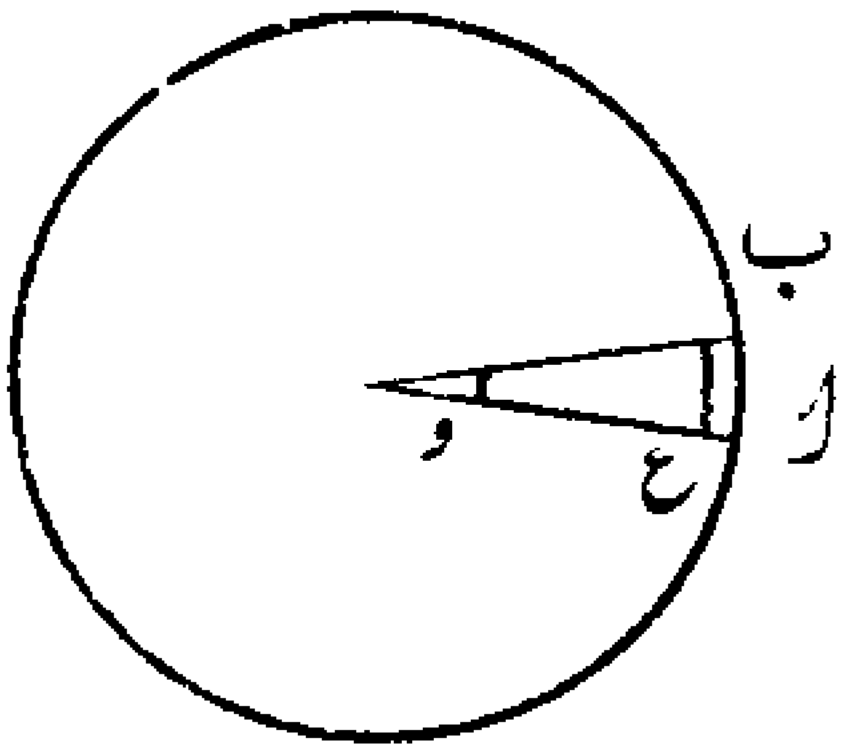
چوں کہ دائرے کا نصف قطر اکائی ہے، اس لیے دائرے کا رقبہ π ہے اور اس لیے π کی قیمت ۲،۶۴ اور ۳،۴۴ کے بین بین ہے۔

اسی طرح ن کی بڑی قیمت لینے سے π کی قیمت زیادہ صحت کے ساتھ حاصل کی جا سکتی ہے۔

نیم قطری قدیم زمانے میں زاویے کی اکائی درجہ تھی۔ بعدازاں زاویہ قائمہ کو اکائی تصور کیا گیا۔ پھر آلات کی ساخت میں جب مزید کسی موزوں اِکائی کی ضرورت ہوئی تو نیم قطری اکائی تجویز کی گئی۔ اگر کسی دائرے کے نصف قطر کے طول کے برابر ایک قوس لی جائے اور اس قوس کے سروں کو مرکز سے ملا دیا جائے تو مرکز پر بننے والا زاویہ نیم قطری کہلاتا ہے۔ اگر ہم نصف دائرے کے قوس کو سیدھا کریں تو اس کا طول نصف قطر کا π گنا ہوگا۔ گویا اگر م نصف قطر ہو تو دائرے کا محیط ۲ π م ہوگا اور اس لیے نصف محیط π م، اس لیے دو قائمہ زاویے = π نیم قطری۔

شکل کی مدد سے یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ چھوٹے زاویے کی جیب کی قیمت اس زاویے کے نیم قطری ناپ کے تقریباً مساوی

ہوتی ہے۔



کیوں کہ جب ا و ب = (ع ب)/(و ا) جہاں ب ع عمود ہے و ا پر۔

اور ا و ب کا نیم قطری ناپ = (قوس ا ب)/(و ا)

چوں کہ ع ب تقریباً مساوی ہے قوس ا ب کے

اس لیے جب ا و ب = ا و ب کا نیم قطری ناپ۔

اگر جدول سے ہم ۵° کی جیب معلوم کریں تو ہمیں ۵° کا نیم قطری ناپ حاصل ہوگا۔ اس سے سادہ تناسب کی مدد سے ۳۶۰° کا نیم قطری ناپ یعنی ۲ π کی قیمت حاصل ہوگی۔ اس طرح اگر جدولیں صحیح ہوں تو اس سے ہم π کی قیمت پانچ درجے اعشاریہ تک نکال سکتے ہیں۔ اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ π = ۳٫۱۴۱۵۹۔ اس وقت تک π کی قیمت اعشاریہ کے (۷۰۰) مقام تک معلوم کی جا چکی ہے۔ لیکن عملاً اس کاوش کی زیادہ ضرورت نہیں۔ کیوں کہ اگر π کی قیمت اعشاریہ کے دس مقام تک بھی صحیح معلوم ہو تو ہمیں زمین کا محیط انچوں کی کسروں تک معلوم ہو سکتا ہے اور اعشاریہ کے ۳۰ مقام تک یہ قیمت لینے سے تمام مرئی کائنات کا محیط خوردبین سے بھی زیادہ صحت سے محسوب کیا جا سکتا ہے۔ اچھے ہوائی جہازوں کی ساخت کے لیے π کی قیمت اعشاریہ کے ۴ مقام تک

لینا کافی ہے۔

اسکندریہ کا علمِ ہیئت

اجرامِ فلکی کی پیمائش کے لیے اسکندریہ کے ہیئت دانوں نے آبی گھڑیوں سے مدد لی۔ لیکن یہ گھڑیاں جہازرانی کے حسابوں میں کام نہ آسکتی تھیں۔ چناں چہ جہازرانی کے حسابوں کے لیے انھیں نہایت مشکل طریقے اختیار کرنے پڑتے تھے۔ جیسا کہ ہم بتا چکے ہیں ہپارکوس اور اس کے بعد ارسطارکوس نے اجرامِ فلکی کے فاصلے معلوم کرنے کی کوششیں کیں۔ ارسطارکوس نے ایک نہایت طولانی ہندسی طریقے سے یہ اندازہ لگایا کہ زمین سے آفتاب کا فاصلہ، زمین سے چاند کے فاصلے کے ۱۸ گُنے سے زیادہ اور ۲۰ گُنے سے کم ہے۔ اس اندازے کے مطابق زمین سے سورج کا فاصلہ ۴۵ لاکھ میل سے کچھ ہی زیادہ نکلتا ہے۔ اس کے اندازے کے مطابق سورج کا قطر زمین کے قطر کا تقریباً ۶ گنا ہے اور چاند کا قطر زمین کے قطر کا $\frac{1}{3}$ ہے (جدید پیمائشوں کے مطابق سورج کا فاصلہ ۱ کروڑ ۳۹ لاکھ میل ہے) ارسطارکوس کے اندازے میں غلطی کی اصل وجہ یہ تھی کہ اس زمانے میں حساس اور صحیح آلاتِ پیمائش موجود نہیں تھے۔

اپولونیس نے (جو علم ہندسہ کا ماہر تھا) فلکی پیمائشوں میں علم ہندسہ سے کام لیا۔ نیز سیاروں کی ظاہری حرکت کی توجیہہ ہم مرکز دوائر کی مدد سے کی تھی۔ ہپارکوس نے اپولونیس کے نظریوں کی مدد سے استفادہ کرکے اختلافِ سفر کا نظریہ پیش کیا۔ اس کے اندازے کے مطابق سورج کا فاصلہ، چاند کے فاصلے کا تقریباً ۲۰ گنا ہے۔ دو صدی بعد بطلیموس نے انھی مسئلوں پر غور کیا۔ مگر اس کو اپنے پیش روؤں سے کچھ زیادہ کامیابی

حاصل نہیں ہوئی۔ چناں چہ اس کے اندازے کے مطابق سورج کا فاصلہ زمین کے نصف قطر کا ۱۲۱۰ گنا نکلتا ہے، جو ہپارکوس کے تخمینے سے بھی کم ہے۔ اس نے زمین کا محیط اور زمین سے چاند کا فاصلہ بھی محسوب کیا۔ بطلیموس کو یہ بھی معلوم تھا کہ چاند کا ظاہری نصف قطر تقریباً $\frac{1}{2}^\circ$ ہے (یعنی چاند کے قطر کے مقابل مشاہد کی آنکھ پر $\frac{1}{2}^\circ$ کا زاویہ بنتا ہے) اس نے اپنے پیش روؤں کی ہیئتی تحقیقات کو منظم طور پر اپنی شہرہ آفاق کتاب "المجسطی" (۱۵۰ء) میں پیش کیا۔ اس کتاب سے عربوں نے اپنی ہیئتی تحقیقات میں بڑی مدد لی اور انھی کے توسط سے اس کتاب کے عربی ترجمے یورپ میں پہنچے جن کی مدد سے پندرھویں صدی کے بحری سیاحوں نے نقشے بنانا اور سمندر پر جہاز کا مقام متعین کرنا سیکھا۔ نیز انھیں یہ بھی معلوم ہوا کہ دنیا کا ایک بہت بڑا حصہ ابھی دریافت طلب ہے۔

اسکندریہ کا علم حساب

جہازرانوں کو سمندر پر اپنا مقام متعین کرنے کے لیے اور جنتری سازوں کو اچھی جنتریں بنانے کے لیے حسابی عملوں میں کافی مہارت کی ضرورت ہوتی ہے۔ اس قسم کے کارآمد حسابوں سے یونانی ریاضی داں ناآشنا تھے۔ حساب کو عملی ضرورتوں کے لیے استعمال کرنے کا سہرا اسکندریہ والوں کے سر ہے۔ ابتدا ہی میں ارشمیدس نے عملی کام میں حساب کی اہمیت کو محسوس کر کے π کی قیمت ایک کسر کی شکل میں حاصل کی۔ وہ پہلا ریاضی داں تھا جس نے گھٹتی ہوئی رقموں والا متدرج سلسلہ دریافت کیا۔ اس نے حسب ذیل شکل کے لاتناہی ہندسی سلسلے کا مجموعہ معلوم کیا۔

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$$

فرض کرو کہ اس سلسلے کا مجموعہ = ص

یعنی ص $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$

$\therefore$ $\frac{ص}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$

تفریق سے حاصل ہوتا ہے ص $- \frac{ص}{2} = 1$، یعنی $\frac{1}{2}$ ص $= 1$،

یعنی ص $= 2$

پس معلوم ہوا کہ اوپر کے لامتناہی سلسلے کا مجموعہ ۲ ہے۔

یہ خیال رہے کہ رقموں کی تعداد جیسے جیسے بڑھتی جاتی ہے ویسے ان رقموں کا مجموعہ ۲ کے قریب آتا جاتا ہے لیکن کبھی بھی ٹھیک ۲ کے ساوی نہیں ہوتا۔ اسی مفہوم کو اس طرح بھی ادا کیا جاتا ہے کہ رقموں کی تعداد کافی زیادہ لینے سے ان کے مجموعے کو ۲ کے جتنا قریب چاہیں لایا جاسکتا ہے۔

اوپر کی مثال میں ایک ایسا لامتناہی سلسلہ لیا گیا جس کی ہر رقم اپنی رقم ماقبل سے کم ہے۔ یہ خیال نہ کیا جائے کہ ہر ایسا لامتناہی سلسلہ متدق ہوتا ہے۔ مثلاً سلسلہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots$ میں ہر رقم اپنی رقم ماقبل سے چھوٹی ہے۔ لیکن یہ سلسلہ متدق نہیں ہے۔

کیوں کہ $(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) > 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ $(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) > 4 (\frac{1}{8}) = \frac{1}{2}$

اس لیے دیے ہوئے سلسلے کا مجموعہ $> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$

اور چوں کہ بائیں جانب میں جتنی دفعہ چاہیں $\frac{1}{2}$ لکھ سکتے ہیں اس لیے رقموں کی کافی تعداد لینے سے دیے ہوئے سلسلے کا مجموعہ کسی دیے ہوئے بڑے سے بڑے عدد سے بھی بڑا بنایا جا سکتا ہے۔ پس ثابت ہوا کہ دیا ہوا سلسلہ متدق نہیں ہے یعنی رقموں کی کافی تعداد لینے سے اُن کے مجموعے کو کسی محدود عدد کے بے حد قریب نہیں لایا جا سکتا یعنی سلسلے

کی ن رقموں کا مجموعہ کسی محدود انتہا کی طرف مائل نہیں ہوتا جب کہ ن بے حد بڑا ہوتا جاتا ہو۔

جیسا کہ ہم اوپر بتا چکے ہیں، اسکندریہ کے تمدّن کے پہلے دوَر میں ہئیت اور میکانیات کے سلسلے میں فنِ پیمایش نے بیش بہا ترقی کی۔ انھیں ایسے بڑے بڑے عددوں پر حساب لگانے کی ضرورت پیش آئی جس کے لیے ان کی عددوں کی مروّجہ ترقیم قطعی ناموزوں تھی۔ اس لیے اسکندریہ کے تمدّن کے دوسرے دوَر میں اس بات کی بہت کوشش کی گئی کہ بڑے بڑے اعداد پر جلد جلد حساب لگانے کا ایک سادہ اور موزوں طریقہ ایجاد کیا جائے۔ اس سلسلے میں علم ہندسہ اور حساب میں ربط پیدا کیا گیا اور ہندسی شکلوں کی مدد سے نئے نئے گُر نکالے گئے۔

دایوفنتس (۲۵۰ء) نے جبر و مقابلہ کی بنیاد ڈالی جس کو تقریباً ڈیڑھ سو سال بعد ہندی ریاضی دانوں نے فروغ دیا۔ اس نے عددوں کی ضرب میں علامتوں کا قانون بیان کیا۔ یعنی دو مثبت یا دو منفی مقداروں کا حاصل ضرب مثبت ہوتا ہے اور دو مختلف العلامت عددوں کا حاصل ضرب منفی ہوتا ہے۔ مثلاً $(-۳) \times (-۴) = +۱۲$

اور $(-۳) \times (۴) = -(۱۲)$

اسکندریہ کے ریاضی داں ثھیان (THVN) نے گنتارے کی مدد کے بغیر عددوں کو ضرب دیا۔ نیز اس نے زاویوں کی مثلثی نسبتوں کی تیاری کے ضمن میں عددوں کے جذر معلوم کرنے کا حسب ذیل طریقہ بھی ایجاد کیا۔

فرض کرو کہ ہمیں $\sqrt{۲}$ معلوم کرنا ہے $۲ = \frac{۲۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰}$

$\therefore \sqrt{۲} = \sqrt{\frac{۲۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰}} = \frac{\sqrt{۲۰۰۰۰}}{۱۰۰}$ اور چوں کہ $۱۴^۲ = ۱۹۶$، اور $۱۵^۲ = ۲۲۵$

∴ $\sqrt{۲۰۰}$ ، ۱۴ سے بڑا اور ۱۵ سے چھوٹا ہے

∴ $\sqrt{۲}$ بڑا ہے $\frac{۱۴}{۱۰}$ سے اور چھوٹا ہے $\frac{۱۵}{۱۰}$ سے

اب فرض کرو کہ $\sqrt{۲}$ = $\frac{۱۴}{۱۰}$ + (فرلا)، یعنی $\sqrt{۲}$ = ۱٫۴ + (فرلا)

جہاں (فرلا) ایک چھوٹی دریافت طلب مقدار ہے

$(\sqrt{۲})^2$ = (۱٫۴ + فرلا)^2 یعنی ۲ = (۱٫۴)^2 + (فرلا)^2 + ۲ × ۱٫۴ × (فرلا)

∴ ۲ − ۱٫۹۶ = ۲٫۸ (فرلا) + (فرلا)^2

اگر (فرلا)^2 جو بہت چھوٹی ہے نظرانداز کردی جائے تو حاصل ہوتا ہے

کہ فرلا = $\frac{۲ - ۱٫۹۶}{۲٫۸}$ = $\frac{۰٫۰۴}{۲٫۸}$ = ۰٫۰۱۴ تقریباً

∴ $\sqrt{۲}$ = ۱٫۴ + (فرلا) = ۱٫۴ + ۰٫۰۱۴

= ۱٫۴۱۴ تقریباً

$\sqrt{۲}$ کی تقریبی قیمت ۱٫۴۱۴ لے کر اسی طریقے کو دوبارہ استعمال کرنے سے $\sqrt{۲}$ کی قیمت کا اور بہتر تقرب معلوم کیا جاسکتا ہے۔

اس طریقے سے کسی عدد کا جو کامل مربع نہ ہو کسی مطلوبہ درجہ صحت تک جذر معلوم کیا جا سکتا ہے۔

یہ طریقہ نہایت طولانی ہے۔ کسی عدد کا جذر معلوم کرنے کے لیے تھیوں کا یہ طریقہ تفرقی احصا کے ایک اہم تصور کی طرف ہماری رہ نمائی کرتا ہے۔ .... ارشمیدس نے π کی قیمت معلوم کرنے کے لیے جو طریقہ اختیار کیا وہ دراصل تکمیلی احصا کا ایک بنیادی تصور ہے۔ طول بلد اور عرض بلد کے حوالے سے ہپارکوس نے جو ارضی نقشے بنائے تھے اور اپولونیس نے جن منحنی شکلوں پر تحقیقات کی تھی ان میں ہندسہ تحلیلی کا اساسی تصور موجود ہے۔ دایوفنتیں نے جبر و مقابلہ کی بنیاد ڈالی سولھویں

اور سترھویں صدی عیسوی کی تمام اہم تحقیقات دراصل اسکندریہ کے انھی ریاضی دانوں کی مرہونِ منت ہیں۔ یہ کہنا درست نہیں کہ سلطنت روما کے زوال کی وجہ سے اسکندریہ کا علمی دور ختم ہوگیا بلکہ زیادہ صحیح توجیہ یہ ہے کہ اپنے ماحول کے لحاظ سے اسکندریہ کا تمدن اپنی انتہا پر پہنچ چکا تھا اور مزید ترقی ناممکن تھی تا وقتیکہ عددوں کی ترقیم اور حسابی طریقوں میں مزید ترقی نہ کی جائے۔ ہندی تمدن کی نمایاں خصوصیت یہ ہے کہ انھوں نے صفر (عدم محض) کو ایجاد کر کے مزید ترقی کی شاہراہیں کھول دیں۔

یاد رکھنے کی باتیں

(۱) جب ۰ = ۰، مس ۰ = ۰، جم ۰ = ۱

(۲) جب ل = جم (۹۰° - ل)، جم ل = جب (۹۰° - ل)

(۳) $\therefore$ کے معنی اس لیے

(۴) $\because$ کے معنی چوں کہ

ساتواں باب

جبرو مقابلہ کی ابتدا اور صفر کی ایجاد

ایسے زمانے میں جب کہ باوجود ہر قسم کی ترقی کے حساب دانوں نے سوائے ایک بھونڈے گنتی کے طریقے اور گنتارے کی ضرب کے اور کچھ نہ سیکھا تھا ہندستان میں پہلی صدی عیسوی میں صفر کی ایجاد اور عدد کی مقامی قیمت کا تعین یقیناً ایک عظیم الشان واقعہ ہے (۱۰۰ ق۔م) میں چین میں گنتی کے لیے تصویری طریقہ رائج تھا لیکن وہ بھی حسابی عمل کے لیے موزوں نہیں تھا۔ صفر کی ایجاد سے پیش تر ۲ کو علامت = کی بجائے ح سے اور ۳ کو ≡ کی بجائے حے سے تعبیر کرتے تھے۔ عرب ریاضی داں ان عددوں کو ۱۱ اور ۱۱۱ سے تعبیر کرتے تھے جو بعد میں ۲ اور ۳ بن گئے۔ ہندستان میں یہ طرزِ تحریر ۱۰۰ ق۔م اور ۱۵۰ ق۔م کے درمیان رائج ہوا۔ انھوں نے صفر کے لیے سنسکرت کا لفظ شُنّیا (خالی) اختیار کیا جسے عربوں نے صفر اور اہلِ یورپ نے (CYPHER) اور پھر (ZERO) میں تبدیل کرلیا۔ عدم محض (لاشئ) کے لیے صفر کو عربوں نے ہی بعد میں استعمال کیا۔ لاپلاس کے بیان کے مطابق مقامی قیمت کا یہ طریقہ نہایت اہم تھا اور اسے علم حساب میں ممتاز ترین درجہ حاصل ہے۔ جبرو مقابلہ کی ابتدا بھی اسی زمانے میں ہندستان میں ہوئی۔ ہندستان کی پرانی کتابوں

(بیلاوتی وغیرہ) سے معلوم ہوتا ہے کہ ہندستانی ریاضی داں اس وقت محاصل لگان، سود اور قرض وغیرہ کے مسائل حل کرنے میں مصروف تھے۔ صفر کی ایجاد نے انسانی ذہن کو گنتارا کی قید سے آزاد کر دیا۔ اور بہت ہی سادہ طریقوں سے ایسے سوال حل کیے گئے جنھیں پہلے دایو فنتس (DIOPHANTUS) اور تھیون (THEON) نے نہایت ہی پیچیدہ طریقوں سے حل کیا تھا۔ جبر و مقابلہ میں اہلِ ہند اور عربوں کے لیے سب سے پہلا محرک گنتی اور شمار کے آسان قاعدوں کی تلاش تھی اور اس میں الخوارزمی نے اس قدر ترقی کی کہ جب تیرھویں صدی میں جبر و مقابلہ اور علم حساب اسپین سے یورپ آئے تو اسی کے نام پر ان علوم کا نام الخوارزم رکھا گیا جو بعد میں الگارتم اور پھر لوکارتم ہو گیا۔ دوسرا محرک گرداوری اور پیمائش کی روز افزوں ضرورتیں تھیں اور تیسرا محرک سلسلوں کا مطالعہ تھا۔

ہندستان کی سب سے پہلی ریاضی کی معلومہ کتاب لیلاوتی مصنفہ آریہ بھٹہ (۴۷۶ء) ہے۔ اس میں حساب کے چار بنیادی قاعدے درج ہیں۔ نیز دایو فنتس کی علامتوں کے قاعدے کو استعمال کیا گیا ہے۔ اس کے علاوہ جیب (SINE) کی جدولیں بھی $\frac{3}{4}$ ۳° کے وقفے سے دی گئی ہیں۔ اور π کی قیمت ۳٫۱۴۱۶ بتلائی گئی ہے۔ مختصر یہ کہ یہ ہندی ریاضی داں ریاضی کو اس مقام سے شروع کرتے ہیں جہاں اسکندریہ کے ریاضی دانوں نے ختم کیا تھا۔ چھٹی صدی عیسوی میں ہندستان کا دوسرا مشہور ریاضی داں برہما گپت (۵۹۸ء۔ ۶۶۰ء) حسابی سلسلوں اور مساواتوں کے حل سے بحث کرتا ہے۔ ان دونوں ریاضی دانوں نے یہ قاعدہ بیان کیا ہے کہ اگر

ا کوئی مقدار ہو تو ا × ۰ = ۰، ا + ۰ = ا، ا − ۰ = ا، نیز یہ ریاضی داں مسلسل اور غیر مسلسل کسروں کا استعمال بڑی کثرت سے کرتے ہیں۔ بارھویں صدی عیسوی میں ہندستان کے ایک اور ریاضی داں بھاسکراچاریہ نے کسریں شمار کنندہ اور نسب نما کو اُوپر اور نیچے (بغیر درمیانی لکیر کے) لکھنے کا طریقہ رائج کیا۔ مثلاً $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ کی بجائے وہ صرف $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{ا}}{\text{ب}}$ لکھتا تھا۔

آٹھویں صدی کے آخر میں بغداد علم و فن کا مرکز بن گیا اور خلفائے عباسیہ نے مصری، یونانی، عیسائی اور یہودی علما کو گراں قدر تنخواہ پر مامور کر کے ان زبانوں سے عربی میں مختلف علوم کی مشہور کتابوں کے ترجمے کروائے۔ تھوڑے ہی عرصے میں بطلی موس، ارشمیدس، اقلیدس اور افلاطون اور دیگر علما کی تصنیفوں کے ترجمے کیے گئے اور وہاں سے مسلمانوں کے ذریعے اسپین پہنچے جہاں نویں اور دسویں صدی میں علم کی شمع روشن ہوئی۔ عربوں میں تقویم سازی، ہئیت داں علما کے سپرد تھی۔ الخوارزمی، عمر خیام، الکرمی، جابر، اور البطامی کی تصنیفوں کے ترجموں ہی پر بعد کی صدیوں میں مغربی علوم و فنون کی بنیاد رکھی گئی۔ ہندستانی ریاضی اور عربی علوم و فنون یورپ میں دو طرف سے پہنچے۔ پہلے تو اسپین کی جامعات کے توسط سے اور دوسرے بحیرۂ روم میں صقلیہ (سسلی) کی تجارت کے ذریعے۔ چناں چہ سسلی کا ایک سکّہ، جس پر سنہ ۱۱۳۴ء درج ہے یورپ میں عربی ہندسوں کے استعمال کی پہلی مثال ہے۔ تقویم کے محافظ ہونے کی حیثیت سے عیسائی راہبوں کو ریاضی سے زیادہ دل چسپی تھی۔ چناں چہ ایک عیسائی ادی لارڈ (ADELARD) نے جو شہر باتھ (BATH) کا باشندہ تھا۔ اپنے آپ کو مسلمان ظاہر کر کے (تقریباً سنہ ۱۱۲۰ء میں) جامعہ قرطبہ میں تعلیم پائی اور

اقلیدس اور الخوارزمی کی کتابوں اور عربی ہیئتی جدولوں کا ترجمہ کیا۔ ایک اور عیسائی گرارڈ (GERARD) نے جامعہ طلیطلہ میں تعلیم پانے کے بعد (۹۰) عربی کتابوں کا ترجمہ کیا جس میں بطلیموس کی شہرہ آفاق تصنیف "المجسطی" بھی شامل تھی۔

تیرھویں اور چودھویں صدی عیسوی میں اطالیہ اور برطانیہ میں عربی ہندسے عام طور پر استعمال کیے جانے لگے۔ اگرچہ ان کے روکنے کے لیے عیسائیوں نے کئی ناکام کوششیں کیں۔ ایک ملحد پادری پاکیولو (PACIULO) نے خفیہ طور پر بھاسکراکے "علم حساب" کا ترجمہ کیا اور جذر نکالنے کے لیے تھیون کے طریقے کو اختیار کیا۔ تجارت کے سلسلے میں سب سے پہلے لیونارڈو فیبوناچی (LEONARDO FIBONACAI) نے تجارتی حساب پر ایک کتاب تصنیف کی۔ اس ریاضی داں کو ذیل کے سلسلے کی بنا پر دائمی شہرت حاصل ہو گئی ہے۔

$$۰، ۱، \frac{۱}{۲}، \frac{۲}{۴}، \frac{۳}{۸}، \frac{۵}{۱۶}، \frac{۸}{۳۲}، \frac{۱۳}{۶۴}، \frac{۲۱}{۱۲۸}، \ldots$$

اگر اس سلسلے کی ن ویں رقم کو $\frac{ر_ن}{و_ن}$ سے تعبیر کیا جائے تو ذیل کا قاعدہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{ر_ن}{و_ن} = \frac{ن_{۱-} + ن_{۲-}}{۲\,و_{ن-۱}}$$

اس سلسلے کو قانونِ توریت کے متعلق حالیہ تحقیقات میں مفید پایا گیا ہے۔ شہنشاہ فریڈرک ثانی نے اس ریاضی دان کی بڑی سرپرستی کی۔ اور اسی شہنشاہ کی سرپرستی میں جامعہ سیلرنو (SALERNO) شمالی یورپ کا مرکزِ علوم بن گئی۔ اور یہاں سے یہودی طبیبوں کے توسط سے اسپین کے علوم و فنون کی روشنی یورپ میں پھیلی۔

الگورتم۔ حساب کے نئے طریقوں (جنھیں یورپ میں ایک عرصے تک الگورتم سے موسوم کیا گیا) کی تشریح سے پہلے یہ بیان کر دینا مفید ہوگا کہ عددوں کی ترقیم کا عربی طریقہ اس قدر آسان تھا کہ اس نے انسان کے ذہن کو گنتارے کی قید سے آزاد کر دیا۔ عدد دو ہزار تین سو بتیس کو رومی ترقیم میں علامت (MMCCCXXXII) سے تعبیر کیا جاتا تھا لیکن عربی ترقیم میں اس کو (۲۳۳۲) سے ظاہر کیا جاتا ہے جو رومی طریقۂ ترقیم سے بہت آسان ہے۔ گویا اس عدد کو ہم نئے گنتارے کے چوتھے کالم (عمودی لڑی) کے دو دانوں، تیسرے کالم کے تین دانوں اور پہلے کالم کے دو دانوں سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ نیز عام طور پر عدد $۱۰^{ن}$ کو گنتارے کے (ن+۱) ویں کالم کے ایک دانے سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ اس طریقے سے $۱۰^{ن}$ کا مفہوم واضح ہوتا ہے جو اقلیدس کے ہندسی طریقوں میں موجود نہیں تھا۔ عددوں کی ہندسی تعبیر کے مطابق ۱۰ کو دس اکائی طول والے خط سے، $۱۰^{۲}$ کو اس مربع کے رقبے سے جس کے ہر ضلع کا طول ۱۰ اکائی ہے اور $۱۰^{۳}$ کو اس مکعب کے حجم سے جس کے ہر ضلع کا طول ۱۰ اکائی ہے تعبیر کیا جا سکتا ہے لیکن $۱۰^{۴}$، $۱۰^{۵}$، ... $۱۰^{۱۳}$ وغیرہ کی کوئی ہندسی تعبیر پیش نہیں کی جا سکتی۔ اکائی سے چھوٹے عددوں کے لیے بھی مندرجہ بالا ترقیم کی توسیع کی جا سکتی ہے۔ ۱ کو $۱۰^{۰}$ سے، $\frac{۱}{۱۰}$ کو $۱۰^{-۱}$ سے $\frac{۱}{۱۰۰}$ کو $۱۰^{-۲}$ سے اور $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ کو $۱۰^{-۳}$ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ عددوں کی اس ترقیم میں اساس دس اختیار کیا گیا ہے یعنی گنتارے کے ہر کالم کا ایک دانہ کالم ماسبق کے ایک دانے سے دس گُنا قیمت رکھتا ہے۔ اساس دس کے انتخاب کی وجہ یہ معلوم ہوتی ہے کہ سب سے پہلے انسان نے اپنی

دس انگلیوں کی مدد سے گنتی سیکھی۔ اگر ہم دس کی بجائے عدد ۵ کو اساس کے طور پر اختیار کریں تو عددوں کی ایک نئی ترقیم حاصل ہوگی ۔ اس ترقیم میں علامت ۲۴۳ سے ۳ اکائی اور چار پنجے تعبیر ہوں گے یعنی عدد تیئس تعبیر ہوگا۔ لیکن ہمارے لیے دس کی اساس عددوں کی ترقیم میں زیادہ کار آمد ہے۔

انگریزی میں علم حساب پر سب سے پہلی کتاب "گنتی کا فن" ۱۳۰۰ء تقریباً لکھی گئی۔ جس میں جمع، ضرب، تفریق وغیرہ کے قاعدے بیان کیے گئے ہیں۔ عددوں کی عربی ترقیم کے مطابق دو عددوں کا حاصل ضرب معلوم کرنے کے لیے ضروری ہے کہ ہمیں ۱۰ × ۱۰ تک پہاڑے اچھی طرح یاد ہوں۔ عربوں نے سب سے پہلے یہ پہاڑے تیار کیے۔ چودھویں صدی عیسوی میں حساب کا فن جرمنی میں اس قدر اہم سمجھا جاتا تھا کہ وہاں حساب کے فن دانوں کی ایک انجمن قائم کی گئی۔ عددوں کی تقسیم کا عربی طریقہ یورپ میں سب سے پہلے کیلنڈری (CALENDRI) نے ۱۴۵۱ء میں اختیار کیا۔ حساب کے ان طریقوں کے رواج کے ساتھ ساتھ یورپ نے گنتارے کا استعمال بہ تدریج ترک کیا۔ اور مشرق سے ہی فن طباعت اور کاغذ سازی سیکھ کر اشاعتِ علم میں سہولتیں بہم پہنچائیں۔

عددوں کی اس نئی عشری ترقیم نے حساب کے پرانے پیچیدہ طریقے دور کر دیے۔ ہندستان میں کسروں پر جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کے عمل کرنے کے لیے مکمل قاعدے مرتب اور مروج ہوئے۔ ۸۵۰ء میں مہاویر نے کسروں کی تقسیم کا قاعدہ بالکل وہی بتلایا ہے جو آج کل رائج ہے۔ عددوں کی ترقیم اور اساسی اعمال کی اس سہولت کی

بنا پر ہندستانیوں نے علم حساب کو بہت ترقی دی۔ ایسے حسابی عمل جنھیں قدیم یونانی ریاضی داں مشکل اور طولانی طریقوں سے کر سکتے تھے۔ ان نئے قاعدوں کی مدد سے نہایت آسانی سے کیے جانے لگے۔ اس حسابی ترقی کے ساتھ ساتھ جبر و مقابلہ کو بھی ترقی ہوئی۔ ہندستانیوں اور عربوں نے علم مثلث کی جدولوں میں (جو اسکندریہ میں مرتب کی گئی تھیں) کئی مفید تبدیلیاں کیں۔ ان جدولوں کی تیاری کے سلسلے میں عددوں کا جذر معلوم کرنے کے کارآمد طریقوں کی ضرورت پیش آئی۔ کسی عدد کا جذر معلوم کرنے کے لیے عربوں نے جو طریقہ معلوم کیا تھا وہ ذیل کی مثال سے واضح ہوتا ہے۔

$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{200}{100}} = \frac{\sqrt{200}}{10}$ ۔ اب ہمیں معلوم ہے کہ $(14)^2 = 196$ اور $(15)^2 = 225$ اس لیے $\sqrt{200}$ بڑا ہے ۱۴ سے اور چھوٹا ہے ۱۵ سے اس لیے $\sqrt{2}$ کی قیمت $\frac{14}{10}$ سے بڑی ہے اور $\frac{15}{10}$ سے چھوٹی ہے۔ اس طرح بہتر تقرب کے لیے ہم لکھ سکتے ہیں۔ $\sqrt{2} = \sqrt{\frac{20000}{10000}} = \frac{\sqrt{20000}}{100}$ اور حسب بالا طریقے سے معلوم ہوتا ہے کہ $\sqrt{2}$ بڑا ہے $\frac{141}{100}$ سے اور چھوٹا ہے $\frac{142}{100}$ سے۔ اس طریقے کو جاری رکھنے سے $\sqrt{2}$ کی قیمت کسی مطلوبہ درجہ صحت تک معلوم کی جا سکتی ہے۔ یورپ میں عددوں کے جذروں کی جدولیں سب سے پہلے اڈم ریس نے سنہ ۱۵۲۲ء میں شائع کیں۔ الکاشی سمرقندی نے تقریباً سنہ ۱۴۳۰ء میں π کے لیے قیمت ۳٫۱۴۱۵۹ حاصل کی۔ یورپ میں علامت اعشاریہ کے لیے نقطے کا استعمال سنہ ۱۴۹۲ء میں پیلازی (PELAZZI) نے رائج کیا۔ کسروں کی اس نئی ترقیم سے جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم میں بہت سہولت پیدا ہو گئی کیوں کہ اعشاریہ کی علامت

کے مقام کو ملحوظ رکھنے سے یہ عمل وہی ہو جاتے ہیں جو صحیح عددوں کے لیے استعمال کیے جاتے ہیں۔

اسکندریہ کے ریاضی دانوں کو علم ہیئت اور مکانیات مساواتیں کے سوالوں کے حل میں حساب کے فن پر توجہ کی خاص ضرورت ہوئی۔ ابتدا میں ہندی ریاضی دانوں نے تجارتی علم حساب کو فروغ دیا۔ ہمارے مدارس میں جو علم الحساب پڑھایا جاتا ہے وہ کچھ تو اُن قواعد کی مشق ہے جو ہندستانیوں اور عربوں نے دریافت کیے تھے اور کچھ مجرد عددوں اور ان کی جبری خاصیتوں سے تعلق ہے۔ مجرد عددوں اور ہندسوں اور ریاضی کے عمل کی مختصر نویسی کے استعمال کے سادہ اور سیدھے قاعدے آہستہ آہستہ ترقی کرتے ہوئے موجودہ شکل میں آئے ہیں۔ ڈایوفنٹس غالباً پہلا شخص تھا جس نے ان کے استعمال کی کوشش کی۔ صدیوں تک ریاضی داں ہر سوال کو ایک نئے قاعدے کی مدد سے حل کرتے رہے اور انھیں مختلف عام قاعدوں کے تحت لانے کی کوشش نہیں کی گئی۔ عربوں نے سب سے پہلے استقرائی منطق اور استقرائے حسابیہ کا مفید اور مدلل طریقہ، ایجاد و اختیار کیا۔ اب "جبر و مقابلہ" کی اصطلاح عام حسابی قاعدوں کے اس مجموعے کے لیے استعمال کی جاتی ہے جن کے ذریعے سوالات حل کیے جائیں خواہ وہ تفصیلی یا تشریحی جبر و مقابلہ ہو جس میں مختلف مختصر اشارے استعمال کیے گئے ہوں یا رمزی جبر و مقابلہ ہو۔ عربوں نے سب سے پہلے مساواتوں کا استعمال کیا۔ مغرب میں ڈیکارٹ نے سب سے پہلے دوسرے درجے کی مساوات کو اس شکل میں لکھا۔ ۳ لا^{۲} − ۵ لا + ۶ = ۰۔ صحیح عددوں کے لیے یونانی اپنے سارے

حروف تہجی استعمال کر چکے تھے اس لیے وہ تشریحی جبر و مقابلہ سے بڑھ کر رمزی تک نہیں پہنچ سکے۔ عددوں کی ہندستانی ترقیم نے اس دقت کو تو رفع کر دیا لیکن علامتوں کی یکسانیت عرصے تک حاصل نہ ہوسکی۔ یورپ میں عربوں کی پہلی مستعملہ علامت ا ـــــ کی ہے اور بعد ازاں جمع اور تفریق کے لیے + اور - استعمال کیے گئے۔ ۱۴۸۹ء میں پہلی یورپی مطبوعہ کتاب "تجارتی حساب" مصنفہ ایڈمین (WIE DMAN) میں یہ علامتیں استعمال کی گئیں اور سو سال بعد ریکارڈ (RECORD) نے ایک تجارتی حساب کی کتاب شائع کی جس میں =، × بھی استعمال کیے گئے۔ بعد ازاں ان علامتوں کا عام رواج ہو گیا۔

ریاضی کی ترقی کی اہم ترین منزلوں میں سے ایک منزل تشریحی جبر و مقابلہ سے رمزی جبر و مقابلہ کی طرف اقدام ہے۔ اگر ایک مرتبہ کوئی سوال کسی مساوات کی شکل میں اور معلومہ رموز اور علامتوں کی رقوم میں پیش کیا جائے تو مقررہ قاعدوں کے تحت آسانی سے حل کیا جا سکتا ہے۔ مگر اصل مرحلہ اسے عام زبان سے نکال کر ریاضی کی رمزی زبان کا جامہ پہنانا اور تمام شرطوں کے ساتھ معلومہ اصولوں کے تحت مساوات کی صورت میں بیان کرنا ہے۔ اس کے لیے حسب ذیل شرطیں ضروری ہیں:-

(۱) کونسا جزو کس کے ساتھ جمع، تفریق، ضرب، تقسیم کیا جائے۔
(۲) جملوں کو مختصر کرنے کے بعد حاصل کو جبری شکل میں پیش کرنا۔
(۳) آخری بیان ذیل کی صورت میں پیش ہونا چاہیے: مثلاً جو کمیت م ہم معلوم کرنا چاہتے ہیں وہ = فلاں عدد (۴) عدد جو ایک ہی

نوعیت کی مقداروں کے لیے استعمال ہوں وہ سب ایک ہی اکائیوں میں ہونے چاہییں۔ مثلاً رقمی سوالوں میں سب رُپوں یا پونڈوں میں، فاصلے کے سوالوں میں سب میلوں یا میٹروں میں اور (۵) حاصل شدہ جواب کی بنائی ہوئی جبری مساوات سے تصدیق۔

ان اصولوں کی وضاحت کے لیے ہم ذیل میں چند مثالیں پیش کریں گے۔

(۱) ایک بنک میں کسی شخص کے چالو کھاتے کی رقم اس کے معین کھاتے (FIXED DEPOSIT) کی رقم کی چوتھائی ہے۔ اگر کل رقم ۵۵۰ رُپے ہو تو ہر کھاتے میں کتنی کتنی رقم ہے۔

فرض کرو کہ چالو کھاتے میں ج رُپے ہیں اور معین کھاتے میں م رُپے ہیں پہلی شرط سے حاصل ہوتا ہے کہ م = ۴ج

چوں کہ کل رقم ۵۵۰ رُپے ہے اس لیے ج + م = ۵۵۰

پہلی شرط کی رُو سے یہ رشتہ ہو جاتا ہے کہ ج + ۴ ج = ۵۵۰ یعنی

۵ ج = ۵۵۰ ∴ ج = ۱۱۰

پس حاصل ہوا کہ اس شخص کے چالو کھاتے میں ۱۱۰ رُپے ہیں اور معین کھاتے میں ۴۴۰ رُپے ہیں۔

ظاہر ہے کہ یہ جواب سوال کی شرطوں کو پورا کرتا ہے۔

(۲) ایک ریل گاڑی لندن سے ایڈنبرا کو ٹھیک ایک بجے ۵۰ میل فی گھنٹے کی رفتار سے روانہ ہوتی ہے، دوسری ریل گاڑی ایڈنبرا سے لندن کی طرف ٹھیک ۴ بجے ۲۵ میل فی گھنٹے کی رفتار سے روانہ ہوتی ہے اگر لندن اور ایڈنبرا کا درمیانی فاصلہ (۴۰۰میل) ہو تو معلوم کرو کہ یہ ریل گاڑیاں ایک دوسرے سے کب اور

کہاں ملیں گی۔

لندن سے روانہ ہونے والی ریل گاڑی ایک بجے نکلتی ہے اور ایڈنبرا سے دوسری گاڑی چار بجے نکلتی ہے یعنی پہلی گاڑی کے ٹھیک ۳ گھنٹے بعد نکلتی ہے۔ ان تین گھنٹوں میں پہلی ریل گاڑی جس کی رفتار ۵۰ میل فی گھنٹہ ہے۔ ۳ × ۵۰ یعنی ۱۵۰ میل طے کرتی ہے۔ اس لیے اب ان دو ریل گاڑیوں میں صرف (۴۰۰ − ۱۵۰) یعنی ۲۵۰ میل کا فاصلہ ہے۔ فرض کرو کہ یہ دو ریل گاڑیاں چار بجے کے لا گھنٹے بعد ایک دوسرے سے ملتی ہیں۔ ان لا گھنٹوں میں پہلی ریل گاڑی ۵۰ لا میل طے کرتی ہے اور دوسری ریل گاڑی ۲۵ لا میل طے کرتی ہے اور چوں کہ دونوں ریل گاڑیاں مل جاتی ہیں، اس لیے

$$\text{۵۰ لا} + \text{۲۵ لا} = \text{۲۵۰}$$

$$\text{یعنی ۷۵ لا} = \text{۲۵۰}$$

$$\therefore \text{لا} = \frac{\text{۲۵۰}}{\text{۷۵}} = \frac{\text{۱۰}}{\text{۳}}$$

پس معلوم ہوا کہ چار بجے کے $\frac{\text{۱۰}}{\text{۳}}$ گھنٹے بعد یعنی ۳ گھنٹے ۲۰ منٹ یعنی ۷ بج کر ۲۰ منٹ پر یہ دونوں گاڑیاں ایک دوسرے سے ملتی ہیں۔ $\frac{\text{۱۰}}{\text{۳}}$ گھنٹوں میں دوسری ریل گاڑی ۲۵ × $\frac{\text{۱۰}}{\text{۳}}$ میل یعنی ۸۳$\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$ میل طے کرتی ہے۔ پس معلوم ہوا کہ یہ دونوں ریل گاڑیاں ایک دوسرے سے ایڈنبرا سے ۸۳$\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$ میل کے فاصلے پر ۷ بج کر ۲۰ منٹ پر ملتی ہیں۔

(۳) بتاؤ کہ تین روپے سیر والے ۵ سیر گھی میں ۲$\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$ روپے سیر والا کتنا گھی ملایا جائے تاکہ اس آمیزہ کی قیمت ۲$\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ روپے فی سیر ہو۔

فرض کرو کہ گھی کی مطلوبہ مقدار لا سیر ہے۔

تب لا سیر گھی کی قیمت بہ حساب ۲ ۱/۴ رُپے فی سیر = ۹/۴ لا رُپے

۳ رُپے سیر والے ۵ سیر گھی کی قیمت = ۱۵ رُپے

گھی کے آمیزہ کی مقدار = (لا + ۵) سیر اور اس آمیزہ کی قیمت

= (۹/۴ لا + ۱۵) رُپے آمیزہ کی قیمت ۲ ۱/۲ فی سیر ہے۔

اس لیے آمیزہ کی قیمت = ۵/۲ (لا + ۵) رُپے

اس لیے ۹/۴ لا + ۱۵ = ۵/۲ لا + ۲۵/۲

اس لیے ۱۵ - ۲۵/۲ = (۵/۲ - ۹/۴) لا

یعنی ۵/۲ = ۱/۴ لا

∴ لا = ۵/۲ × ۴/۱ = ۱۰

پس معلوم ہوا کہ ۳ رُپے سیر والے ۵ سیر گھی میں ۲ ۱/۴ رُپے سیر والا ۱۰ سیر گھی ملانے سے ایسا آمیزہ حاصل ہوگا جس کی قیمت ۲ ۱/۲ رُپے فی سیر ہے۔

(۴) پہلے باب کے اُس سوال پر غور کرو جو اکیلیز اور کچھوے کی دوڑ کے متعلق دیا گیا تھا۔

اکیلیز کی رفتار کچھوے کی رفتار کی دس گُنی ہے اور جب دوڑ شروع ہوتی ہے تو کچھوا اکیلیز سے ۱۰۰ گز آگے ہے۔ ہمیں وہ مقام معلوم کرنا ہے جہاں اکیلیز کچھوے کو پکڑتا ہے۔

فرض کرو کہ کچھوے کی رفتار (س) گز فی منٹ ہے تب اکیلیز کی رفتار (۱۰س) گز فی منٹ ہوگی۔ فرض کرو کہ دوڑ شروع ہونے کے (ت) منٹ بعد اکیلیز کچھوے کو پکڑتا ہے۔ (ت) منٹ میں اکیلیز فاصلہ (۱۰ س × ت) گز طے کرے گا۔ اور کچھوا فاصلہ

(۱۰ لاا ت) گز طے کرے گا چوں کہ دوڑ کی ابتدا میں کچھوا اکیلیز سے ۱۰۰ گز آگے تھا اس لیے اکیلیز کا طے شدہ فاصلہ = (۱۰۰ + ۱۰ ت) گز

۱۰ ۱۰ ت = ۱۰۰ + ۱۰ ت، یعنی ۹ ۱۰ ت = ۱۰۰

∴ ۱۰ ت = $\frac{۱۰۰}{۹}$ = ۱۱ $\frac{۱}{۹}$

پس اکیلیز کچھوے کو پکڑتا ہے جب کہ کچھوے کا طے شدہ فاصلہ (۱۱ $\frac{۱}{۹}$) گز ہے اور اکیلیز کا طے شدہ فاصلہ (۱۰۰ + ۱۱ $\frac{۱}{۹}$) یعنی (۱۱۱ $\frac{۱}{۹}$) گز ہے۔

نوٹ۔ جب تک ۱۰ کی قیمت معلوم نہ ہو ت کی قیمت معلوم نہیں ہو سکتی۔ لیکن اس سوال میں ت کے معلوم کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

(۵) دو پونڈ مکھن اور تین پونڈ شکر کی قیمت ۲ روپے ۱۵ آنے ہے۔ تین پونڈ مکھن اور دو پونڈ شکر کی قیمت ۳ روپے ۱۰ آنے ہے۔ ایک پونڈ مکھن کی قیمت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ایک پونڈ مکھن کی قیمت = لا آنے

اور ایک پونڈ شکر کی قیمت = ما آنے

چوں کہ قیمت روپوں اور آنوں میں دی گئی ہے اس لیے قیمت کو ایک ہی اکائی مثلاً آنوں میں لانا ہوگا۔ چناں چہ ۲ روپے ۱۵ آنے = ۴۷ آنے، ۳ روپے ۱۰ آنے = ۵۸ آنے

سوال کے بہ موجب ۲ لا + ۳ ما = ۴۷ ———— (۱)

۳ لا + ۲ ما = ۵۸ ———— (۲)

مساوات (۱) کو ۳ سے اور مساوات (۲) کو ۲ سے ضرب دینے سے

۶ لا + ۹ ما = ۱۴۱

۶ لا + ۴ ما = ۱۱۶

تفریق سے ۵ ما = ۲۵ ، ∴ ما = ۵

پس معلوم ہوا کہ ایک پونڈ شکر کی قیمت ۵ آنے ہے۔

ما کی اس قیمت کو مساوات (۱) میں درج کرنے سے

۲ لا + ۳ (۵) = ۴۷، ۲ لا = ۴۷ - ۱۵ = ۳۲

∴ لا = ۱۶

یعنی ایک پونڈ مکھن کی قیمت ۱۶ آنے یعنی ایک روپیہ ہے۔

(۶) میری اور میرے باپ کی موجودہ عمروں کا مجموعہ (۱۰۰) سال ہے۔ جب میری عمر میرے باپ کی موجودہ عمر کے مساوی ہوگی تو میری عمر میرے بیٹے کی موجودہ عمر سے ۵ گنا ہو جائے گی، اور اس وقت میرے بیٹے کی عمر میری موجودہ عمر سے (۸) سال زیادہ ہوگی۔ ہماری موجودہ عمریں علاحدہ علاحدہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ میری موجودہ عمر لا سال ہے

چونکہ میری اور میرے باپ کی موجودہ عمروں کا مجموعہ (۱۰۰) سال ہے اس لیے میرے باپ کی موجودہ عمر = (۱۰۰-لا) سال

∴ میرے باپ کی اور میری عمروں کا فرق = (۱۰۰-لا) - (لا) سال

= (۱۰۰-۲لا) سال یعنی (۱۰۰-۲لا) سال بعد میری عمر وہی ہوگی جو میرے باپ کی موجودہ عمر ہے یعنی (۱۰۰-لا) سال ہوگی۔

فرض کرو کہ میرے بیٹے کی موجودہ عمر ما سال ہے

(۱۰۰-۲لا) سال بعد میرے بیٹے کی عمر (ما + ۱۰۰ - ۲لا) سال ہوگی اور اس وقت میرے بیٹے کی عمر میری موجودہ عمر سے ۸ سال زیادہ ہوگی۔ یعنی ما + ۱۰۰ - ۲لا = لا + ۸ ———— (۱)

نیز اُس وقت میری عمر میرے بیٹے کی موجودہ عمر سے ۵ گنا ہوگی۔ یعنی

۱۰۰ - لا = ۵ ما ———— (۲)

مساواتوں (۱) اور (۲) کو ذیل کی شکلوں میں لکھا جا سکتا ہے۔

ما + ۱۰۰ - ۳ لا = ۸، ما - ۳ لا = - ۱۰۰ + ۸

یعنی ۳ لا - ما = ۹۲ ———— (۳)

اور لا + ۵ ما = ۱۰۰ ———— (۴)

مساوات (۴) کو ۳ سے ضرب دے کر مساوات (۳) میں سے تفریق کرنے سے

۳ لا - ما = ۹۲
۳ لا + ۱۵ ما = ۳۰۰

یعنی ۳ لا - ما - ۳ لا - ۱۵ ما = ۹۲ - ۳۰۰

یعنی - ۱۶ ما = - ۲۰۸

یعنی ۱۶ ما = ۲۰۸، ∴ ما = ۲۰۸ / ۱۶ = ۱۳

یعنی میرے بیٹے کی موجودہ عمر ۱۳ سال ہے۔ مساوات (۴) میں ما کی یہ قیمت درج کرنے سے لا + ۵ × ۱۳ = ۱۰۰، لا = ۱۰۰ - ۶۵، لا = ۳۵

یعنی میری موجودہ عمر ۳۵ سال ہے۔ اس لیے میرے باپ کی موجودہ عمر ۶۵ سال ہے۔ آسانی سے تصدیق کی جا سکتی ہے کہ یہ جواب سوال میں دی ہوئی شرطوں کو پورا کرتا ہے۔

ان مثالوں سے یہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ جب کسی رقم کو مساوات کی ایک جانب سے دوسری جانب منتقل کیا جائے تو اس کی علامت بدل جاتی ہے۔ نیز کسی دی ہوئی مساوات کو بہ شرط ضرورت کسی عدد سے ضرب دیا جا سکتا ہے اور دو مساواتوں کا مجموعہ یا حاصل تفریق لیا جا سکتا ہے۔ الخوارزمی نے رقموں کو اکٹھا کرنے کو "المقابلہ" کی اصطلاح سے

موسوم کیا اور رقموں کی مساوات کی ایک جانب سے دوسری جانب منتقل کرنے کو "الجبر" سے تعبیر کیا۔ اس طرح اس علم کے لیے اصطلاح "الجبر والمقابلہ" رائج ہوئی۔ الخوارزمی نے درجہ دوم کی مساوات کو "تکمیل مربع" کے طریقے سے حل کیا جس کی توضیح ذیل کی مثال سے ہوتی ہے۔

مثال۔ مساوات $\text{لا}^2 + ۱۰\,\text{لا} = ۳۹$، کو حل کرو۔ یعنی لا کی وہ قیمت یا قیمتیں معلوم کرو جو اس مساوات کو پورا کرتی ہیں۔

دی ہوئی مساوات کی دائیں جانب کو کامل مربع بنانے کے لیے مساوات کی دونوں جانبوں میں ۲۵ جمع کرو۔ تب

$$\text{لا}^2 + ۱۰\,\text{لا} + ۲۵ = ۳۹ + ۲۵ = ۶۴$$

یعنی $(\text{لا} + ۵)^2 = ۶۴ = (\pm ۸)^2$

$$\therefore \text{لا} + ۵ = \pm ۸$$

$$\therefore \text{لا} = \pm ۸ - ۵$$

جس سے $\text{لا} = ۳$ اور $\text{لا} = -۱۳$

درج کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ لا کی یہ دونوں قیمتیں دی ہوئی مساوات کو پورا کرتی ہیں۔ یعنی دی ہوئی درجہ دوم کی مساوات کی دو اصلیں ۳ اور ۱۳- ہیں۔

عبارتی سوالوں کے حل میں درجہ دوم کی مساواتیں کارآمد ثابت ہوتی ہیں۔

مثال۔ دو آدمیوں میں سے ہر ایک ۲۴ میل چلتا ہے۔ پہلے کی رفتار دوسرے کی رفتار سے فی گھنٹہ $\frac{۱}{۲}$ میل کم ہے اور فاصلہ طے کرنے کے لیے پہلا آدمی دوسرے سے نصف گھنٹہ زیادہ لگاتا ہے۔ ان میں سے ہر ایک کی رفتار معلوم کرو۔

فرض کرو کہ پہلے آدمی کی رفتار لا میل فی گھنٹہ ہے
تب دوسرے کی رفتار $\text{لا} + \frac{۱}{۴}$ میل فی گھنٹہ ہوگی
پہلا شخص ۲۴ میل کا فاصلہ $\frac{۲۴}{\text{لا}}$ گھنٹوں میں اور دوسرا $\frac{۲۴}{\text{لا} + \frac{۱}{۴}}$ گھنٹوں میں طے کرتا ہے۔ سوال کی رو سے $\frac{۲۴}{\text{لا}} = \frac{۲۴}{\text{لا} + \frac{۱}{۴}} + \frac{۱}{۲}$

کسروں کو دور کرنے کے لیے مساوات کی دونوں جانبوں کو $۲\,\text{لا}\,(\text{لا} + \frac{۱}{۴})$ سے ضرب دینے سے $۴۸\,(\text{لا} + \frac{۱}{۴}) = ۴۸\,\text{لا} + \text{لا}\,(\text{لا} + \frac{۱}{۴})$

مختصر کرنے اور رقموں کو منتقل کرنے سے $\text{لا}^۲ + \frac{۱}{۴}\text{لا} = ۱۷$،

تکمیل مربع کے عمل سے $\text{لا}^۲ + ۲ \times \text{لا} \times \frac{۱}{۸} + (\frac{۱}{۸})^۲ = ۱۷ + (\frac{۱}{۸})^۲$،

یعنی $(\text{لا} + \frac{۱}{۸})^۲ = ۱۷ + \frac{۱}{۶۴} = \frac{۱۰۸۹}{۶۴} = (\pm \frac{۳۳}{۸})^۲$

$$\therefore \text{لا} + \frac{۱}{۸} = \pm \frac{۳۳}{۸}$$

$$\therefore \text{لا} = \pm \frac{۳۳}{۸} - \frac{۱}{۸}\text{، یعنی } \text{لا} = ۴\text{، } -\frac{۱۷}{۴}$$

اب چوں کہ سوال کی نوعیت سے ظاہر ہے کہ رفتار مثبت ہوگی۔ اس لیے حل لا = ۴ قابلِ قبول ہے اور دوسرا حل $\text{لا} = -\frac{۱۷}{۴}$ قابلِ قبول نہیں ہے۔ اس لیے پہلے آدمی کی رفتار ۴ میل فی گھنٹہ اور دوسرے کی $۴\frac{۱}{۴}$ میل فی گھنٹہ ہے۔ اس جواب کی تصدیق سوال میں درج کرکے آسانی سے کی جاسکتی ہے۔

یونانی علم ہندسہ کی مدد سے درجہ دوم کی مساواتوں کی ان دوہری اور خاص طور پر منفی اصلوں کی تعبیر بہ خوبی نہیں ہوسکتی تھی۔ سترھویں صدی میں دے کارت نے ہندسہ تحلیلی کی ایجاد سے اس کوتاہی کو دور کیا۔ چناں چہ ہندسہ تحلیلی میں ایک خطِ مستقیم پر مخالف سمتوں میں ناپے ہوئے فاصلے مختلف علامتوں کے ساتھ لیے جاتے ہیں۔ یعنی اگر ایک سمت میں ناپے ہوئے فاصلے مثبت قرار دیے جائیں تو مخالف سمت میں فاصلے منفی لیے جائیں گے۔

درجہ دوم کی ایسی مساواتیں بھی ہیں جو کسی مثبت یا منفی عدد سے پوری نہیں ہوتیں۔ مثلاً $\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا} + ۵ = ۰$ ۔ تو تکمیل مربع سے

$$\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا} + ۱ = -۴$$

$$\text{یعنی}\quad (\text{لا} - ۱)^{۲} = -۴$$

اب ایسا کوئی مثبت یا منفی عدد نہیں معلوم ہے جس کا مربع (-۴) ہو۔ اس قسم کی مساواتوں کے حل کے دوران میں کارداں (CARDAN) نے یہ مفروضہ اختیار کیا کہ (-۱) کا جذر بھی وجود رکھتا ہے اور اس کو علامت $\sqrt{-۱}$ سے تعبیر کیا گیا۔ چونکہ $-۴ = -۱ \times ۴$ اس لیے $\sqrt{-۴} = \sqrt{-۱} \times ۲$
پس اوپر کی مساوات ہو جاتی ہے $(\text{لا} - ۱)^{۲} = -۴ = (\pm\sqrt{-۱} \times ۲)^{۲}$

$$\therefore\quad \text{لا} - ۱ = \pm\sqrt{-۱} \times ۲ = \pm ۲\sqrt{-۱}$$

$$\therefore\quad \text{لا} = ۱ \pm ۲\sqrt{-۱}$$

اس استدلال میں مشکل یہ پیش آتی ہے کہ $\sqrt{-۱}$ کا ہندسی مفہوم یونانی علم ہندسہ کی مدد سے نہیں بتایا جا سکتا۔ نویں باب میں اس کی مزید وضاحت کی جائے گی۔

درجہ دوم کی عام مساوات شکل $\text{ا}\,\text{لا}^{۲} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج} = ۰$ میں لی جا سکتی ہے۔ جہاں ا، ب، ج کوئی دیے ہوئے عدد ہیں۔

اس مساوات کو شکل $\text{لا}^{۲} + \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\text{لا} = -\frac{\text{ج}}{\text{ا}}$ میں لکھ سکتے ہیں

تکمیل مربع سے $\text{لا}^{۲} + \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\text{لا} + \left(\frac{\text{ب}}{۲\text{ا}}\right)^{۲} = -\frac{\text{ج}}{\text{ا}} + \left(\frac{\text{ب}}{۲\text{ا}}\right)^{۲} = -\frac{\text{ج}}{\text{ا}} + \frac{\text{ب}^{۲}}{۴\text{ا}^{۲}}$

$$\text{یعنی}\quad \left(\text{لا} + \frac{\text{ب}}{۲\text{ا}}\right)^{۲} = \frac{\text{ب}^{۲} - ۴\text{اج}}{۴\text{ا}^{۲}} = \left(\pm\frac{\sqrt{\text{ب}^{۲} - ۴\text{اج}}}{۲\text{ا}}\right)^{۲}$$

$$\therefore\quad \text{لا} + \frac{\text{ب}}{۲\text{ا}} = \pm\frac{\sqrt{\text{ب}^{۲} - ۴\text{اج}}}{۲\text{ا}}$$

$$\therefore\quad \text{لا} = -\frac{\text{ب}}{۲\text{ا}} \pm \frac{\sqrt{\text{ب}^{۲} - ۴\text{اج}}}{۲\text{ا}} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{۲} - ۴\text{اج}}}{۲\text{ا}}$$

اس قاعدے کی مدد سے درجہ دوم کی کسی مساوات کو حل کیا جاسکتا ہے۔ اگر جذر کی علامت کے اندر کا جملہ یعنی "$\text{ب}^{۲} - ۴\,\text{ا}\,\text{ج}$" منفی ہو تو حل میں $\sqrt{-۱}$ داخل ہوگا۔ ایسے حل کو "خیالی حل" کہتے ہیں۔

<u>سلسلے</u> - پانچویں باب میں یہ بتایا جاچکا ہے کہ پہلے ن طبعی عددوں کا مجموعہ $\frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)}{۲}$ ہے۔ ہندستانی اور عرب ریاضی دانوں نے چینی علم اعداد میں ازسرنو دلچسپی پیدا کی، ہندی ریاضی داں آریہ بھٹہ نے حسب ذیل شکل کے سلسلوں کے مجموعے کے لیے قاعدے بیان کیے ہیں۔

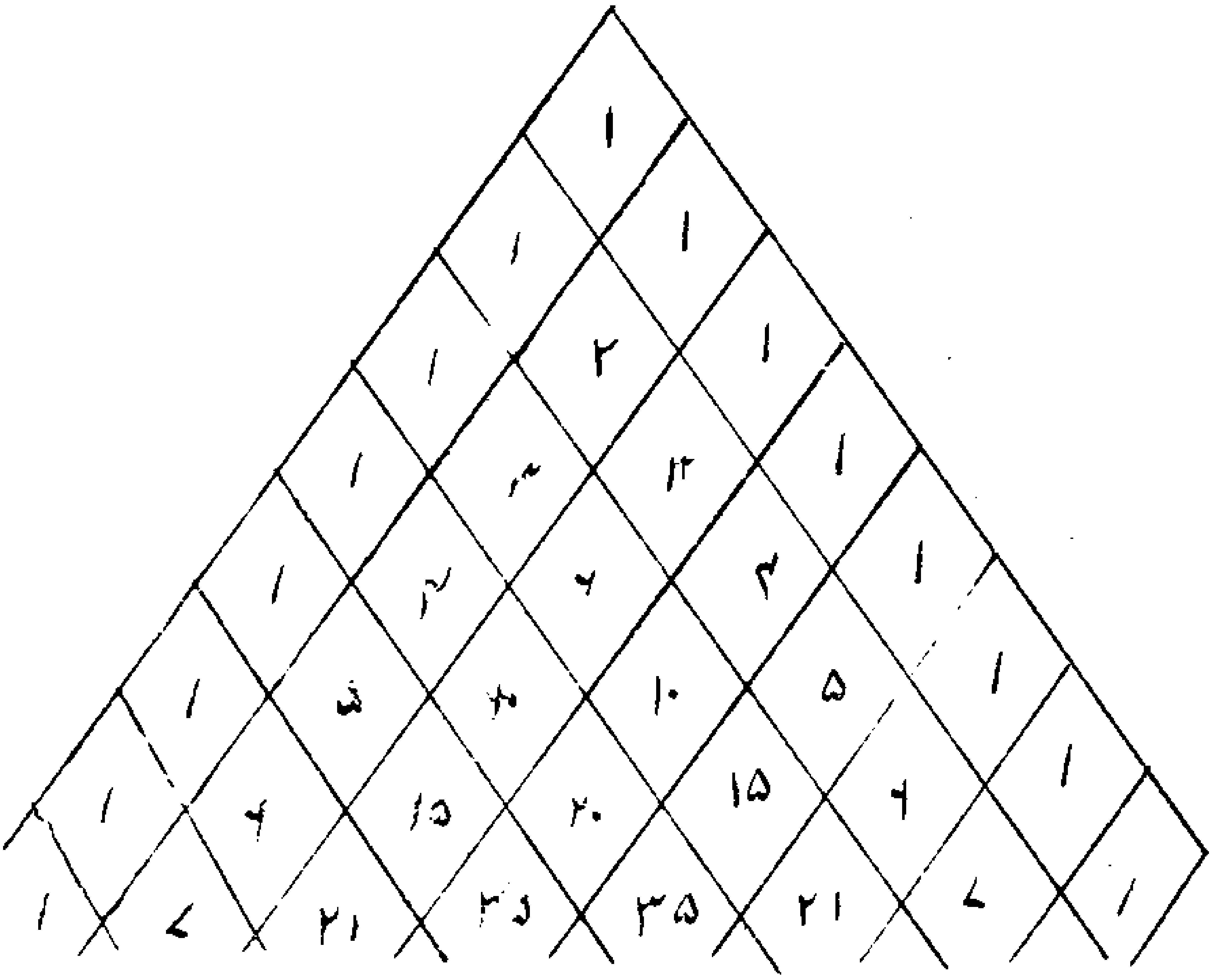
$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \dots + \text{ن} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)}{۲}$$

$$۱^{۲} + ۲^{۲} + ۳^{۲} + ۴^{۲} + \dots + \text{ن}^{۲} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)(۲\text{ن}+۱)}{۶}$$

$$۱^{۳} + ۲^{۳} + ۳^{۳} + ۴^{۳} + \dots + \text{ن}^{۳} = \left[\frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)}{۲}\right]^{۲}$$

اس ضمن میں پاسکل کے عددی مثلث کا ذکر دلچسپی سے خالی نہ ہوگا۔ یہ عددی مثلث سب سے پہلے عمر خیام نے دریافت کیا تھا۔ اس عددی مثلث کو لکھنے کے لیے ہم اعداد ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ترچھی سطر میں لکھتے ہیں۔

اس کے بعد دوسری ترچھی سطر میں اعداد ۱ ۲ ۳ ۴ ۵، لکھتے ہیں اور تیسری ترچھی سطر میں دوسری سطر کا پہلا عدد، پہلے دو عددوں کا مجموعہ، پہلے تین عددوں کا مجموعہ، ...... وغیرہ لکھتے ہیں۔ اس کے مماثل تیسری سطر پر کرنے سے چوتھی سطر حاصل ہوتی ہے اس طرح عددوں کا حسب ذیل مثلث بنتا ہے۔



ان عددوں کو افقی سطروں میں پڑھنے سے حسب ذیل سلسلے حاصل ہوتے ہیں۔

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱

۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱

عددوں کے ان سلسلوں کی مدد سے ہم $(لا + ل)^{1}$، $(لا + ل)^{2}$، $(لا + ل)^{3}$ ..... $(لا + ل)^{ن}$ کی تفصیلی صورتیں فوراً لکھ سکتے ہیں۔ مثلاً

$(\text{لا} + \text{ل})^{5} = \text{لا}^{5} + 5\,\text{لا}^{4}\text{ل} + 10\,\text{لا}^{3}\text{ل}^{2} + 10\,\text{لا}^{2}\text{ل}^{3} + 5\,\text{لا}\,\text{ل}^{4} + \text{ل}^{5}$ ان کی تصدیق ضرب دینے سے ہو سکتی ہے۔

پاسکل کے عددی مثلث کو کافی دور تک لکھنے سے کسی ثبت صحیح عددوں کے لیے $(\text{لا} + \text{ل})^{\text{ن}}$ کی تفصیلی صورت لکھی جا سکتی ہے جو حسبِ ذیل ہے:

$$(\text{لا} + \text{ل})^{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\text{ل} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2\times 1}\text{لا}^{\text{ن}-2}\text{ل}^{2} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{3\times 2\times 1}\text{لا}^{\text{ن}-3}\text{ل}^{3} + \ldots + \text{ل}^{\text{ن}}$$

اسی طریقے سے $(1 + \text{لا})^{\text{ن}}$ کا پھیلاؤ بھی لکھا جا سکتا ہے۔ اس پھیلاؤ کی مدد سے کسروں کی قوتوں کی تقریبی قیمتیں بھی معلوم ہو سکتی ہیں مثلاً

$$(1.01)^{5} = (1 + 0.01)^{5} = 1^{5} + 5(1)^{4}(0.01) + 10(1)^{3}(0.01)^{2} + 10(1)^{2}(0.01)^{3} + 5(1)(0.01)^{4} + (0.01)^{5}$$

$$= 1 + 0.05 + 0.001 + 0.00001 + \ldots\ldots$$

$= 1.05$ تقریباً جب کہ اعشاریہ کے تیسرے اور اعلیٰ تر مقام نظر انداز کیے جائیں۔

اگر ن ثبت صحیح عدد نہ ہو اور لا کی عددی قیمت ایک سے کم ہو تو ثابت کیا جا سکتا ہے کہ $(1 + \text{لا})^{\text{ن}} = 1 + \text{ن}\,\text{لا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2\times 1}\text{لا}^{2} + \ldots$

بائیں جانب کا سلسلہ نہ ختم ہونے والا یعنی لا متناہی سلسلہ ہوگا۔ ایسے سلسلے کی ہر رقم کے بعد ایک اور رقم ہوتی ہے۔

ریاضی کے محاورے تیسرے باب میں زبان کے قواعد اور ریاضی کے قاعدوں کی مشابہت کو واضح کرنے کی غرض سے متعدد مثالیں دی گئی تھیں۔ اس کی مزید وضاحت کے لیے ہم ریاضی یعنی مقدار کی زبان کے محاورں کی مثالیں دیں گے۔

مثال (۱) $لا + لا + لا = ۳\,لا$

یعنی لا جیسی ۳ مقداروں کے مجموعے کو تعبیر کرنے کے لیے ریاضی کا محاورہ یعنی عام قرارداد یہ ہے کہ عدد ۳ عدد لا کی دائیں جانب لکھا جائے۔ اسی مجموعے کو لا ۳ سے تعبیر کرنا محاورے کے خلاف ہوگا۔ جس طرح کہ تین ٹوپی کی بجائے ٹوپی تین کہنا درست نہیں ہے۔

مثال (۲) $لا \times لا \times لا \times لا = لا^{۴}$

یعنی لا جیسی چار مقدار کے حاصل ضرب کو تعبیر کرنے کے لیے ریاضی کی عام قرارداد یہ ہے کہ لا کے اوپر کسی قدر بائیں جانب عدد ۴ لکھا جائے۔ اس کی بجائے لا کے اوپر دائیں جانب یا لا کے نیچے عدد ۴ لکھنا خلاف محاورہ ہوگا۔

مثال (۳) عدد ا کو عدد ب پر تقسیم کرنے سے جو خارج قسمت حاصل ہوتا ہے اس کو تعبیر کرنے کے لیے علامت $\frac{ا}{ب}$ اختیار کی جاتی ہے یعنی ریاضی کا محاورہ یہ ہے کہ مقسوم لکیر کے اوپر مقسوم علیہ لکیر کے نیچے لکھا جائے۔ اس کی بجائے $\frac{ب}{ا}$ یا کوئی اور علامت اختیار نہیں کی جاسکتی۔

یاد رکھنے کی باتیں

(۱) $\sqrt{ا - ا^{۲}} = \sqrt{ا}\,\sqrt{۱ - ا}$

(۲) اگر $ا\,لا^{۲} + ب\,لا + ج = ۰$

تو $لا = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{۲} - ۴\,ا\,ج}}{۲\,ا}$

(۳) $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \cdots\cdots + ن = \frac{ن\,(ن + ۱)}{۲}$

(۴) $۱^{۲} + ۲^{۲} + ۳^{۲} + ۴^{۲} + \cdots\cdots + ن^{۲} = \frac{ن\,(ن + ۱)\,(۲ن + ۱)}{۶}$

(۵) $۱^{۳} + ۲^{۳} + ۳^{۳} + ۴^{۳} + \cdots + ن^{۳} = \left[\frac{ن\,(ن + ۱)}{۲}\right]^{۲}$

مشقی سوالات

۱۔ وہ عدد معلوم کرو جس کے مربعے میں عدد کا دوچند جمع کرنے سے ۱۵ حاصل ہوتا ہے۔

۲۔ ایک قائم الزاویہ مثلث کے دو ضلعوں کا مجموعہ ۷" ہے۔ اور وتر کا طول ۵" ہے مثلث کے ضلعے معلوم کرو۔

۳۔ ایک شخص کے پاس کچھ رُپے تھے۔ اس نے اس رقم کا ½ ایک فقیر کو دیا، باقی کا ¼ دوسرے فقیر کو اور باقی کا ⅕ تیسرے کو، اور اس کے پاس ۲۴ رُپے بچ رہے۔ بتاؤ کہ ابتدا میں اس کے پاس کتنے رُپے تھے۔

آٹھواں باب

دُنیا کی مساحت یا علم مثلّث کروی

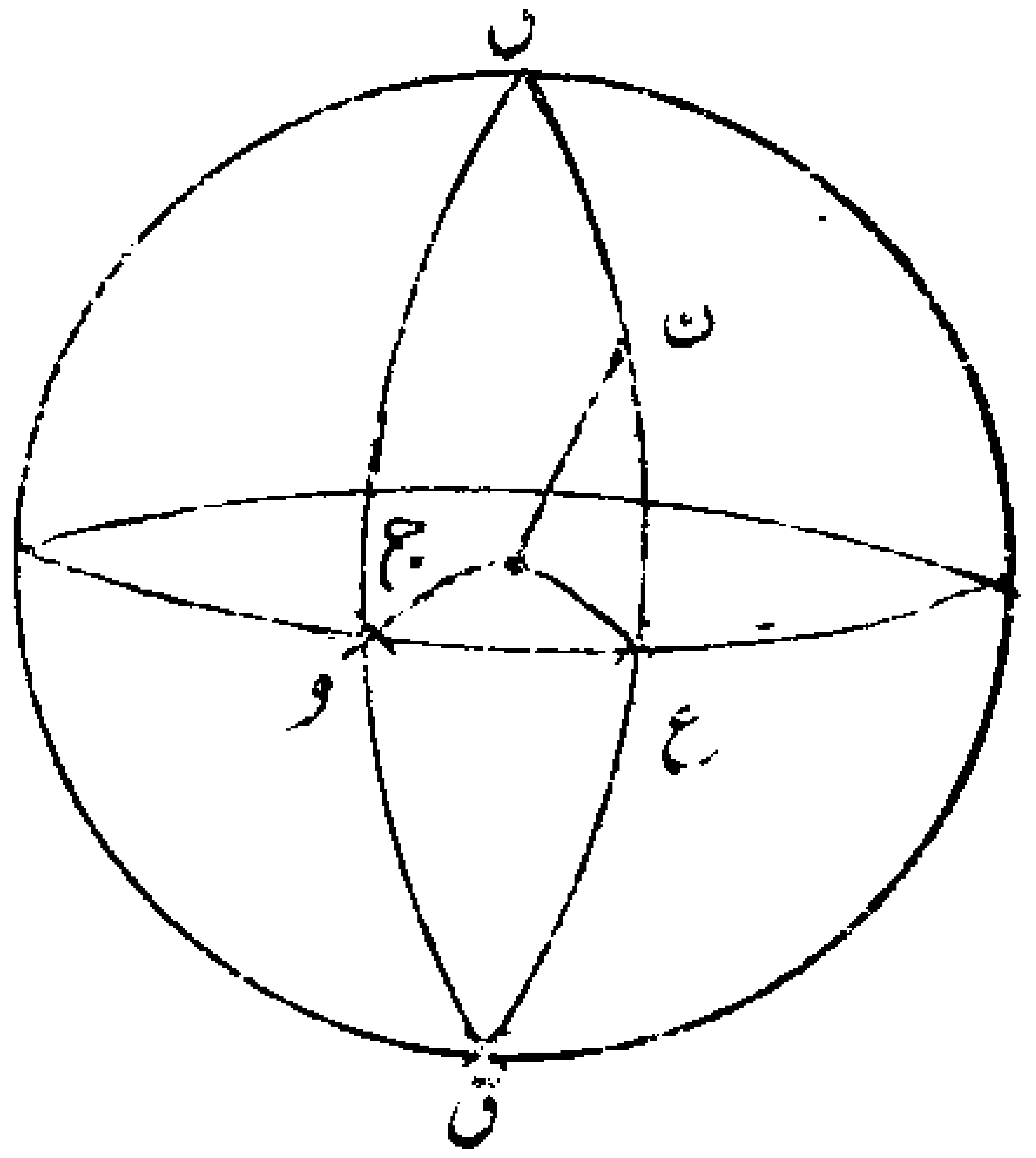
اہرام مصر کی تعمیر سے پیشتر مصری اور سمیری تہذیب کی مذہبی جماعتوں کو ستاروں کے متعلق حسب ذیل دو اہم باتیں معلوم تھیں:۔
(۱) کوئی دو مخصوص ستارے نصف النہار (یعنی اس کبیر دائرے کو جو شمال اور جنوب کے نقطوں میں سے گزرتا ہے) ہمیشہ ایک خاص معین وقفہ سے یکے بعد دیگرے عبور کرتے ہیں (۲) کسی خاص مقام پر کسی دیے ہوئے ستارے کا نصف النہاری ارتفاع (یعنی ستارے کا ارتفاع جب کہ وہ نصف النہار کو عبور کرتا ہو) مستقل رہتا ہے۔ یہ تقویم ساز ستاروں کے عبور کا وقت ساعتی پیالوں (HOURGLASSES) کی مدد سے متعین کرتے تھے۔ لیکن ان کے آلات تشفی بخش نہ ہونے کی وجہ سے زیادہ صحیح نتیجے حاصل نہیں ہو سکتے تھے۔ جب مصر کے ان کاہنوں کی علمی صلاحیتیں رفتہ رفتہ مفقود ہو گئیں تو فنیقی جہاز رانوں نے علم ہیئت میں ایک اور قدم آگے بڑھایا۔ قدیم یونانی جہاز رانوں کو یہ بات معلوم تھی کہ کسی دو مخصوص ستاروں کے نصف النہاری ارتفاع کا فرق ہر مقام پر وہی رہتا ہے۔ انھیں اس کی وجہ بھی معلوم تھی یعنی یہ کہ زمین گول ہے اور ستارے بہ لحاظ ایک دوسرے کے ثابت ہیں۔ چاند گرہن کے وقت چاند پر

زمین کے دائری سایے سے انھیں زمین کے گول ہونے کا ثبوت ملتا تھا۔ جس کی مزید تائید اس بات سے بھی ہوتی تھی کہ سمندر کے ساحل کی طرف دور سے آنے والے جہاز کا بالائی حصّہ پہلے دکھائی دیتا تھا اور نچلا حصّہ بعد میں اور ساحل سے پرے جانے والے جہازوں کا نچلا حصّہ پہلے نظر سے غائب ہوتا تھا اور بالائی حصّہ بعد میں۔ اسی زمانے میں اسکندریہ کے مشہور حکیم ایراٹوستھینز نے زمین کی پیمایش کی اور اس کے بعد ارضی نقشے تیار کیے گئے۔ چوں کہ کروی ارضی نقشوں کی تیاری ستاروں کے مشاہدوں پر منحصر ہے اس لیے پہلے پہل ستاروں کے نقشے (سماوی نقشے) تیار کیے گئے۔ چناں چہ ہپارکوس نے (۱۰۸۰) ثابت ستاروں کا محلِ وقوع متعین کیا۔ اسی فنِ نقشہ سازی نے مغربی جہازرانوں کے بحری سفر کے لیے راستہ صاف کیا اور نئے ریاضیاتی آلات کی ایجاد ہوئی۔ پرتگال کے ولی عہد ہنری نے ۱۴۲۰ء میں مقام سیگری میں ایک رصدگاہ بنائی جہاں جہازرانی کی تعلیم کے علاوہ ستاروں کے محلِ وقوع پر چالیس سال تک تحقیقات ہوتی رہی۔ اس مدرسے میں بحری جدولوں اور ہیئتی آلات کی ایجاد کے لیے عرب اور یہودی ہیئت دانوں کو متعین کیا گیا تھا۔ شاہی جہازراں، ہیئتی آلات اور اصولوں سے بخوبی واقف تھے اور انھی معلومات کی بنا پر بحری تجارت کو فروغ حاصل ہوا۔ اس طرح علمِ ہیئت کی ترقی پھر انسانی روزمرہ زندگی کا جز بن گئی۔

ستاروں کے نقشے بنانا

جس طرح کسی میدان میں ہم اپنا مقام معلوم کرنا ہو تو، چٹانوں، صورتوں وغیرہ کی مدد سے متعین کرتے ہیں اسی طرح جہازران سمندر میں اپنا مقام

ستاروں کی مدد سے متعین کرتے ہیں۔ اسکندریہ کے ہیئت دانوں نے ستاروں کے جو نقشے بنائے تھے ان کی مدد سے جہازراں اپنا عرض بلد آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں۔ نیز کسی معیاری مقام مثلاً گرینوچ کا وقت دکھانے والی گھڑی بھی ساتھ ہو تو جہاز کے مقام کا طول بلد بھی معلوم ہو سکتا ہے۔ زمین کے کروی نقشوں میں حوالے کے دو بڑے دائروں (یعنی استوائے ارضی اور گرینوچ میں سے گزرنے والے دائرے طول بلد) کی مدد سے کسی مقام کو متعین کیا جاتا ہے۔ اگر مقام ن میں سے گزرنے والا دائرہ طول بلد، استوائے ارضی سے ع پر ملے تو ع ن سے مقام ن کا عرض بلد تعبیر ہوتا ہے اور و ع سے طول بلد



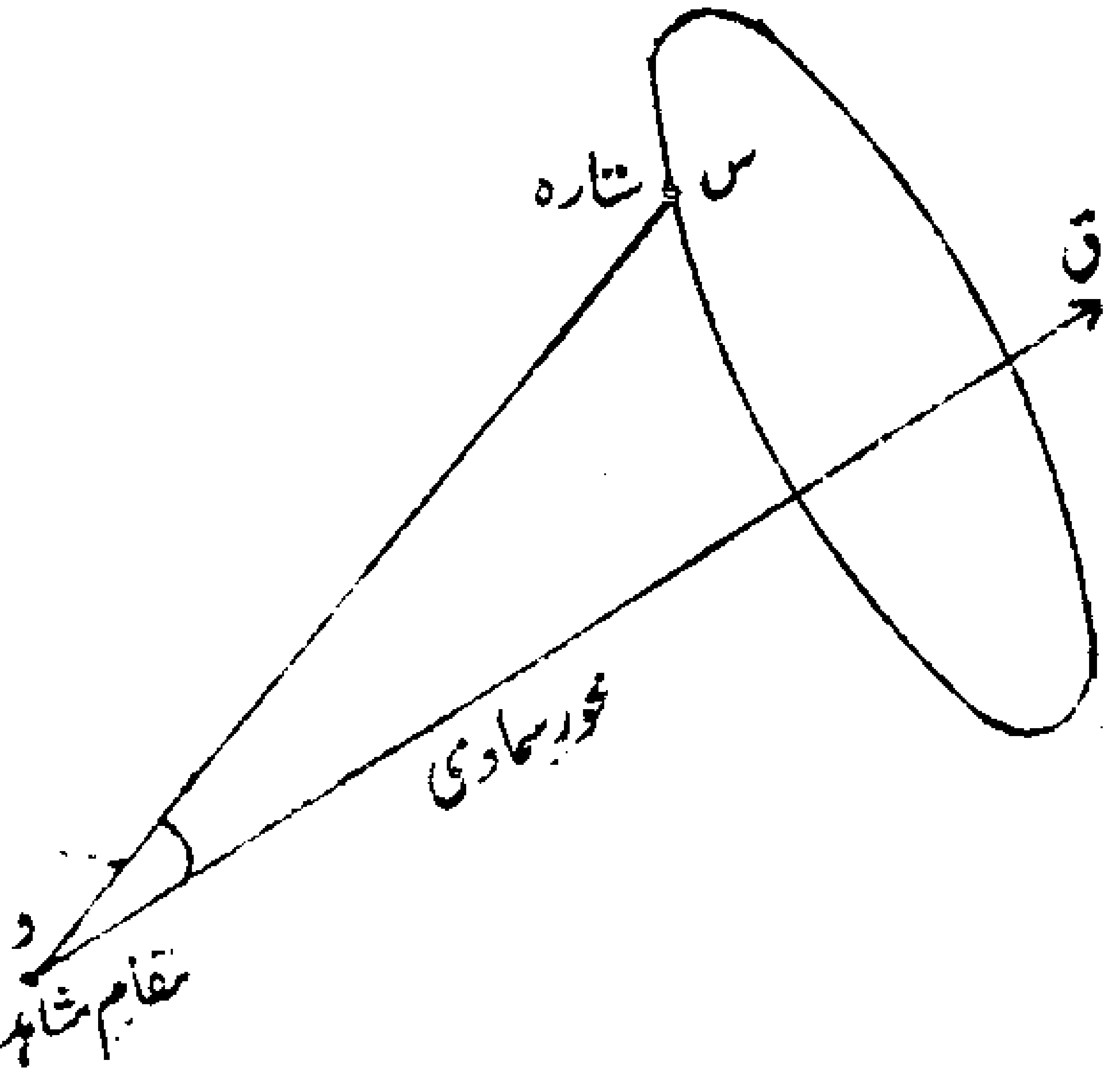
(جہاں و حوالے کے مذکورہ بالا دو بڑے دائروں کا نقطہ تقاطع ہے) اگر کرہ ارض کے مرکز کو ج سے تعبیر کیا جائے تو مقام ن کا عرض بلد زاویہ ع ج ن سے اور طول بلد زاویہ و ج ع سے تعبیر ہوتا ہے۔ ان نقشوں کی تیاری میں اس بات سے بڑی مدد حاصل کی گئی کہ کسی مقام پر تمام ثابت ستارے ایک معین محور کے گرد گھومتے ہوئے دکھائی دیتے

ہیں۔ مختلف مقاموں پر اس سماوی محور اور افق کا درمیانی زاویہ بدلتا ہے اور مقام مشاہدہ کے عرض بلد کے مساوی ہوتا ہے۔ اس لیے جیسے جیسے ہم استوا سے شمال کی طرف جاتے ہیں اس محور سماوی کا میلان افق کے ساتھ بڑھتا ہے اور قطب شمالی پر ٹھیک ۹۰ کے مساوی ہوتا ہے یعنی قطب شمالی پر تمام ثابت ستارے ایک انتصابی محور کے گرد گھومتے دکھائی دیتے ہیں۔ اسی طرح استوا سے جنوب کی طرف جائیں تو محورِ سماوی کا افق سے میلان بڑھتا جائے گا حتیٰ کہ قطب جنوبی پر محور سماوی پھر انتصابی ہو جاتا ہے۔ البتہ فرق یہ ہے کہ شمالی نصف کرہ زمین میں، سماوی محور شمال کی طرف جھکا ہوا ہوتا ہے اور جنوبی نصف کرہ زمین میں جنوب کی طرف اس کی مدد سے بہ آسانی معلوم ہو سکتا ہے کہ مقام مشاہدہ کس نصف کرۂ زمین میں واقع ہے۔

کرۂ سماوی پر ستارے دائروں میں حرکت کرتے دکھائی دیتے ہیں۔ اگر ہم ایک ایسا ستارہ لیں کہ کرہ سماوی پر اس کا طریق افق کے بالکلیہ اوپر رہے تو یہ ستارہ اپنی روزانہ گردش کے دوران میں نصف النہار کو دو دفعہ عبور کرے گا۔ ایک دفعہ قطب سماوی کے اوپر اور دوسری دفعہ قطب سماوی کے نیچے۔ یہ ستارۂ مذکور کے بالائی اور نچلے مرور کہلاتے ہیں۔ اگر بالائی اور نچلے مروروں کے وقت ستارے کے ارتفاع ناپے جائیں تو ان کا اوسط مقام مشاہدہ کے عرض بلد کے مساوی ہوتا ہے۔ دو مختلف مقاموں پر ایک ہی ستارے کے نصف النہاری ارتفاعوں کا فرق، ان مقاموں کے عرض بلد کے فرق کے مساوی ہوتا ہے۔ کسی مقام پر ایک ہی ستارے کے دو متصل مروروں کا درمیانی وقفہ، ایک کوکبی دن

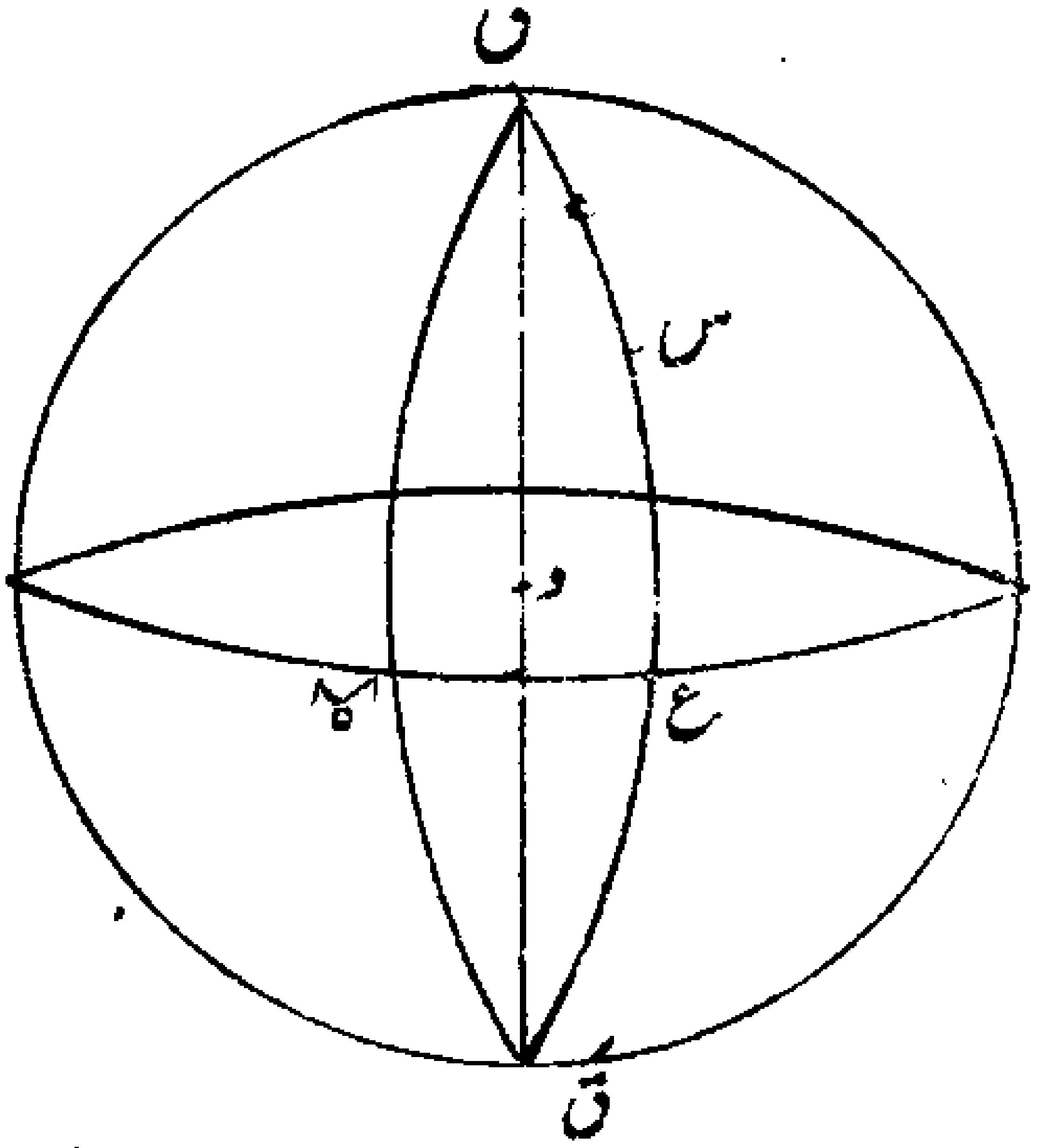
کہلاتا ہے۔ کسی ستارے کی سمت اور سماوی محور کی سمت کا درمیانی زاویہ اس ستارے کا قطبی فاصلہ کہلاتا ہے جو ستارے کے محور سماوی کے گرد گردش کے دوران میں مستقل رہتا ہے۔ اس کا مشاہدہ حسب ذیل طریقے سے کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ دوربین محور سماوی د ق کے گرد گھوم سکتی ہے اور محورِ سماوی سے زیرِ مشاہدہ ستارے کے قطبی فاصلے کے مساوی زاویہ



بناتی ہے۔ اگر ستارے کو ایک وقت دوربین کے میدانِ نظر میں لایا جائے اور دوربین کو محورِ سماوی کے گرد ایسی زاویئی رفتار سے گھمایا جائے کہ وہ ایک کوکبی یوم میں ایک کامل گردش کرے (یعنی ۳۶۰° سے گھومنے) تو ستارہ مذکور ہمیشہ دوربین کے میدان نظر میں رہے گا (یہ مشاہدہ صرف اس وقت تک کیا جا سکتا ہے جب تک کہ ستارہ افق کے اوپر ہو) اس سے ثابت ہوتا ہے کہ محورِ سماوی کے گرد ستارے کی حرکت کے دوران میں ستارے کا قطبی فاصلہ مستقل رہتا ہے۔

کرہ سماوی پر ستاروں کے مقام کا تعین دو بڑے دائروں کی مدد سے کیا جاتا ہے جن میں سے ایک یعنی استوائے سماوی محور سماوی پر عمود وار ہوتا ہے اور دوسرا محور سماوی میں سے گزرتا ہے۔ ان دو دائروں کا ایک نقطہ تقاطع وہ نقطہ ہے جہاں سورج ۲۱ مارچ کو واقع ہوتا ہے۔ یہ نقطہ نقطہ راس الحمل کہلاتا ہے اور اس کو علامت (♈) سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ کرہ سماوی پر کسی ستارے سَ کا مقام متعین کرنے کے لیے ہم محور سماوی ق قَ اور س میں سے گزرنے والا بڑا دائرہ کھینچتے ہیں جو استوائے سماوی سے ع پر ملتا ہے تب قوسوں ♈ ع اور ع س



کی مدد سے ستارے س کا مقام متعین ہوتا ہے۔ ♈ع کو ستارہ کا 'صعود مستقیم' اور ع س کو ستارے کا 'میل' کہتے ہیں۔ بالعموم صعود مستقیم کو عہ سے اور میل کو م سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ چناں چہ شکل میں زاویہ

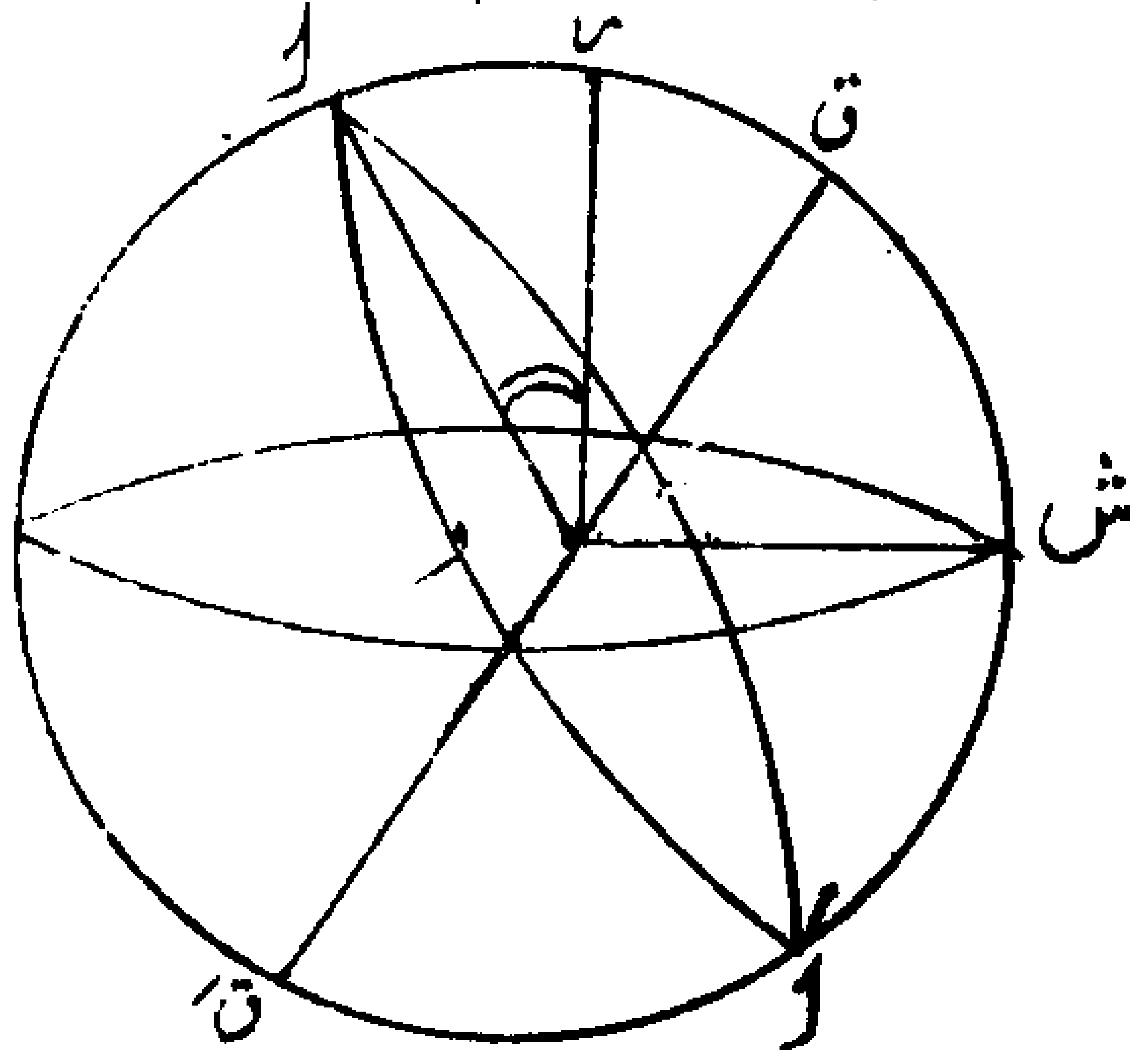
♈وَع = عہ، اور ع وَس = م

چوں کہ کوئی ستارہ محور سماوی کے گرد چوبیس گھنٹوں میں ۳۶۰°

میں سے گھوم جاتا ہے اس لیے ۱° میں سے گھومنے کا وقت ۴ منٹ ہوگا۔ ستارے کے صعود مستقیم کو درجوں میں یا وقت میں بیان کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً اگر کسی ستارے کا صعود مستقیم ۳۰° ہو تو یہ بھی کہا جا سکتا ہے کہ ستارے کا صعود مستقیم ۳۰ × ۴ منٹ یا دو گھنٹے ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ نقطہ راس الحمل (♈) کے مرور کے ٹھیک ۲ کوکبی گھنٹے بعد ستارہ مذکور نصف النہار کو عبور کرے گا۔ نیز دو ستاروں کے صعود مستقیم کے فرق سے ان کے مروروں کا درمیانی وقفہ تعبیر ہوتا ہے جو دو دیے ہوئے ستاروں کے لیے مستقل ہے۔

اگر کوئی ستارہ استوا کے شمال کی جانب ہو تو اس کا میل، شمالی یا مثبت (+) میل کہلاتا ہے اور اگر استوا کے جنوب میں ہو تو جنوبی یا منفی (−) کہلائے گا۔ چوں کہ استوا، محور سماوی پر عمود دار ہے اس لیے استوا اور نصف النہار کے نقطہ تقاطع کا راسی فاصلہ مقام مشاہدہ کے عرض بلد کے مساوی ہوتا ہے جیسا کہ ملحقہ شکل سے ظاہر ہے۔ اگر کسی ستارے کا میل (+م) ہو اور مقام مشاہدہ کا عرض بلد ف ہو۔ تو ستارے کا

اس شکل میں مقام مشاہدہ و ہے۔ ق ق' محور سماوی ہے۔ ا ا' استوا ہے۔ م راس ہے اور ش شمال کا نقطہ ہے۔



نصف النہاری راسی فاصلہ (فہ۔م) یا (م۔فہ) کے مساوی ہوگا بہ موجب اس کے کہ فہ بڑا ہو یا چھوٹا ہو م سے پہلی صورت میں ستارہ، راس کے جنوب کی طرف نصف النہار کو عبور کرے گا اور دوسری صورت میں شمال کی طرف۔ نیز اگر ستارے کا میل (۔م) ہو تو اس کا نصف النہاری راسی فاصلہ (فہ+م) ہوگا۔ ان نتیجوں کی تصدیق مناسب شکلیں کھینچ کر آسانی سے کی جا سکتی ہے۔ یہ بھی ظاہر ہے کہ ایک ستارہ ہمیشہ افق کے اوپر رہے گا اگر اس کا قطبی فاصلہ (یعنی ۹۰° ۔م) چھوٹا ہو مقام مشاہدہ کے عرض بلد فہ سے ایسا ستارہ "حیط قطبی" ستارہ کہلاتا ہے اور ایک 'کوکبی یوم میں' یہ نصف النہار کو افق کے اوپر دو دفعہ عبور کرتا ہے۔ بالائی مرور کے وقت ایسے ستارے کا ارتفاع' (فہ+م) ہوتا ہے اور نچلے مرور کے وقت (فہ۔م)۔ (یہ مان لیا گیا ہے کہ بالائی مرور کے وقت ستارہ راس کے شمال کی طرف ہوتا ہے) اس سے ظاہر ہے کہ بالائی اور نچلے مروروں کے وقت ستارے کے ارتفاعوں کا اوسط مقام مشاہدہ کے عرض بلد فہ کے مساوی ہوتا ہے۔ نیز کسی معلومہ ستارے کے نصف النہار کو عبور کرنے کے وقت ستارے کا راسی فاصلہ ر ناپ کر مقام مشاہدہ کا عرضِ بلد فہ ذیل کے ضابطہ سے معلوم ہو سکتا ہے۔

ر = فہ۔م یا م۔فہ (جہاں ستارے کا میل م دیا گیا ہے)

نوٹ۔ اگر راس سے شمال کی طرف ناپے ہوئے راسی فاصلوں کو + اور جنوب کی طرف ناپے ہوئے فاصلوں کو منفی قرار دیا جائے تو م = فہ+ر

۲۱ مارچ کو سورج نقطہ راس الحمل (♈) پر ہوتا ہے اس لیے ۲۱ مارچ کو سورج اور کسی ستارے کے مروروں کا درمیانی وقفہ

معلوم کیا جائے تو ستارے کا صعود مستقیم حاصل ہوتا ہے اور اس ستارے اور دوسرے ستاروں کے مروروں کے درمیانی وقفوں کی مدد سے تمام ستاروں کے صعود مستقیم معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ نیز نصف النہاری راسی فاصلوں کی مدد سے ستاروں کے میل معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ اس طرح ستاروں کے سماوی محدد یعنی صعود مستقیم اور میل معلوم کرکے کرہ پر ستاروں کے مقام متعین کیے جا سکتے ہیں۔ یہ نقشے ستاروں کے نقشے (یا سماوی نقشے) کہلاتے ہیں۔

طریق الشمس مختلف تاریخوں میں کرہ سماوی پر سورج کا مقام اُس کے صعود مستقیم اور میل کی مدد سے قائم کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ثابت ستاروں کے لحاظ سے سورج کا مقام کرہ سماوی پر مغرب سے مشرق کی طرف بدلتا رہتا ہے۔ اور ایک سال میں کرہ سماوی پر سورج ایک بڑا دائرہ بناتا ہے۔ یہ بڑا دائرہ طریق الشمس کہلاتا ہے۔ طریق الشمس، استوائے سماوی کو دو نقطوں پر کاٹتا ہے۔ ایک نقطہ تقاطع اس وقت حاصل ہوتا ہے جب کہ سورج کا میل منفی سے مثبت ہوتا ہے۔ اور دوسرا اس وقت جب کہ میل مثبت سے منفی ہوتا ہے۔ یہ نقطے ترتیب وار نقطہ راس الحمل (♈) اور نقطہ راس المیزان (♎) کہلاتے ہیں۔ اور ان پر سورج تقریباً ۲۱ مارچ اور ۲۳ ستمبر کو واقع ہوتا ہے۔ جب سورج ان نقطوں پر ہوتا ہے تو ظاہر ہے کہ سورج کا میل صفر ہوتا ہے۔ ان تاریخوں میں ساری دُنیا میں دن اور رات مساوی ہوتے ہیں۔ نیز سورج ٹھیک مشرق میں طلوع ہوتا ہے اور ٹھیک مغرب میں غروب ہوتا ہے اور ان تاریخوں میں سورج کا نصف النہاری راسی

فاصلہ مقام مشاہدہ کے عرض بلد کے مساوی ہوتا ہے۔ ۲۱ مارچ کو اعتدالِ ربیع اور ۲۳ ستمبر کو اعتدال خریف کہتے ہیں۔ ۲۱ مارچ سے ۲۲ جون تک سورج کا شمالی میل بڑھتا جاتا ہے اور ۲۲ جون کو اپنی اعظم قیمت یعنی ۲۳°، ۲۸َ پر پہنچتا ہے۔ سورج کا یہ انتہائی شمالی مقام نقطہ انقلابِ گرما کہلاتا ہے۔ ۲۲ جون سے ۲۳ ستمبر تک سورج کا میل گھٹتا رہتا ہے اور ۲۳ ستمبر کو پھر صفر ہو جاتا ہے۔ اس کے بعد ۲۲ دسمبر تک جنوبی میل بڑھتا جاتا ہے۔ یہاں تک کہ ۲۲ دسمبر کو جنوبی میل اپنی انتہائی قیمت ۔ ۲۳° ۲۸َ پر پہنچتا ہے۔ سورج کا یہ انتہائی جنوبی مقام نقطہ انقلاب سرما کہلاتا ہے۔ اس تاریخ کے بعد ۲۱ مارچ تک سورج کا جنوبی میل گھٹتا ہوا ۲۱ مارچ کو پھر صفر ہو جاتا ہے۔ کرہ سماوی پر سورج کے مقام کی اِن دوری تبدیلیوں کے ساتھ ساتھ کسی مقام مشاہدہ پر سورج کے طلوع اور غروب کی سمتیں، نصف النہاری راسی فاصلہ اور دن کا طول (یعنی طلوع سے غروب تک کا وقفہ) بدلتا رہتا ہے۔

اگر مقام مشاہدہ کا عرض بلد ۲۳°، ۲۸َ سے کم ہو تو اس تاریخ کو جب کہ سورج کا میل مقام مشاہدہ کے عرض بلد کے مساوی ہوتا ہے سورج نصف النہار کو نقطہ سمت الراس (س) پر عبور کرے گا۔ اگر عرض بلد ۲۳°، ۲۸َ سے زیادہ ہو تو سورج سال کے دوران میں کبھی بھی ٹھیک سمت الراس میں نہیں آئے گا۔

سورج اور ستاروں کی ظاہری حرکت کی توجیہہ۔ ہر روز سورج آسمان پر مشرق سے مغرب کی طرف حرکت کرتا ہوا دکھائی دیتا ہے۔ نیز رات کے وقت ستارے بھی اسی سمت میں حرکت کرتے معلوم ہوتے

ہیں لیکن صرف ان مشاہدات کی بنا پر یہ تصفیہ کرنا مشکل ہے کہ سورج اور ستاروں کی یہ حرکت حقیقی ہے یا نہیں۔ یہ روزمرہ کا مشاہدہ ہے کہ چلتی ہوئی ریل گاڑی میں سے پٹری کے بازو کے کھمبے اور درخت دیکھے جائیں تو وہ ریل گاڑی کی مخالف سمت میں حرکت کرتے دکھائی دیتے ہیں۔ لیکن درحقیقت وہ ساکن ہیں اور ریل گاڑی حرکت کر رہی ہے۔ بالکل اسی طرح سورج اور ستاروں کی ظاہری حرکت بھی زمین کی محوری گردش کی وجہ سے ہوتی ہے۔ زمین اپنے محور کے گرد ایک کوکبی یوم میں ایک کامل چکر مغرب سے مشرق کی طرف لگاتی ہے جس کی وجہ سے ستارے مخالف سمت میں محور سماوی کے گرد (جو زمین کے محور کے متوازی ہے) حرکت کرتے دکھائی دیتے ہیں۔ ثابت ستاروں میں سورج کی سالانہ حرکت دراصل زمین کی دوری حرکت (یعنی سورج کے گرد زمین کی سالانہ گردش) کی وجہ سے واقع ہوتی ہے۔ تقریبی حسابات کے لیے یہ مان لیا جا سکتا ہے کہ ثابت ستاروں کے لحاظ سے سورج کی ظاہری حرکت صعود مستقیم میں ۱° روزانہ ہوتی ہے۔ اس لحاظ سے سورج کے مدار اور کسی دیے ہوئے ستارے کے مدار کا درمیانی وقفہ ہر روز ۴ منٹ بڑھتا جائے گا۔

سیّارے اور ان کی حرکت ۔ ثابت ستاروں کے علاوہ چھوٹے نظام شمسی میں زمین کی طرح سورج کے گرد گھومنے والے (۸) اور سیارے بھی ہیں۔ ستاروں اور سیاروں میں امتیاز اس طرح کیا جاتا ہے کہ ستاروں کے سماوی محدد (یعنی صعود مستقیم اور میل) مستقل رہتے ہیں اور سیاروں کے بدلتے رہتے ہیں۔ نیز بغیر دوربین اور سماوی محددوں کی پیمائش کے

بھی سیاروں کی شناخت اس طرح کی جا سکتی ہو کہ سیارے ستاروں کی طرح ٹمٹماتے نہیں بلکہ نور کے ایک ثابت مبدا کی طرح نظر آتے ہیں اس کی وجہ یہ ہو کہ سیارے سورج کی منعکسہ روشنی سے چمکتے ہیں اور ستارے بہ ذات خود منور ہیں۔ قدیم ہیئت داں صرف (۵) سیاروں یعنی عطارد، زہرہ، مریخ، مشتری اور زحل سے واقف تھے۔ لیکن سترھویں صدی سے موجودہ زمانے تک تین اور سیارے یعنی یورے نس (URANUS) نپچون (NEPTUNE) اور پلوٹو (PLUTO) معلوم کیے گئے ہیں۔ اپنی ظاہری یومیہ حرکت کے علاوہ سیارے، ثابت ستاروں میں کبھی تو مغرب سے مشرق کی طرف حرکت کرتے دکھائی دیتے ہیں اور کبھی مشرق سے مغرب کی طرف۔ اور ان دو حرکتوں کے درمیان کچھ دنوں کے لیے وہ ساکن بھی معلوم ہوتے ہیں۔ قدیم ہیئت دانوں کو سیاروں کی اس راست (سیدھی) اور رجعی (اُلٹی) حرکت کی توجیہہ میں بڑی دقت پیش آئی۔ کیوں کہ وہ زمین کو ساکن مان کر ستاروں، سورج اور سیاروں کو زمین کے گرد حرکت کرتا ہوا تصور کرتے تھے۔ لیکن کوپرنیکس (COPERNICUS) اور اُس کے بعد کے ہیئت دانوں نے جو نظریے پیش کیے ان کی رُو سے سیارے اور زمین (جس کو ایک سیارہ تصوّر کیا جا سکتا ہو) اپنے اپنے مدار میں سورج کے گرد حرکت کرتے ہیں۔ اس 'شمس مرکزی' نظریے کی مدد سے سیاروں کی ظاہری راست اور رجعی حرکت کی توجیہہ نسبتاً آسانی سے کی جا سکتی ہو۔

کروی مثلث۔ اگر کرۂ سماوی پر تین بڑے دائرے جن کی سطحیں کرہ کے ایک ہی قطر میں سے نہیں گزرتی ہیں کھینچے جائیں تو ان کے تقاطع سے

کرہ کی سطح آٹھ حصّوں میں تقسیم ہو جاتی ہے۔ جن میں سے ہر ایک حصّہ ایک کروی مثلّث کہلاتا ہے یعنی کروی مثلّث تین بڑے دائروں کی قوسوں سے گھرا ہوا ہوتا ہے۔ ان قوسوں کے تین نقاط تقاطع کروی مثلّث کے راس کہلاتے ہیں۔ اگر کرہ کا مرکز و ہو اور کروی مثلّث کے راس ا، ب، ج تو قوسوں اب، ب ج، ج ا کے مقابل مرکز و پر بننے والے زاویوں سے کروی مثلّث کے ضلعوں کو ناپا جاتا ہے اور ہر راس میں سے گزرنے والی قوسوں کی سطحوں کا درمیانی زاویہ، راسی زاویہ کہلاتا ہے۔ مثلاً کروی مثلّث ا ب ج کا راسی زاویہ ب ا ج دراصل قوسوں اب اور ا ج کی سطحوں کا درمیانی زاویہ ہے۔ یہ زاویہ راس ا پر قوسوں اب، ا ج کے مماسوں کے درمیانی زاویے کے مساوی ہوتا ہے۔ کروی مثلّث کے تین ضلعے اور تین زاویے کروی مثلّث کے چھ جز کہلاتے ہیں۔ بالعموم جس کرے پر کروی مثلّث بنائے جائیں اس کا نصف قطر اکائی لیا جاتا ہے۔ علم ہئیت میں چوں کہ ہم بالعموم ستاروں، سیاروں وغیرہ کی سمتوں سے بحث کرتے ہیں۔ اس لیے اس نصف قطر کا اثر ہمارے حسابات پر نہیں پڑتا۔

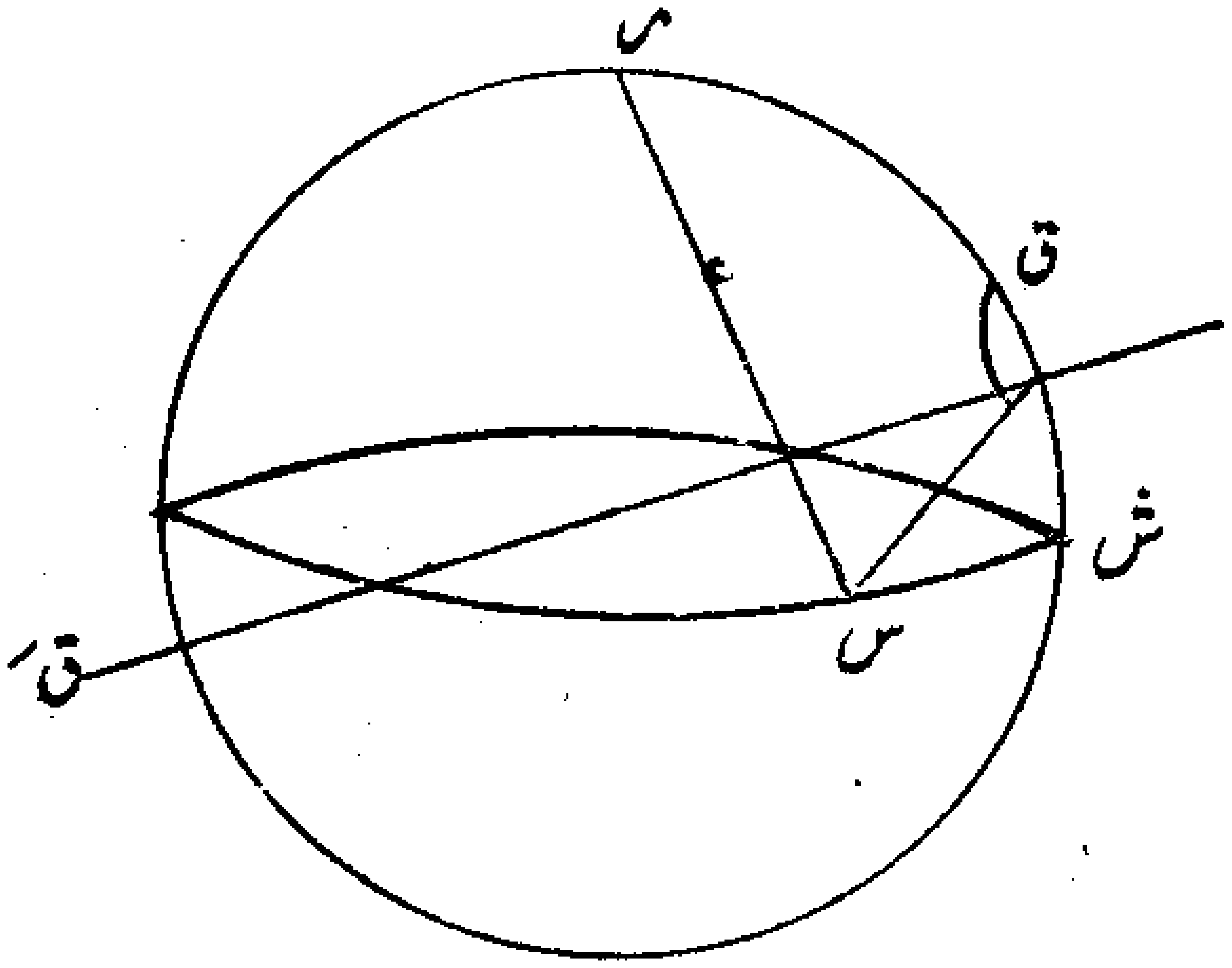
ترقیم۔ کروی مثلّث ا ب ج کے زاویوں کو ا، ب، ج سے تعبیر کیا جاتا ہے اور ان راسوں کے متقابل کے ضلعوں کو ا، ب، ج سے۔ مستوی مثلّث کے اہم ضابطوں کے جواب میں کروی مثلّث کے لیے بھی متناظر ضابطے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ جن میں سے حسب ذیل دو ضابطے نہایت اہم ہیں اور ہئیتی حسابات میں کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

(۱) جم ا = جم ب جم ج + جب ب جب ج جم ا

(۲) جب لہ / جب لہ = جب ب / جب ب = جب ج / جب ج

ان ضابطوں کو مان لیا جاتا ہے۔ (ان کے ثبوت علم مثلث کروی کی کسی درسی کتاب میں دیکھے جا سکتے ہیں) ان نہایت سادہ ضابطوں کی مدد سے ہم سورج اور ستاروں کے طلوع اور غروب کے متعلق نیز نصف النہار پر ستاروں کے مرور کے متعلق بہت سے دل چسپ مسائل حل کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۷۱۔ ۲۲ جون کو جب کہ سورج کا میل +۲۳° ۲۸′ ہو۔ حیدرآباد (عرض بلد ۱۷° ۲۳′) میں سورج کے طلوع ہونے کی سمت اور طلوع سے نصف النہار پر پہنچنے کی مدت معلوم کرو۔



فرض کرو کہ افق پر (بہ وقت طلوع) سورج کا مقام س ہے۔ سورج کا قطبی فاصلہ ق س = ۹۰° − میل

= ۹۰° − ۲۳° ۲۸′ = ۶۶° ۳۲′

ش ق = مقام مشاہدہ کا عرض بلد = ۱۷° ۲۳′

زاویہ ق ش س = ۹۰° م ق = ۹۰° − ۱۷° ۲۳′

= ۷۲° ۳۷′

ر س = ۹۰° (کیوں کہ افق پر کا ہر نقطہ راس سے ۹۰° کے فاصلے پر ہوتا ہے)
کروی مثلث ق ر س میں

جم ر س = جم (ق ر) جم (ق س) + جب (ق ر) جب (ق س)
× جم ر ق س

یعنی جم ۹۰° = جم (۲۳° ۲۷′) جم (۶۶° ۳۲′)
+ جب (۲۳° ۲۷′) جب (۶۶° ۳۲′) جم (ر ق س)

یعنی ۰ = جم (۲۳° ۲۷′) جم (۶۶° ۳۲′) + جب (۲۳° ۲۷′) جب (۶۶° ۳۲′)
جم (ر ق س)

∴ جم ر ق س = − [جم (۲۳° ۲۷′) جم (۶۶° ۳۲′)] ÷ [جب (۲۳° ۲۷′) جب (۶۶° ۳۲′)]
= − مم (۲۳° ۲۷′) مم (۶۶° ۳۲′)

∴ جم ر ق س = − مس (۱۷° ۲۳′) مس (۲۳° ۲۸′)

جدولوں سے قیمتیں معلوم کرکے حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ
ر ق̂ س = ۹۷° ۴۸′

ہمیں معلوم ہے کہ سورج محور سماوی کے گرد ۲۴ گھنٹوں میں ۳۶۰° میں سے گھوم جاتا ہے اس لیے (۹۷° ۴۸′) میں سے گھومنے کے لیے تقریباً ۶ گھنٹے ۳۱ منٹ لگیں گے یعنی بہ وقت طلوع سورج کا ساعتی زاویہ (۶ گھنٹے ۳۱ منٹ) ہے۔

نوٹ:۔ ظاہر ہے کہ نصف النہار سے غروب تک بھی اتنا ہی وقفہ درکار ہوگا۔
یعنی ۲۲ جون کو حیدرآباد میں دن کا طول ۱۳ گھنٹے ۲ منٹ ہوگا۔ ان حسابات میں ہم نے سورج کے مرکز کے طلوع اور غروب کا وقت لیا ہے نیز کرہ ہوائی کے انعطاف کے اثر کو نظرانداز کردیا ہے۔ اگر اسے

بھی ملحوظ رکھا جائے تو یہ طول تقریباً ۱۲ گھنٹے ۱۱ منٹ حاصل ہوگا۔

اب ہمیں ش س (یعنی طلوعِ آفتاب کی سمت) محسوب کرنا ہے۔

کروی مثلث ش ق س میں

ش ق = ۱۷° ۲۳′

ق س = ۶۶° ۳۲′

ق ش س = ۹۰°

∴ جم (ق س) = جم ق ش × جم ش س

+ جب ق س جب ش س جم ق ش س

چوں کہ جم ق ش س = جم ۹۰° = صفر

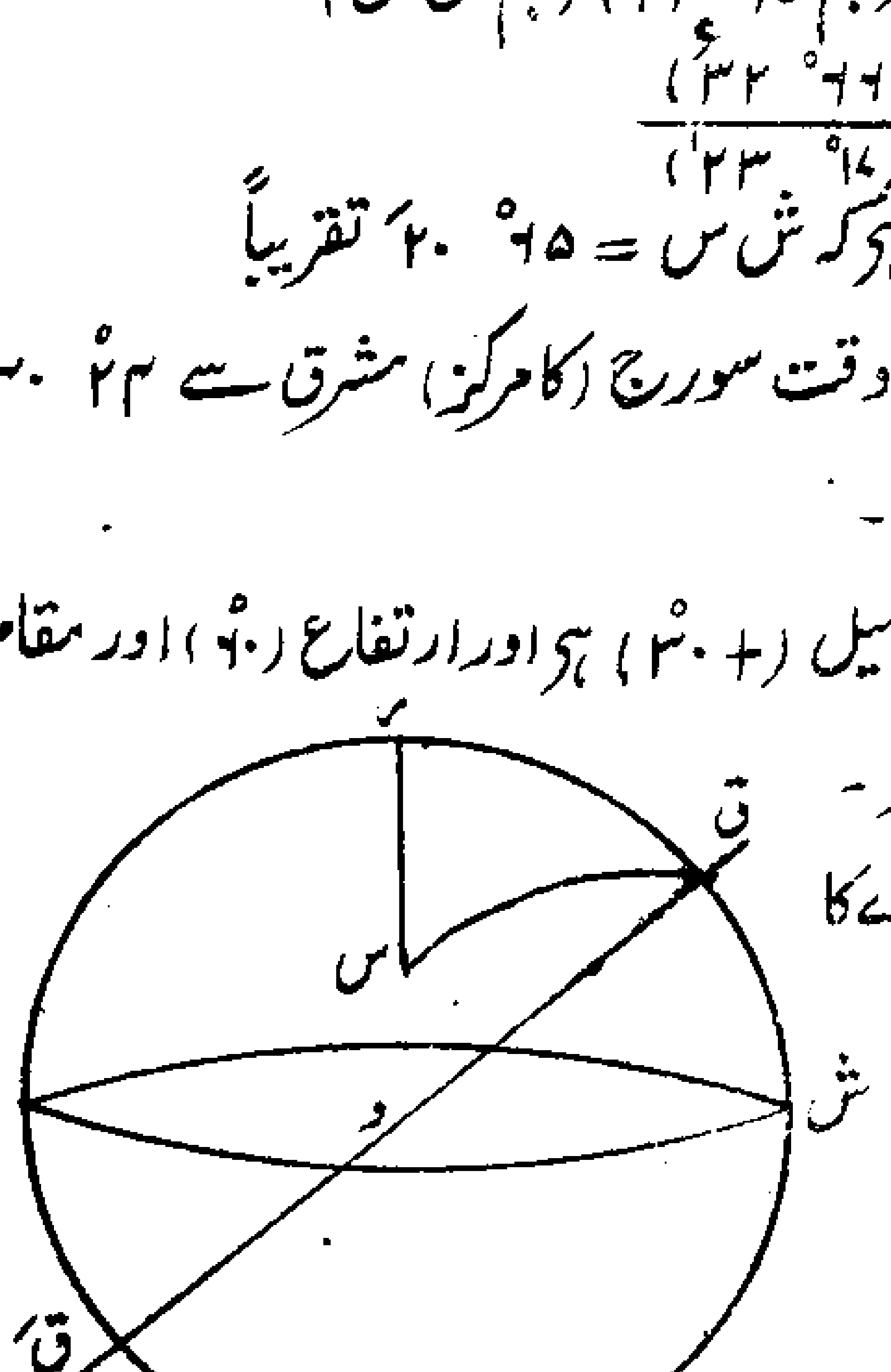
اس لیے جم (۶۶° ۳۲′) = (جم ۱۷° ۲۳′) (جم ش س)

جم ش س = جم (۶۶° ۳۲′) / جم (۱۷° ۲۳′)

اس لیے حاصل ہوتا ہے کہ ش س = ۶۵° ۲۰′ تقریباً

پس معلوم ہوا کہ طلوع کے وقت سورج (کا مرکز) مشرق سے ۲۴° ۴۰′ شمال کی طرف ہٹا ہوا ہوگا۔

مثال ۲: ایک ستارے کا میل (+ ۳۰°) ہے اور ارتفاع (۶۰°) اور مقام مشاہدہ کا عرض بلد (۵۴°) ہے۔



بتاؤ کہ بہ وقت مشاہدہ ستارے کا ساعتی زاویہ کیا ہے۔

∵ ش ق = ۵۴°

∴ ق ن = ۵۴°

ستارے کا ارتفاع = ۶۰°

∴ راسی فاصلہ ر س = ۳۰°

ستارے کا میل = ۳۰°، ∴ قطبی فاصلہ ق س = ۶۰°

کروی مثلث ق س ر میں

جم ر س = جم (ق ر) جم (ق س) + جب (ق ر) جب (ق س) جم (ر ق س)

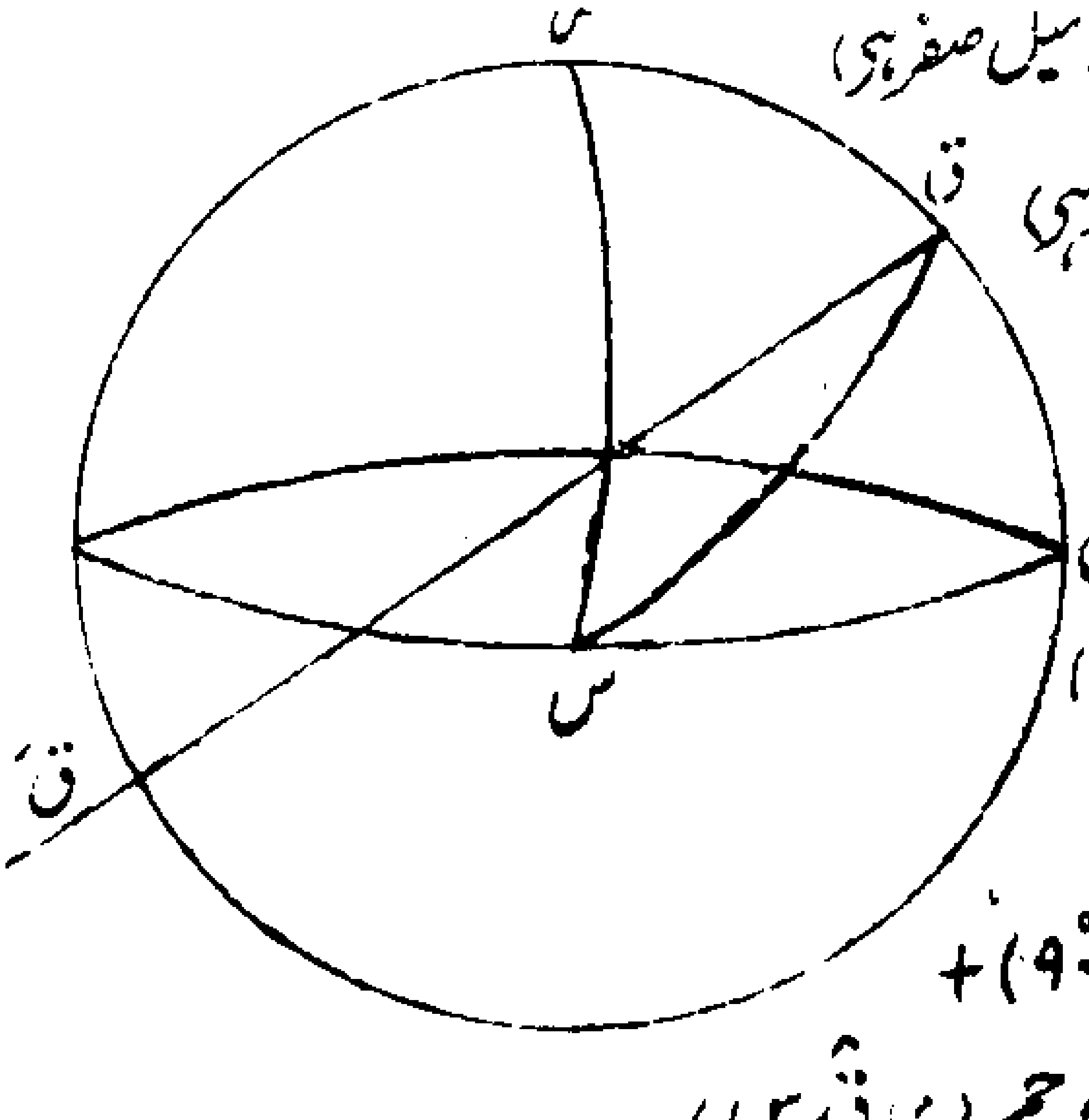
یعنی جم ۳۰° = جم ۴۵° جم ۶۰° + جب ۴۵° جب ۶۰° جم (ر ق س)

جدولوں سے قیمتیں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

ر ق س = ۳۴° ۱۲′ تقریباً

یعنی مشاہدے کے تقریباً ۲ گھنٹے ۱۳ منٹ بعد ستارہ نصف النہار پر آئے گا۔ اگر وہ مشاہدے کے وقت نصف النہار کے مشرق کی طرف ہو۔

مثال ۳۔ بتاؤ کہ اعتدال ربیع کے دن کسی مقام پر دن کا طول ۱۲ گھنٹے ہوگا۔ نیز یہ بھی ثابت کرو کہ سورج ٹھیک مشرق میں طلوع ہوتا ہے اور ٹھیک مغرب میں غروب ہوگا



ق س = ۹۰° (کیوں کہ سورج کا میل صفر ہے)

ر س = ۹۰° (کیوں کہ س افق پر ہے)

کروی مثلث ر ق س میں

جم ر س = جم (ق ر) جم (ق س) + جب (ق ر) جب (ق س) جم (ر ق س)

جم ۹۰° = جم (ق ر) جم (۹۰°) + جب (ق ر) جب (۹۰°) جم (ر ق س)

∴ ۰ = ۰ + جب (ق ر) × ۱ × جم (ر ق س)

جس سے ظاہر ہے کہ جم ر ق س = ۰

∴ ر ق س = °۹۰

یعنی طلوع کے وقت سورج کا ساعتی زاویہ = ۶ گھنٹے

∴ دن کا طول = ۱۲ گھنٹے

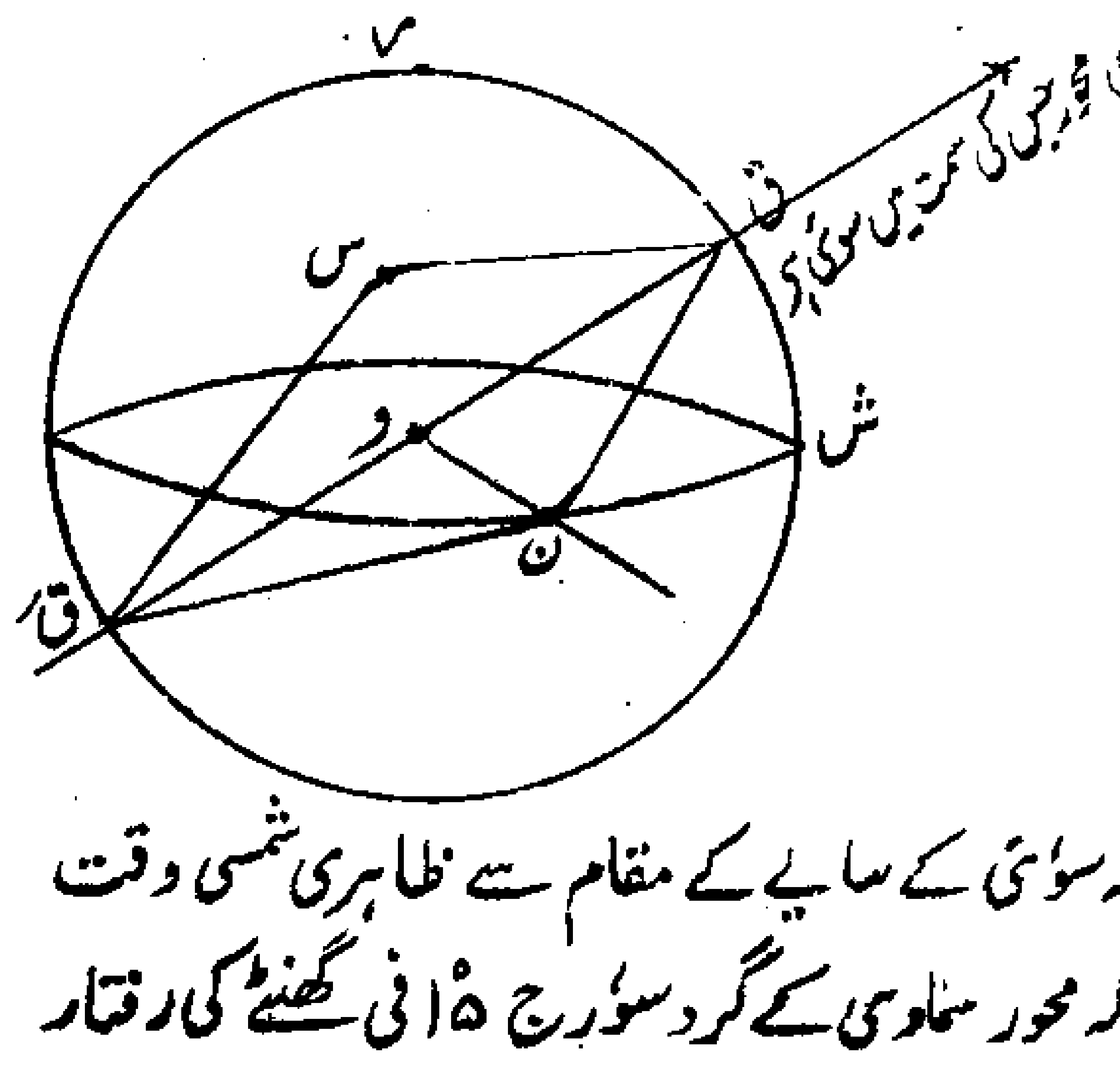
نیز کروی مثلث ر ق س میں

س ق = س ر = °۹۰

∴ زاویہ س ر ق = زاویہ س ق ر = °۹۰

یعنی طلوع کے وقت سورج شمال سے °۹۰ کے فاصلے پر ہوتا ہے یعنی ٹھیک مشرق میں طلوع ہوتا ہے۔ اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے کہ سورج ٹھیک مغرب میں غروب ہوتا ہے۔

دھوپ گھڑی۔ کروی مثلثوں کے استعمال کی ایک مشہور مثال دھوپ گھڑی ہے۔ جس کو عربوں نے ایجاد کیا۔ عرب ہیئت دانوں نے دھوپ گھڑی کی سوئی کو محور سماوی کی سمت میں قائم کیا اور افقی سطح



پر ایسی درجہ بندی کی کہ سوئی کے سایے کے مقام سے ظاہری شمسی وقت معلوم ہو سکے۔ چوں کہ محور سماوی کے گرد سورج ۱۵° فی گھنٹے کی رفتار

سے گھومتا ہے اس لیے کسی دیے ہوئے وقت پر سورج کا ساعتی زاویہ معلوم ہو سکتا ہے۔ دھوپ گھڑی کی درجہ بندی کے لیے اب یہ معلوم کرنا کافی ہے کہ مختلف ساعتی زاویوں کے جواب میں دھوپ گھڑی کی سوئی کے سایے کی سمت کیا ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ سورج س، نصف النہار کے مغرب کی طرف ہے اور ساعتی زاویہ = ر قِ س تب دھوپ گھڑی کی سوئی و ق کا سایہ کرہ سماوی پر ق ن ہوگا جہاں س ق ن قَ ایک بڑا دائرہ ہے اور ن افق پر ہے۔ ظاہر ہے کہ ش قِ ن = سورج کا ساعتی زاویہ ر ق س۔ نیز ق ش = مقام مشاہدہ کا عرض بلد اور ق ش ن = °۹۰۔ اس لیے کروی مثلث ق ش ن کو حل کرنے سے ش ن محسوب کیا جا سکتا ہے یعنی سوئی کے سایے و ن کی سمت حاصل ہوتی ہے۔

اس طرح سے مختلف ساعتی زاویوں کے جواب میں سوئی کے سایے کے مقام معلوم کیے جا سکتے ہیں۔

نوٹ۔ اگر درجہ بندی ایسی مستوی سطح پر کی جائے جو محورِ سماوی پر یعنی دھوپ گھڑی کی سوئی پر عمود وار ہے تو کروی مثلثوں کو استعمال کرنے کی ضرورت ہی پیش نہیں آتی کیوں کہ محورِ سماوی کے گرد سورج کی یکساں زاویٔ رفتار کی وجہ سے ایک گھنٹے میں سوئی کا سایہ °۱۵ کے زاویے میں سے گھومتا ہے۔

دو مقاموں کا درمیانی فاصلہ۔ اگر کرہ زمین پر ا اور ب دو دیے ہوئے مقام ہوں اور زمین کا قطب شمالی ق ہو تو کروی مثلث ا ق ب میں ق ا، ق ب اور ا ق ب معلوم ہیں۔ اس لیے کروی مثلثوں

کے ضابطہ (۱) کی مدد سے قوس ا ب محسوب کی جا سکتی ہے۔ یعنی وہ زاویہ محسوب کیا جا سکتا ہے جو ا ب کے مقابل کرہ زمین کے مرکز پر بنتا ہے۔ چوں کہ زمین کا نصف قطر (۴۰۰۰) میل ہے اس لیے فاصلہ ا ب میلوں میں محسوب کیا جا سکتا ہے۔

یاد رکھنے کی باتیں۔

(۱) کسی فلکی جِرم کا میل = (مقام مشاہدہ کا عرض بلد) ± (نصف النہاری راسی فاصلہ)

(۲) کروی مثلّث ا ب ج میں

جم ا = جم ب جم ج + جب ب جب ج جم ا

اور $\dfrac{\text{جب ا}}{\text{جب ا}} = \dfrac{\text{جب ب}}{\text{جب ب}} = \dfrac{\text{جب ج}}{\text{جب ج}}$

نواں باب

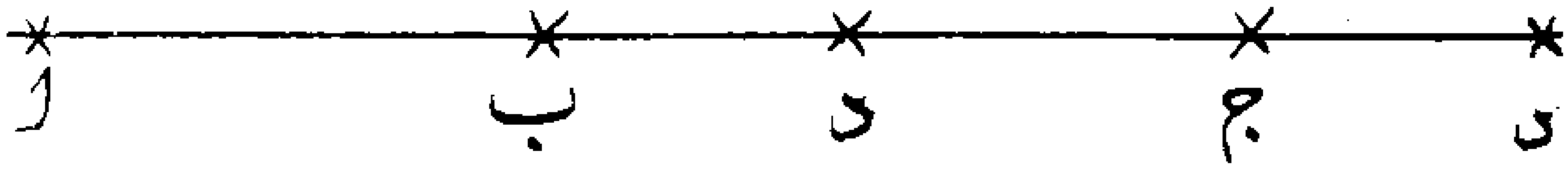
ڈے کارٹ کا علم ہندسہ یا ترسیمات

پندرھویں صدی عیسوی کے ختم پر ریاضی کا ایک نیا دور شروع ہوا۔ پہیوں سے چلنے والی گھڑیوں کی ساخت، جنگ میں توپ خانے کا استعمال جہاز رانی کے لیے ہیئتی نقشوں اور جدولوں کی تیاری نے ریاضی دانوں کو اس امر پر مجبور کیا کہ وہ نئی جدولوں کے لیے نئے فنی طریقے استعمال کریں۔ چوتھے باب میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اقلیدس نے اپنے علم ہندسہ میں مقام اور وقت کو کوئی جگہ نہیں دی تھی۔ چودھویں صدی تک گھڑیوں کا استعمال صرف خانقاہوں تک محدود رہا لیکن جب گلیلیو نے رقاص کی حرکت کا قانون دریافت کیا تو وقت کے چھوٹے وقفوں کا ناپنا ممکن ہوگیا اور علم حیل میں ایک نئے باب کا آغاز ہوا۔ اسکندریہ کے علم سکون کے مقابلے میں علم حرکت کی بنیاد ڈالی گئی۔ توپ خانوں کے استعمال سے تیز رفتار گولوں کے ٹھیک چلنے اور نشانہ لگنے کے متعلق سوال حل کرنے کی ضرورت پیش آئی۔ اور اس سلسلے میں چھوٹے وقفوں کو ناپنے کے لیے رقاص والی گھڑیاں بنائی جانے لگیں۔ توپ کے گولے کی حرکت اور گولے کا نشانہ معلوم کرنے کے لیے علم مثلث سے خوب استفادہ کیا گیا اور ریاضی دانوں پر واضح ہوا کہ ان

مسئلوں کے حل کرنے میں زمان و مکاں کو کسی طرح نظر انداز نہیں کیا جا سکتا۔ سیاحی اور بحری تجارتی سفروں کے دوران میں ایسے مستوی نقشے استعمال ہونے لگے جن پر متوازی خطوں کے ذریعے مقاموں کے طول بلد اور عرض بلد کو ظاہر کیا گیا تھا۔ نیز قطب نما کی مدد سے ایسے سمندروں پر بھی بحری سفر ممکن ہوئے جہاں بادلوں وغیرہ کی وجہ سے ستارے بہ مشکل دکھائی دیتے ہیں۔ قطب نما کی مدد سے سمت کے تعین اور ارضی اور ہیئتی نقشوں کے استعمال نے دے کارت کے علم ہندسہ کی تشکیل کے لیے راستہ ہموار کیا۔ سترھویں صدی کے اوائل میں دے کارت نے اس نئے ہندسۂ تحلیلی کی مدد سے ایسے منحنیوں کی خاصیتیں معلوم کیں جو صرف پٹری اور پرکار سے نہیں بنائے جا سکتے۔ کوپرنیکس، ٹائیکو براہی، کیپلر اور گلیلیو نے صحیح پیمایشوں کے ذریعے یہ معلوم کیا کہ سیاروں کے مدار ناقص کی شکل کے (یعنی بیضوی) ہوتے ہیں نہ کہ افلاطون کے نظریے کے مطابق ستاریہ۔ عمر خیام نے مخروطی تراشوں کی مدد سے تیسرے درجے کی مساوات کا حل دریافت کیا تھا اور بطلیموس نے طول بلد اور عرض بلد کی مدد سے زمین کے نقشے تیار کیے تھے لیکن ہندسہ تحلیلی کا ہمہ گیر استعمال کا سہرا (جس سے ریاضی کی تاریخ میں ایک نیا دور شروع ہوتا ہے) دے کارت ہی کے سر ہے۔ ہماری روزمرہ زندگی میں ترسیمات اس کثرت سے استعمال ہوتے ہیں کہ ہمیں تعجب ہوتا ہے کہ یہ اہم ایجاد اقلیدس کے زمانے سے سترھویں صدی تک کس وجہ سے ملتوی رہی لیکن ہمیں یہ بھی خیال رکھنا چاہیے کہ کسی زمانے کی ذہنی ترقی اس زمانے کے ماحول پر منحصر ہوتی ہے اور جب تک تمدنی ضرورتیں پیش نہیں آتیں

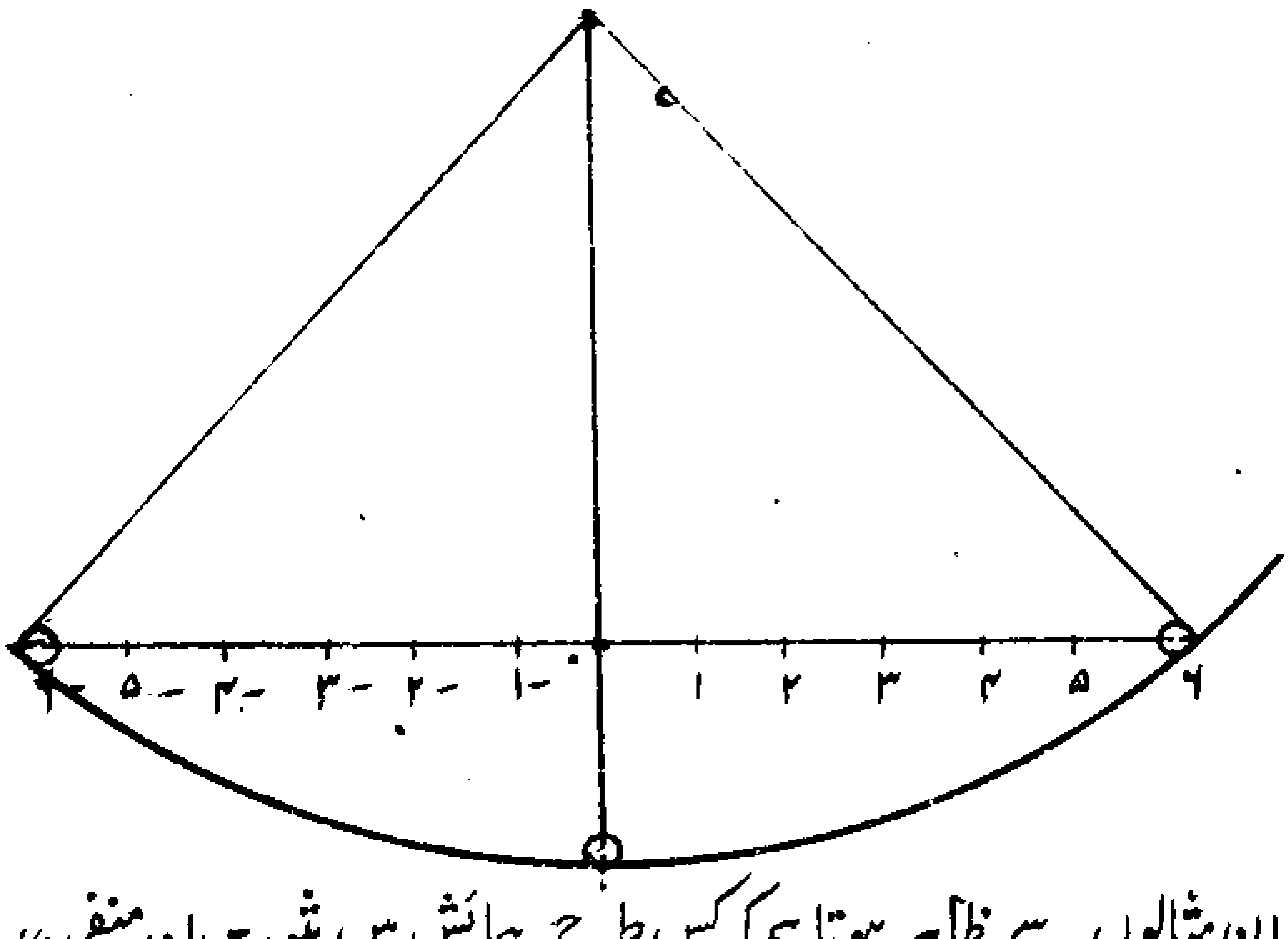
کوئی اہم ایجاد بھی وجود میں نہیں آتی۔ چناں چہ دے کارت کے زمانے میں ہندسہ تحلیلی کی ایجاد اس زمانے کی تمدّنی ضرورتوں کے تحت عمل میں آئی۔

محلِ وقوع اور پیمائش۔ اقلیدسی اور دے کارتی علم ہندسہ میں ایک اصولی اختلاف یہ ہے کہ اقلیدسی علم ہندسہ میں محلِ وقوع کو کوئی اہمیت حاصل نہیں ہے۔ مثلاً ایک ہی طول والے مختلف خط جو مختلف مقاموں پر ہوں ایک دوسرے کے ہر طرح مساوی تصور کیے جاتے ہیں لیکن دے کارتی علم ہندسہ میں طول کے ساتھ خط کے محلِ وقوع اور خصوصاً اس کی سمت کو لازماً ملحوظ رکھا جاتا ہے۔ اگر ایک خط پر کے کسی ثابت نقطے سے ایک سمت میں ناپے ہوئے فاصلوں کو مثبت مانا جائے تو اس کی مخالف سمت میں ناپے ہوئے فاصلوں کو منفی ماننا پڑتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک سڑک پر چار مقام ا، ب، ج، د ہیں۔ اگر ا سے ب کا



فاصلہ (۵۰) گز ہو اور ب سے ج کا فاصلہ (۶۰) گز ہو تو فاصلوں اب اور ب ج کو جو ایک ہی سمت میں ناپے گئے ہیں (+ ۵۰) گز اور (+ ۶۰) سے تعبیر کیا جائے گا۔ اگر ایک شخص ا سے ب تک پھر ب سے ج تک چلے تو اس کا طے شدہ فاصلہ = (۵۰ + ۶۰) گز = ۱۱۰ گز۔ اب اگر وہ ج سے د تک یعنی مخالف سمت میں فاصلہ (۳۵) گز طے کرے۔ تو یہ فاصلہ (- ۳۵) گز سے تعبیر کیا جائے گا اور اب ابتدائی مقام ا سے اس کا فاصلہ = (۱۱۰ - ۳۵) گز یعنی (+ ۷۵) گز ہوگا۔ یہی حال رقاص کی

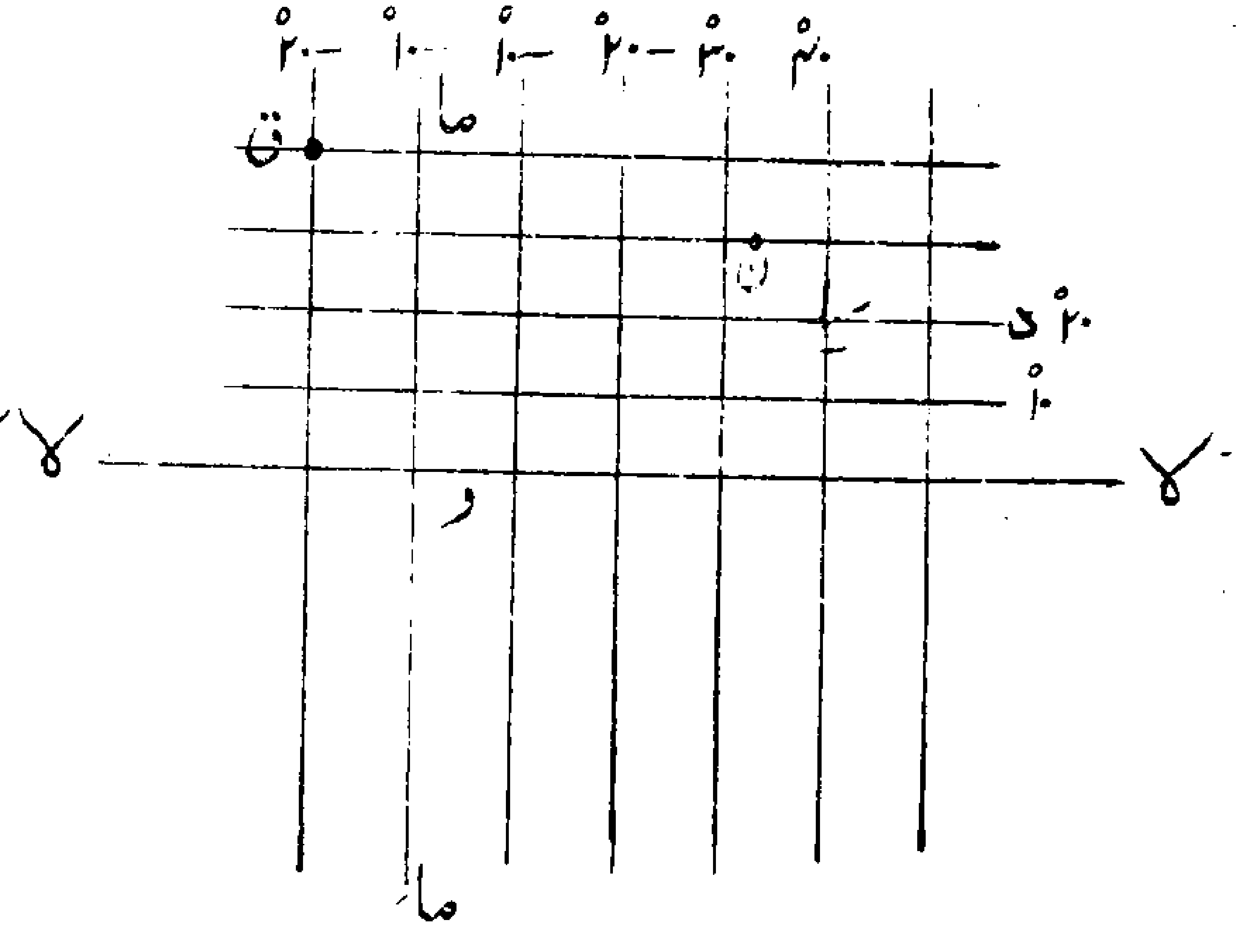
حرکت (اہتزاز) کا بھی ہے۔ اگر ہم رقاص کے ابتدائی مقام (یعنی حالتِ سکون کے مقام) سے ایک جانب کے فاصلوں کو مثبت (+) قرار دیں تو مخالف جانب کے فاصلوں کو منفی قرار دینا ہوگا۔ اگر رقاص مثبت جانب حرکت کرتا ہوا اپنے انتہائی مقام (+۶) پر پہنچے تو اس کے بعد رقاص کی حرکت منفی سمت میں ہوگی یعنی اس کا فاصلہ (+۶) سے گھٹتا ہوا صفر ہو جائے گا اور پھر صفر سے (-۶) جو منفی جانب رقاص کا انتہائی مقام ہے اور اس کے بعد رقاص پھر مثبت جانب حرکت کرنے لگے گا اور فاصلہ (-۶) سے صفر اور صفر سے (+۶) ہو جائے گا۔ اور یہی دوری (اہتزازی) حرکت جاری رہے گی۔



ان مثالوں سے ظاہر ہوتا ہے کہ کس طرح پیمائش میں مثبت اور منفی عددوں کی ضرورت پیش آتی ہے۔

زمین کے مستوی نقشے ۔ اگر ہم طول بلد اور عرض بلد کے خطوں کے ذریعے زمین پر کسی مقام کو متعین کرنا چاہیں تو استوائے ارضی اور

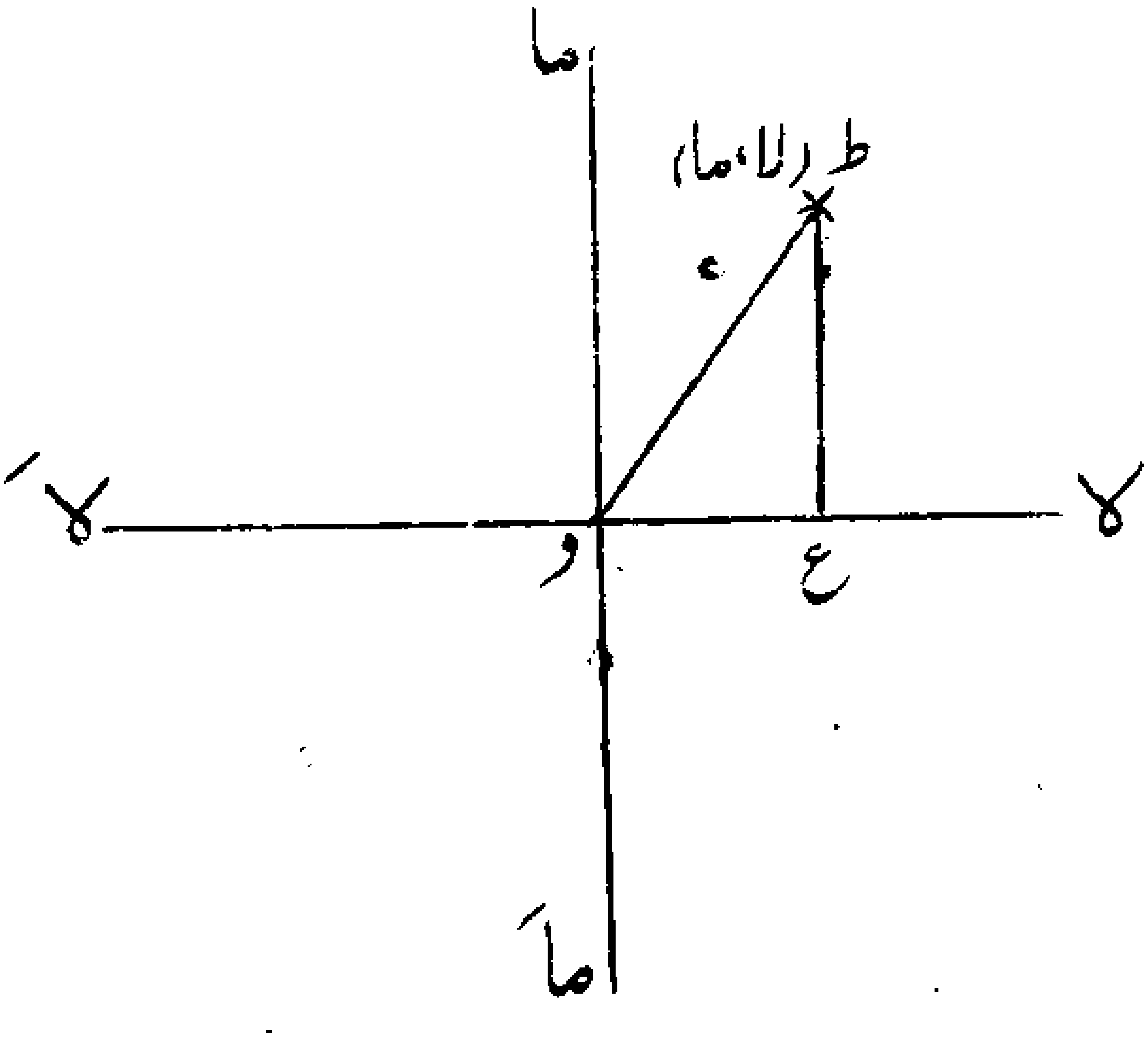
کسی خاص مقام مثلاً گرینوچ میں سے گزرنے والے خط طوٗل بلد کو مستوی سطح پر خطوں کے ذریعے تعبیر کرتے ہیں۔ ان خطوں لاَ و لا اور ماَ و ما کا نقطہ تقاطع و مبدا کہلاتا ہے۔ عرض بلد کے خط، استوا لاَ و لا کے متوازی کھینچے جاتے ہیں اور طوٗل بلد کے خط، ماَ و ما کے متوازی۔ نیز شمالی عرض بلد کو مثبت اور جنوبی عرض بلد کو منفی قرار دیا جاتا ہے اسی طرح مشرقی طوٗل بلد (۰ سے ۱۸۰° تک) کو مثبت اور مغربی طوٗل بلد (۰ سے ۱۸۰°) کو منفی قرار دیا جاتا ہے۔ ان قرار دادوں کے مطابق کسی مقام کو جس کا طوٗل بلد اور عرض بلد معلوم ہو اس مستوی پر ایک نقطے کے ذریعے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔



مثلاً وہ مقام جس کا طوٗل بلد (۳۰° مشرق) اور عرض بلد (۲۰° شمال) ہے نقطہ ن سے تعبیر ہوتا ہے اور وہ مقام جس کا طوٗل بلد (۲۰° مغرب) اور عرض بلد (۴۰° شمال) ہے نقطہ ق سے تعبیر ہوتا ہے۔

ظاہر ہے کہ اس طرح سے کرہ ارض پر کے مقاموں کو مستوی سطح پر تعبیر کرنے میں کسی خطۂ زمین کی شکل برقرار نہیں رہ سکتی۔ بالخصوص ایسا خطۂ زمین جو قطبوں کے قریب ہو زیادہ پھیلا ہوا یعنی اپنی اصلی شکل سے زیادہ چوڑا معلوم ہوگا۔

بالعموم حوالے کے خطوں لاَ و لا اور ماَ و ما کو جو مستوی سطح پر لیے جاتے ہیں۔ حوالے کے لا محور اور ما محور کہتے ہیں اور ان کے لحاظ سے کسی نقطہ ط کا مقام متعین کرنے کے لیے ط سے لا محور پر عمود ط ع نکالا جاتا ہے اور اگر و ع کا طول مع علامت لا ہو اور



ع ط کا طول مع علامت ما ہو تو عدد لا، ما نقطہ ط کے محدد کہلاتے ہیں فاصلوں و ع اور ع ط کو طول کی ایک ہی اکائی کی رقوم میں مانا جاتا ہے چوں کہ تمام فاصلے مبدا و سے ناپے جاتے ہیں۔ اس لیے و کے محدد (۰، ۰) ہوں گے۔

فرض کرو کہ و کو مرکز مان کر نصف قطر ر والا ایک دائرہ کھینچا گیا

ہے جس پر کا کوئی نقطہ ط (لا، ما) ہے۔ وط کو ملا کر قائم الزاویہ مثلث وط ع پر غور کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ (وع)^2 + (ع ط)^2 = (وط)^2 فیثاغورث کا مسئلہ۔ یا لا^2 + ما^2 = ر^2

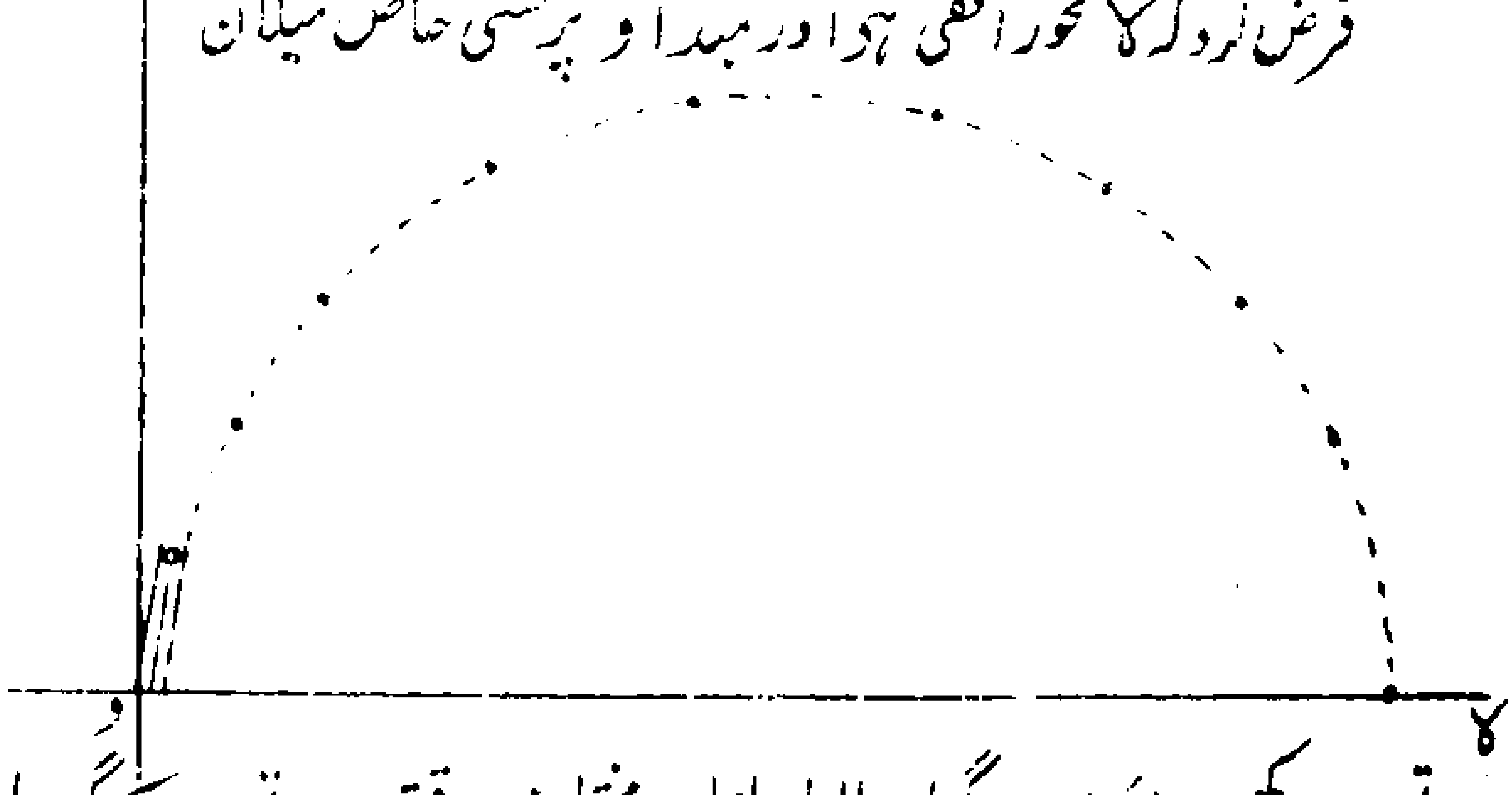
یہ رشتہ دائرے کے محیط پر نقطے کے لیے درست ہے اس لیے اس رشتے کو دائرے کی مساوات کہتے ہیں۔

پس معلوم ہوا کہ اس دائرے کی مساوات جس کا مرکز مبدا یعنی نقطہ و پر ہے اور نصف قطر ر ہے۔ لا^2 + ما^2 = ر^2 ہے۔

اسی طرح کسی متحرک نقطے کے طریق کی مساوات معلوم کی جا سکتی ہے جب کہ نقطے کی حرکت کا قانون معلوم ہو۔

توپ کے گولے کا طریق (یعنی راستہ)۔ اگر توپ کو کسی خاص میلان پر رکھ کر چلایا جائے تو دی کارتی علم ہندسہ کی مدد سے ہم اس کا راستہ فضا میں متعین کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ لا محور افقی ہے اور مبدا و پر کسی خاص میلان



پر توپ رکھی ہوئی ہے اور گولہ چلایا جاتا ہے مختلف وقتوں پر توپ کے گولے کے مبدا سے افقی اور انتصابی فاصلے یعنی توپ کے گولے کے محدد (لا، ما) معلوم کر کے ان نقطوں کو مرتسم (یعنی نشان زدہ) کیا جا سکتا ہے اور ان

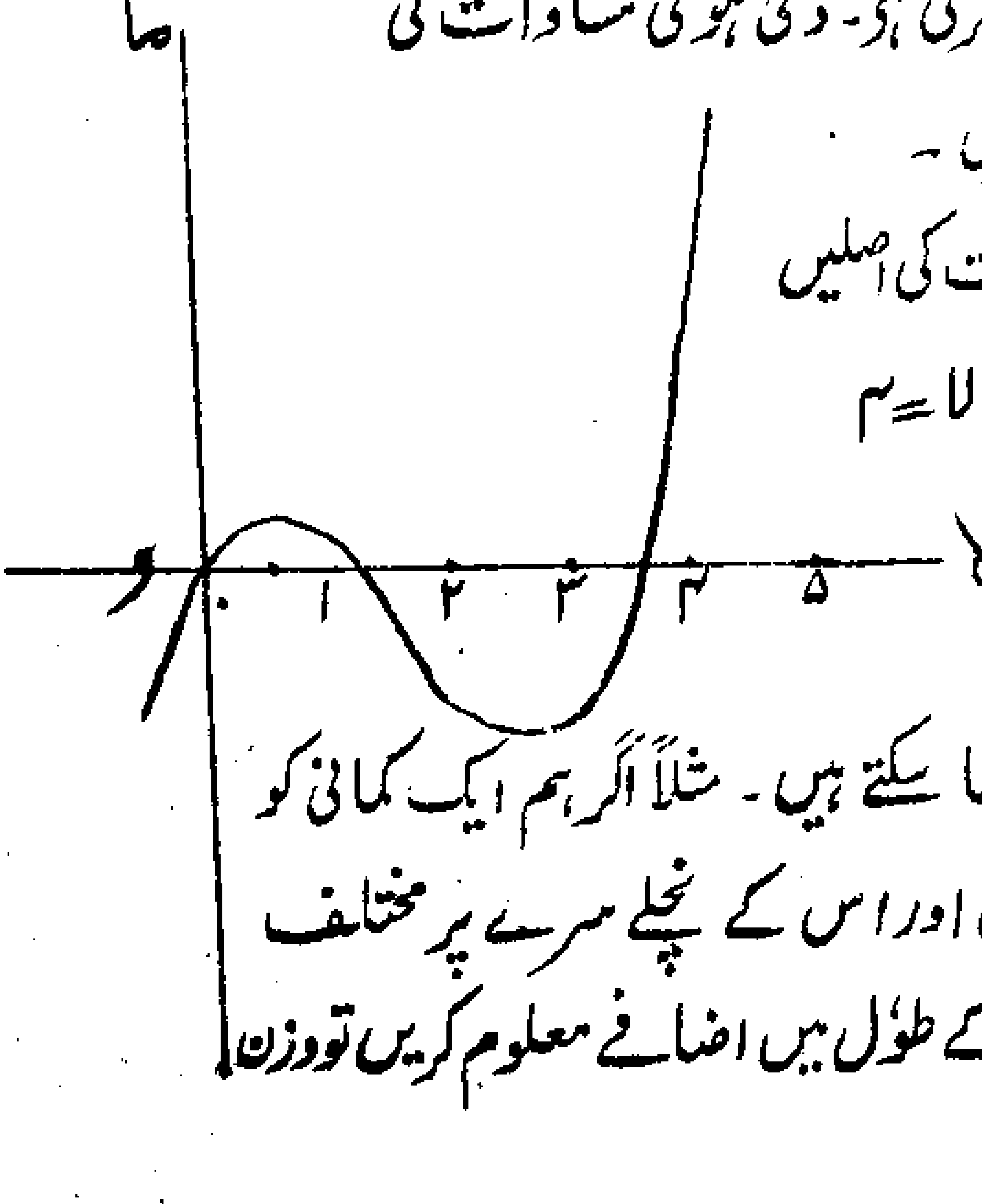
نقطوں میں سے گزرنے والا منحنی خط توپ کے گولے کے راستے کو ظاہر کرتا ہے۔ اگر گولے کی ابتدائی رفتار س ہو اور افق سے توپ زاویہ ط بنائے تو توپ کے گولے کا راستہ حسب ذیل مساوات سے تعبیر ہوتا ہے۔

$$\text{ما} = \text{لا مس ط} - \frac{\text{ج}}{\text{۲ س}^{۲}\ \text{جم}^{۲}\text{ط}} \times \text{لا}^{۲}$$

اگر س اور ط معلوم ہوں تو اس مساوات میں ما = ۰ درج کرنے سے وہ مقام معلوم ہوتا ہے جہاں توپ کا گولہ زمین پر گرتا ہے

اس مساوات کی شکل ما = لا - ب لا^{۲} کی ہے، ایسی مساواتوں سے تعبیر ہونے والے منحنی مکانی کہلاتے ہیں۔

اسی طرح کسی متحرک نقطے کے طریق کی مساوات دی جائے تو طریق مرتسم کیا جا سکتا ہے۔ نیز ترسیموں کی مدد سے مساواتیں بھی حل کی جا سکتی ہیں مثلاً اگر ہمیں مساوات لا^{۳} - ۵ لا^{۲} + ۴ لا = ۰ حل کرنا ہو تو ما = لا^{۳} - ۵ لا^{۲} + ۴ لا کی ترسیم کھینچی جاتی ہے اور ان نقطوں کے لا محدد سے جہاں یہ ترسیم کا - محور کو قطع کرتی ہے۔ دی ہوئی مساوات کی اصلیں معلوم ہوتی ہیں۔



چناں چہ اس مساوات کی اصلیں ہیں لا = ۰، لا = ۱، لا = ۴

ترسیموں کی مدد سے طبیعی قانون (یا کلیے) بھی معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ مثلاً اگر ہم ایک کمانی کو کسی نقطے سے لٹکائیں اور اس کے نچلے سرے پر مختلف وزن باندھ کر کمانی کے طول میں اضافے معلوم کریں تو وزن

اور طول کے اضافے کی ترسیم کھینچنے سے ان دونوں کا باہمی تعلق ظاہر ہوگا اگر وزن کو و اور کمانی کے طول کے اضافے کو ل سے تعبیر کیا جائے تو یہ رشتہ مساوات و = ک ل سے ظاہر ہوتا ہے۔ اس رشتے کی مدد سے و کی مختلف قیمتوں کے جواب میں ل معلوم ہوتا ہے۔ کمانی دار ترازو اسی اصول پر بنائی گئی ہے۔ مختلف کمانیوں پر حسب بالا تجربے کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ک کی قیمت کمانی کی موٹائی اور اس کی دھات پر منحصر ہے۔ مختلف موٹائیوں کے لیے ک کی قیمتیں معلوم کرکے موٹائی اور ک میں رشتہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ ک کو کمانی کی لچک کی قدر یا لچک کا مستقل کہتے ہیں۔

ترسیمات نہ صرف طبیعی علوم میں بلکہ عمرانی علوم میں بھی بہت کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔ جس طرح ایک کارٹون کسی سیاسی نقطۂ نظر کو تحریر کے سیکڑوں صفحوں کی نسبت زیادہ وضاحت سے پیش کرتا ہے، اسی طرح ترسیمیں (جو دراصل ریاضی کے کارٹون ہیں) بیک نظر دو بدلنے والی مقداروں کے باہمی تعلق کو جبر و مقابلہ کے سیکڑوں صفحوں سے زیادہ واضح طور پر پیش کرتی ہیں۔ مثلاً اگر کسی صحت ور بچے کے وزن اور عمر کے تعلق کو ترسیمی طور پر تعبیر کیا جائے تو مختلف بچوں کی عمروں اور وزنوں کا مقابلہ اس ترسیم سے کرکے معلوم ہو سکتا ہے کہ یہ دوسرے بچے صحت ور ہیں یا نہیں؟ اسی طرح کسی قوم میں مجرموں کی تعداد اور بے روزگاروں کی تعداد کی ترسیم کھینچی جائے تو یہ واضح ہوتا ہے کہ بے روزگاری کا تعلق جرائم سے کس حد تک ہے۔

دی کارتی ہندسہ کی کوتاہیاں۔ اس کتاب میں ہم نے ریاضی اور اس کے کارآمد اطلاقات پر بحث کرنے اور ان کو واضح کرنے کی کوشش

کی ہر اور اس سلسلے میں اس باب میں یہ بھی بتایا ہر کہ دی کارتی ہندسہ نے اقلیدسی ہندسہ کی کوتاہیوں میں سے ایک کو کس طرح دور کیا یعنی نقطوں اور خطوں کے مقام کو ملحوظ رکھا جسے اقلیدسی ہندسہ نے نظر انداز کر دیا تھا لیکن اس بنا پر یہ خیال درست نہیں کہ دی کارتی ہندسہ میں کوئی خامی نہیں۔ دی کارتی ترسیموں سے توپ کے گولے، ہوائی جہاز اور آب دوز کشتی کے طریق تو معلوم ہوتے ہیں لیکن ان کے مقام اور وقت کا باہمی رشتہ واضح نہیں ہوتا۔ اسی طرح کسی خاص آن میں رقاص کا مقام معلوم ہو سکتا ہر۔ لیکن ترسیم سے رقاص کے ان مقاموں کا پتا نہیں چلتا جو ابتدائی مشاہدے (یعنی وقت = ۰) سے قبل تھے۔ چوں کہ جدید طبیعیات کیمیا، حیاتیات وغیرہ میں زیادہ تر وقت کے لحاظ سے دوسری مقداروں کی تبدیلی اور تغیر پر غور کیا جاتا ہر۔ اس لیئے ان علوم میں وقت اور شرح تبدیلی کو بڑی اہمیت حاصل ہر۔ اس لیے ایسی ریاضی کی ضرورت پیش آتی ہر جو ان مسئلوں (یعنی تغیّر کی شرح وغیرہ) پر کافی روشنی ڈال سکے۔ ریاضیات کی اس کارآمد شاخ اور اس کے عملی اطلاقات پر آگے بحث کی گئی ہر۔

دسواں باب

لوکارتم کی ایجاد اور ان کا استعمال

اسکندریہ کے تمدّن میں جدید ریاضی کی تین اہم شاخوں یعنی صغاری احصا، ہندسہ تحلیلی اور لوکارتم کے اساسی تصوّرات پائے جاتے ہیں۔ ہندسہ تحلیلی کے متعلق ہم گزشتہ باب میں بحث کر چکے ہیں اور صغاری احصا کے متعلق آئندہ باب میں بحث کریں گے۔ یہاں صرف یہ بتلانا مقصود ہے کہ لوکارتموں کی ایجاد کن حسابی ضرورتوں کے تحت ہوئی اور ان کے استعمال سے حسابی عمل میں کس طرح آسانی پیدا ہوتی ہے

(اسکندریہ کے ریاضی والوں کو جہازرانی اور بڑھتی ہوئی تجارت کے سلسلے میں طولانی اور پیچیدہ حساب کی ضرورت پیش آتی تھی۔ اس لیے انھوں نے حساب کے آسان طریقوں کے متعلق تحقیقات کی جن کے نتیجے کے طور پر لوکارتموں کے متعلق اساسی تصوّر تشکیل پائے۔ البتہ لوکارتمی جدولوں کی تدوین کا کام سترھویں صدی میں مکمل کیا اور اس کے بعد حساب میں لوکارتم عام طور پر استعمال ہونے لگے)

ہمیں معلوم ہے کہ $۱۰^{۱} = ۱۰$، $۱۰^{۲} = ۱۰۰$، $۱۰^{۳} = ۱۰۰۰$، $۱۰^{۴} = ۱۰۰۰۰$

ان نتیجوں کی بنا پر یہ کہا جاتا ہے کہ (۱۰) کا لوکارتم (اساس ۱۰ پر) ۱ ہے، (۱۰۰) کا لوکارتم ۲ ہے، (۱۰۰۰) کا لوکارتم ۳ ہے اور (۱۰۰۰۰) کا لوکارتم ۴ ہے۔

لوکارتم کی عام تعریف حسبِ ذیل ہے:-

"اگر $\text{ل}^{\text{لا}} = \text{ب}$ تو کہا جاتا ہے کہ لا لوکارتم ہے ب کا اساس ل پر"۔

مثلاً $۲^{۳} = ۸$ اس لیے ۸ کا لوکارتم اساس ۲ پر ۳ ہے۔

یہ ظاہر ہے کہ اساس ۱۰ کے لحاظ سے کسی ایسے عدد کا لوکارتم جو (۱۰) سے بڑا اور (۱۰۰) سے چھوٹا ہے وہ ۱ سے بڑا اور ۲ سے چھوٹا ہوگا۔ اسی طرح (۱۰۰) سے بڑے اور (۱۰۰۰) سے چھوٹے عدد کا لوکارتم ۲ اور ۳ کے درمیان ہوتا ہے۔ اساس (۱۰) کے لحاظ سے کسی عدد ن کے لوکارتم کو علامت $\text{لوک}_{۱۰}$ ن سے تعبیر کرتے ہیں۔ اگر اشتباہ کا اندیشہ نہ ہو تو صرف لوک ن بھی لکھ سکتے ہیں۔

جبر و مقابلہ سے آسانی سے حاصل ہوتا ہے کہ $\text{ل}^{\text{لا}} \times \text{ل}^{\text{ما}} = \text{ل}^{(\text{لا}+\text{ما})}$ جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ دو عددوں ($\text{ل}^{\text{لا}}$ اور $\text{ل}^{\text{ما}}$) کے حاصل ضرب کا لوکارتم ان کے لوکارتموں کے مجموعے کے مساوی ہے۔ اسی طرح [چوں کہ $\text{ل}^{\text{لا}} \div \text{ل}^{\text{ما}} = \text{ل}^{(\text{لا}-\text{ما})}$] دو عددوں کے حاصل تقسیم کا لوکارتم ان کے لوکارتموں کے حاصل تفریق کے مساوی ہوتا ہے ان دو سادہ ضابطوں سے ہم بہت سے کارآمد نتیجے حاصل کر سکتے ہیں مثلاً $۲۵ \times ۴ = ۱۰۰$

$$\therefore \text{لوک } ۲۵ + \text{لوک } ۴ = \text{لوک } ۱۰۰ = ۲$$

اور $\frac{۲۰}{۲} = ۱۰$

$$\therefore \text{لوک } ۲۰ - \text{لوک } ۲ = \text{لوک } ۱۰ = ۱$$

نیز چوں کہ $\text{ل}^{\text{ن}} = \text{ل} \times \text{ل} \times \text{ل} \times \ldots$ ن مرتبہ

$$\therefore \text{لوک ل}^{\text{ن}} = \text{لوک ل} + \text{لوک ل} + \ldots \text{ن مرتبہ}$$

$$= \text{ن لوک ل}$$

فرض کرو کہ ہم نے کسی طرح سے ۱ سے (۱۰۰۰) تک تمام عددوں کے لوگارتم (اساس ۱۰ پر) معلوم کر لیے ہیں اور انھیں ایک جدول کی شکل میں مرتب کر لیا ہے۔ جدول میں لوگارتم کا صرف کسری حصّہ دیا جاتا ہے۔ (اعداد کے لوگارتم معلوم کرنے کے طریقے کی تشریح آئندہ کی جائے گی۔) اب اگر ہمیں کسی عدد کا لوگارتم معلوم ہو تو لوگارتموں کی جدول سے عدد معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اس عدد کو جس کا لوگارتم لا ہے۔ 'ضد لوگارتم لا' کہتے ہیں۔ ضد لوگارتم کے لیے بھی جدولیں مرتب ہو سکتی ہیں۔ ذیل کی مثالوں سے لوگارتمی جدولوں کا عملی فائدہ واضح ہوگا۔

فرض کرو کہ ہمیں ۵ فی صد سالانہ سود مرکب کی شرح سے ۲۰۰ رُپے کا زر کل ۱۴ سال کے ختم پر معلوم کرنا ہے سادہ حسابی طریقہ حسب ذیل ہوگا۔

اصل = ۲۰۰ ، شرح سود = ۵ فی صد فی سال، مدت ۱۴ سال

∴ ایک سال کے ختم پر زر کل × ۱۰۵/۱۰۰ = ۲۰۰ × ۱ر۰۵

اسی طرح دوسرے سال کے ختم پر زر کل = (۲۰۰ × ۱ر۰۵) × ۱ر۰۵

= ۲۰۰ × (۱ر۰۵)^{2}

اسی طرح تیسرے سال کے ختم پر زر کل = ۲۰۰ × (۱ر۰۵)^{3}

اسی طرح کا عمل کرنے سے ۱۴ سال کے ختم پر زر کل = ۲۰۰ × (۱ر۰۵)^{14}

اس کو معمولی ضرب کے طریقے سے محسوب کرنے کا عمل نہایت طولانی ہے۔ اگر مدت ۱۴ سال سے بھی زیادہ مثلاً (۱۰۰) سال ہو تو یہ حسابی عمل اس قدر طولانی ہو جائے گا کہ زر کا محسوب کرنا تقریباً ناممکن ہوگا۔ اس کی بجائے لوگارتموں کے استعمال سے زر کل مثلاً ۲۰۰ (۱ر۰۵)^{14} کی قیمت آسانی سے معلوم کی جا سکتی ہے۔

فرض کرو کہ ۲۰۰ × (۱٫۰۵)^۱۴ = ت

تب اوپر کے لوکارتمی ضابطوں کی رو سے لوک ت = لوک (۲۰۰) + لوک [(۱٫۰۵)^۱۴] = لوک (۲۰۰) + ۱۴ × لوک (۱٫۰۵)

جدول سے لوک ۲۰۰ = ۱٫۳۰۱۰

لوک ۱٫۰۵ = ۰٫۰۲۱۲

۱۴ لوک ۱٫۰۵ = ۰٫۲۹۶۸

∴ لوک ت = ۱٫۳۰۱۰ + ۰٫۲۹۶۸ = ۱٫۵۹۷۸

∴ جدول سے ت = ۳۹۶٫۱

پس معلوم ہوا کہ مطلوبہ زرِ کل = ۳۹۶ روپے تقریباً

اگر مدت ۱۰۰ سال لی جائے تو زرِ کل یعنی ۲۰۰ × (۱٫۰۵)^۱۰۰ کی قیمت اسی طریقے سے (۲۶۳۶۱) روپے حاصل ہوتی ہے۔

جدولوں میں صرف صحیح عددوں کے لوکارتم درج ہوتے ہیں لیکن کسی کسرِ واجب کے لوکارتم بھی حسبِ ذیل طریقے سے آسانی سے نکالے جا سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ ہمیں (۰٫۰۲۴۳) کا لوکارتم معلوم کرنا ہے چوں کہ ۰٫۰۲۴۳ = ۲۴۳/۱۰۰۰۰، اس لیے لوک ۰٫۰۲۴۳ = لوک ۲۴۳ − لوک ۱۰۰۰۰

= لوک ۲۴۳ − ۴

∴ جدول سے لوک ۲۴۳ معلوم کر کے لوک ۰٫۰۲۴۳ معلوم کیا جا سکتا ہے

لوکارتموں کی مدد سے عددوں کے حاصل ضرب اور حاصل تقسیم آسانی سے معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ مثلاً (۴٫۵۳۹ × ۰٫۹۰۲۴) / ۱۶٫۲۱ کی تقریبی قیمت (ت) معلوم کرنی ہو تو لوک ت = لوک ۴٫۵۳۹ + لوک ۰٫۹۰۲۴ − لوک ۱۶٫۲۱

= ۰٫۶۵۷۰ + (۱-٫۹۵۵۴) − ۱٫۲۰۹۸

= ۱-٫۴۱۲۴

یعنی لوک ت ۱ اور ۱/۱۰ کے درمیان ہے۔

ضد لوکارتم کے جدول سے، ت = ٫۴۰۹۷

معمولی ضرب اور تقسیم کے عمل کے ساتھ اس عمل کا مقابلہ کیا جائے تو لوکارتموں کے استعمال کی سہولت بہ خوبی واضح ہوتی ہے۔

لوکارتمی جدولوں کی مدد سے عددوں کے جذر، جذر الکعب وغیرہ بھی محسوب کیے جا سکتے ہیں۔ مثلاً (۱) ∛۱۳ = (۱۳)^(۱/۳) = ت فرض کرو

∴ لوک ت = ۱/۳ لوک ۱۳

= ۱/۳ × ۱٫۱۱۳۹ = ٫۳۷۱۳

∴ ت = ۲٫۳۵۲

نوٹ۔ ضرب سے آسانی سے تصدیق کی جا سکتی ہے کہ (۲٫۳۵۲)^۳ = ۱۳ تقریباً

(۲) (۲۷)^(۲/۵) محسوب کرو (یعنی ۲۷ کے مربع کا ۵ واں جذر محسوب کرو)

فرض کرو کہ ت = (۲۷)^(۲/۵)

لوک ت = ۲/۵ لوک ۲۷ = ۲/۵ × ۱٫۴۳۱۴

= ٫۵۷۲۲ تقریباً، ∴ ت = ۳٫۷۳۵

ہم احصا کا حسب ذیل ضابطہ (بغیر ثبوت کے) مان لیتے ہیں۔

لوک۱۰ (۱ + لا) = ٫۴۳۴۳ (لا − لا^۲/۲ + لا^۳/۳ − لا^۴/۴ + ...)

جب کہ لا کی عددی قیمت ایک سے چھوٹی ہو۔

مثلاً اگر لا = ۱/۱۰

تو لوک۱۰ (۱ + ۱/۱۰) = ٫۴۳۴۳ (۱/۱۰ − ۱/۲۰۰ + ۱/۳۰۰۰ − ۱/۴۰۰۰۰ + ...)

یعنی لوک۱۰ (۱٫۱) = ٫۰۴۱۴ تقریباً

اس طرح لا کی مختلف قیمتوں کے لیے (جو ایک سے کم ہیں) لوگ$_{\text{ب}}$ (۱ + لا) کی قیمت محسوب کر کے لوکارتموں کی جدولیں مرتب کی جاتی ہیں۔

اگر ہمیں اوپر کے ضابطے کی مدد سے لوگ$_{10}$ (۱۴۱۲) محسوب کرنا ہو تو

لوگ ۱۴۱۲ = لوگ (۱۲ء۱۴ × ۱۰۰)

= لوگ ۱۰۰ + لوگ ۱۲ء۱۴

= ۲ + لوگ ۱۲ء۱۴

اب لا = ۱۲ء۴۱ لینے سے لوگ (۱ + لا) = لوگ ۱۲ء۴۱ محسوب ہو سکتا ہے۔ چناں چہ لوگ ۱۲ء۴۱ = ۱۴۹۸ء۱

∴ لوگ ۱۴۱۲ = ۳ء۱۴۹۸

نوٹ۔ اگر لا کی عددی قیمت کافی چھوٹی نہ ہو تو اوپر کے سلسلے میں رقموں کی تعداد زیادہ لینی ہوگی تاکہ زیادہ صحت سے جواب حاصل ہو سکے۔

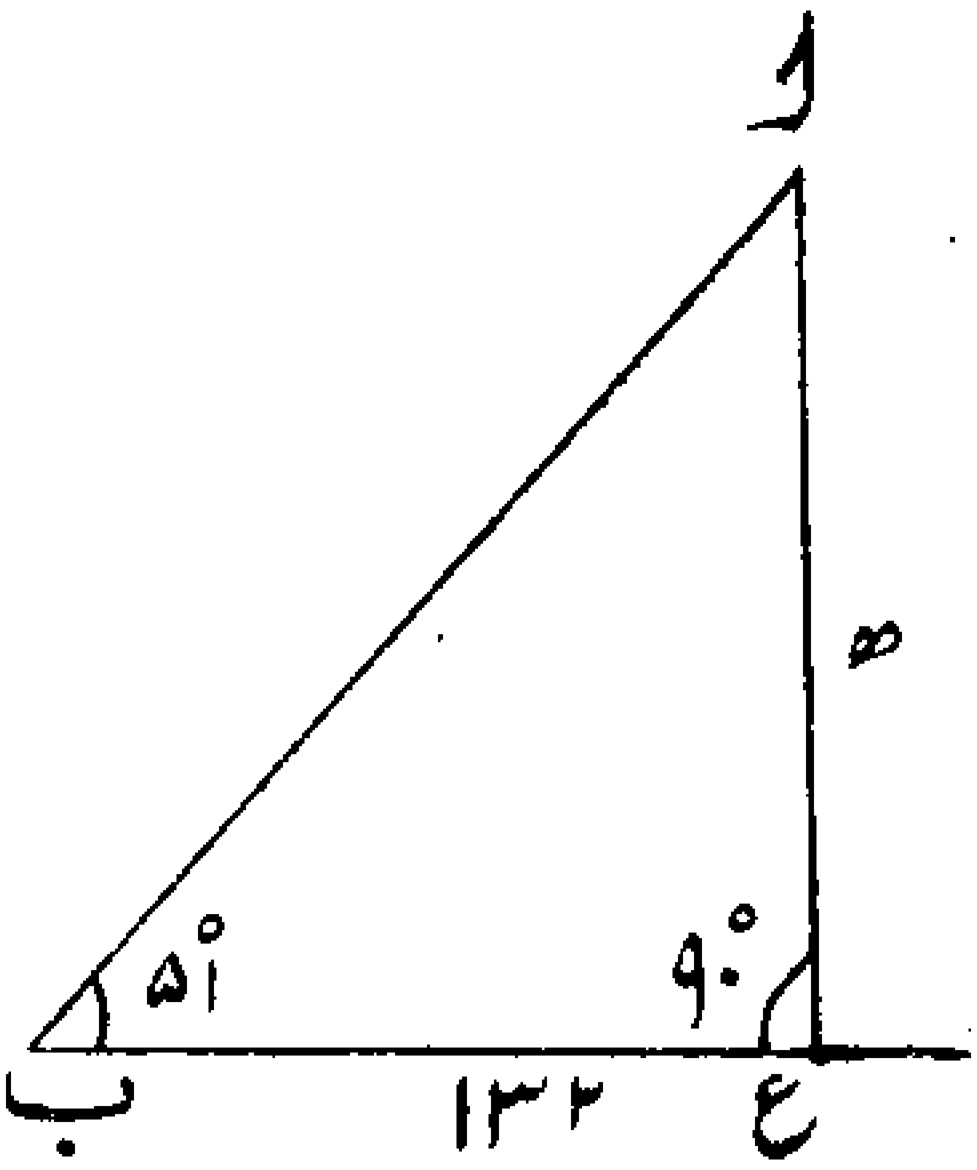
حسابی عمل کو آسان کرنے کے لیے مختلف ترکیبیں اختیار کی جاتی ہیں جن کا ذکر اس کتاب کی حدوں سے باہر ہے۔

پیمائش اور جہاز رانی کے حسابوں میں اختصار اور آسانی پیدا کرنے کے لیے لوکارتمی جدولیں بہت مفید ثابت ہوتی ہیں۔ اس غرض سے مثلثی نسبتوں (جیب، جیب التمام، مماس وغیرہ) کے لوکارتموں کی جدولیں مرتب کی جاتی ہیں اور ان کی مدد سے مستوی مثلثوں اور کروی مثلثوں کو حل کیا جاتا ہے۔

مثال ۱۔ فرض کرو کہ افقی سطح پر ایک مینار ہے جس کی بلندی معلوم کرنا ہے۔ اگر مینار کے پائین سے ۱۳۲ فٹ کے فاصلے پر مینار کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۵۱° ہو تو مینار کی بلندی معلوم کرو۔

منسلکہ شکل سے مینار اع کی بلندی ھ = ب ع × مس ۵۱°

= ۱۳۲ × مس ۵۱°



لوکارتموں اور مماسوں کے لوکارتموں کی جدولوں سے

لوک ۱۳۲ = ۲ر۱۲۰۶

لوک مس ۵۱° = ۰ر۰۹۱۶

∴ لوک ھ = لوک (۱۳۲) + لوک (مس ۵۱°)

= ۲ر۱۲۰۶ + ۰ر۰۹۱۶

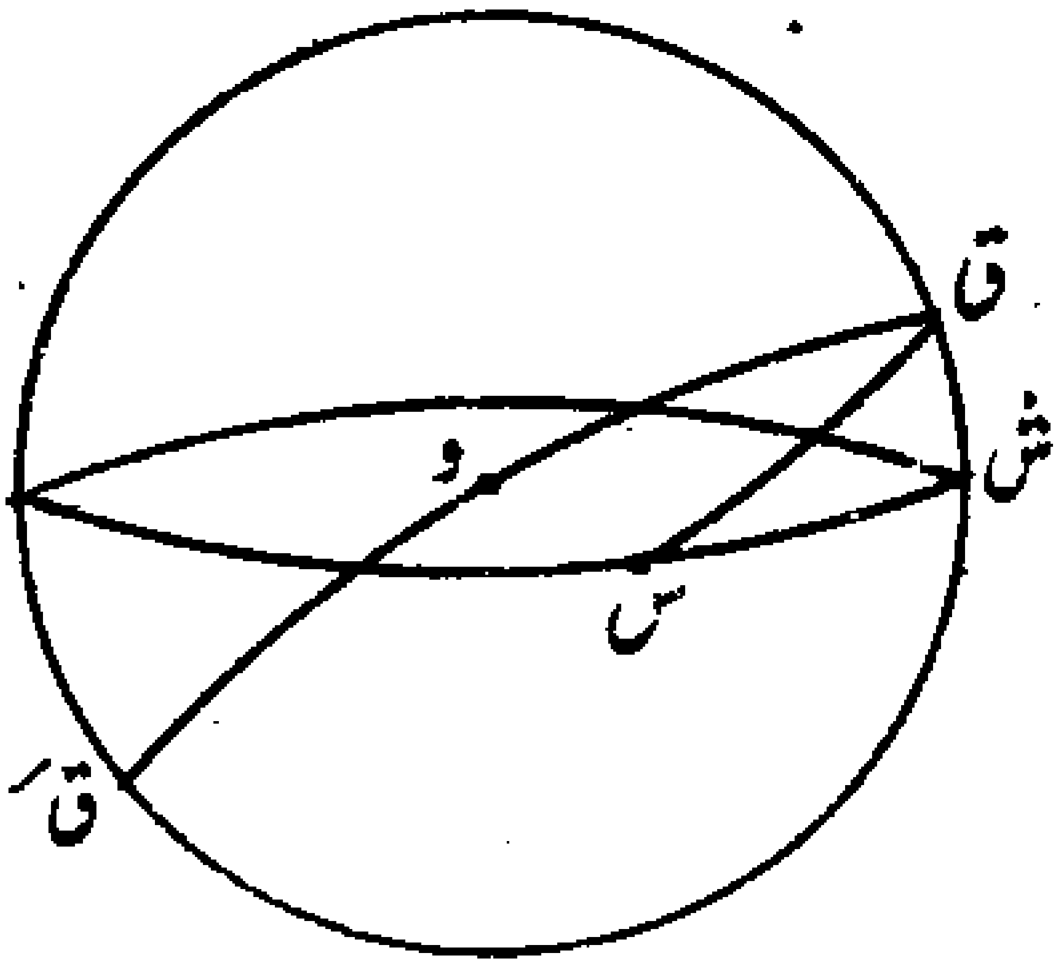
= ۲ر۲۱۲۲

∴ ھ = ۱۶۳

یعنی مینار کی بلندی تقریباً ۱۶۳ فٹ ہے۔

مثال ۲۔ فرض کرو کہ ایک ایسے مقام پر جس کا عرض بلد ۱۰½° ہے۔ ہمیں سورج کے طلوع کی سمت معلوم کرنی ہے جب کہ سورج کا شمالی میل ۲۱° ہو۔

اگر سماوی قطب شمالی ق، شمال کا نقطہ ش اور طلوع کے وقت افق پر سورج کا مقام س ہو تو کروی مثلث ق ش س میں ش پر



قائمہ زاویہ ہے اور ش ق = مقام مشاہدے کا عرض بلد = ۱۷½°

ق س = سورج کا قطبی فاصلہ = ۹۰° - میل = ۶۹°

جم ق س = جم ق ش جم ش س + جب ق ش جب ش س جم ق ش̂ س

جم ۶۹° = جم (۱۷½°) جم ش س + صفر (کیونکہ ق ش̂ س = ۹۰°)

∴ جم ش س = جم ۶۹° / جم ۱۷½° = جب ۲۱° / جب ۷۲½° (کیونکہ جم (۹۰ - ط) = جب ط)

∴ لوک جم ش س = لوک جب ۲۱° - لوک جب ۷۲½°

لوک جب (۹۰ - ش س) = (۱̄ر۵۵۴۳) - (۱̄ر۹۷۹۴)

= (۱̄ر۵۵۴۳) + ۰ر۰۲۰۶

= ۱̄ر۵۷۴۹

∴ (۹۰° - ش س) = ۲۰°، ۱۴َ تقریباً

∴ ش س = ۶۹°، ۱۹َ تقریباً

یعنی سورج کا مقام طلوع مشرق کے نقطے سے ۲۰°، ۱۴َ شمال کی طرف ہو گا۔

نوٹ۔ لوکارتموں کی مدد سے حسابی عمل کرنے کے لیے کم از کم اعشاریہ کے چار مقاموں والی لوکارتمی اور مثلثی جدولوں کا رکھنا اور

استعمال کرنا ضروری ہو۔ ایسی جدولیں (انگریزی ہندسوں میں) بہ آسانی دست یاب ہوسکتی ہیں۔

یاد رکھنے کی باتیں۔

(۱) متعدد عددوں کے حاصل ضرب کا لوکارتم، ان کے لوکارتموں کا مجموعہ ہوتا ہو اور دو عددوں کے حاصل تقسیم کا لوکارتم ان کے لوکارتموں کا حاصل تفریق ہوتا ہو اور ل^لا کا لوکارتم = لا × لوک ل

(۲) لوک (۱ + لا) = ۲،۳۰۲۶ (لا − لا^۲/۲ + لا^۳/۳ − لا^۴/۴ + ...)

(۳) لوکارتمی جدولوں میں لوکارتموں کا صِرف کسری حصّہ دیا جاتا ہو۔ صحیح حصّہ آسانی سے معلوم ہوسکتا ہو کیوں کہ لوک ۱۰ = ۱، لوک ۱۰۰ = ۲، لوک ۱۰۰۰ = ۳

(۴) ایک سے چھوٹے عدد کے لوکارتم معلوم کرنا ہو تو اس عدد کو ۱۰ یا ۱۰۰ وغیرہ یا ۱۰۰۰ سے حسب ضرورت ضرب اور تقسیم کرکے مندرجہ بالا قاعدے استعمال کیے جاسکتے ہیں۔

(۵) جدولوں میں اگر کسی عدد کا لوکارتم ۳̄،۴۵۶۷ دیا ہوا ہو تو اس سے مراد ہو کہ لوکارتم = ،۴۵۶۷ — ۳

یعنی لوکارتم کا کسری حصّہ ہمیشہ مثبت دیا جاتا ہو اور صحیح حصّہ حسب ضرورت مثبت یا منفی اور منفی ہونے کی صورت میں منفی کی علامت صحیح حصّے کے اوپر لگائی جاتی ہو۔

ہماری زبان

انجمن ترقیٔ اُردو (ہند) کا پندرہ روزہ اخبار

ہر مہینے کی پہلی اور سولھویں تاریخ کو شائع ہوتا ہے
چندہ سالانہ ایک روپیہ فی پرچہ ایک آنہ

اُردو

انجمن ترقیٔ اُردو (ہند) کا سہ ماہی رسالہ

جنوری، اپریل، جولائی اور اکتوبر میں شائع ہوتا ہے
اس میں ادب اور زبان کے ہر پہلو پر بحث کی جاتی ہے۔ تنقیدی اور محققانہ مضامین خاص امتیاز رکھتے ہیں۔ اُردو میں جو کتابیں شائع ہوتی ہیں، اُن پر تبصرہ اس رسالے کی ایک خصوصیت ہے۔ اس کا حجم ڈیڑھ سو صفحے یا اس سے زیادہ ہوتا ہے۔ قیمت سالانہ محصول ڈاک وغیرہ ملاکر سات روپے سکۂ انگریزی (آٹھ روپے سکۂ عثمانیہ) نمونے کی قیمت ایک روپیہ بارہ آنے (دو روپے سکۂ عثمانیہ)

رسالۂ سائنس

انجمن ترقیٔ اُردو (ہند) کا ماہانہ رسالہ

(ہر انگریزی مہینے کی پہلی تاریخ کو جامعہ عثمانیہ حیدرآباد سے شائع ہوتا ہے)
اس کا مقصد یہ ہے کہ سائنس کے مسائل اور خیالات کو اُردو دانوں میں مقبول کیا جائے۔ دُنیا میں سائنس کے متعلق جو جدید انکشافات وقتاً فوقتاً ہوتے ہیں، یا جو بحثیں یا ایجادیں ہو رہی ہیں، ان کو کسی قدر تفصیل سے بیان کیا جاتا ہے اور ان تمام مسائل کو حتی الامکان صاف اور سلیس زبان میں ادا کرنے کی کوشش کی جاتی ہے۔ اس سے اُردو زبان کی ترقی اور اہلِ وطن کے خیالات میں روشنی اور وسعت پیدا کرنا مقصود ہے۔ رسالے میں متعدد بلاک بھی شائع ہوتے ہیں۔ قیمت سالانہ صرف پانچ روپے سکۂ انگریزی (چھ روپے سکۂ عثمانیہ)
خط و کتابت کا پتا: معتمد مجلس ادارت رسالۂ سائنس۔ جامعۂ عثمانیہ حیدرآباد۔ دکن

انجمنِ ترقیٔ اُردو (ہند) دہلی

اشوکِ اعظم

یہ کتاب ڈاکٹر محمد حفیظ سید ایم اے، پی ایچ ڈی، ڈی لٹ، ایل ڈی نے بڑی تحقیق سے لکھی ہے اس میں صرف اشوک کے حالات ہی نہیں بلکہ نظمِ مملکت، مذہب، معاشرت اور اس وقت کی تہذیب و تمدن کا بھی تذکرہ ہے۔ قیمت مجلد دو رُپے آٹھ آنے بلا جلد ایک رُپیہ آٹھ آنے

جائزۂ زبانِ اُردو

۱۹۳۵ء میں زبانِ اُردو کا جائزہ لینے کی تجویز کی گئی تھی۔ اس کے مطابق مسلسل چار سال تک کام ہوتا رہا۔ سرِدست پہلا حصہ شائع کیا گیا ہے۔ جس میں ریاست ہائے راج پوتانہ کے حالات درج ہیں جو نہایت عبرت انگیز ہیں۔ قیمت مجلد دو رُپے بلا جلد ایک رُپیہ آٹھ آنے۔

مینیجر انجمنِ ترقی اُردو (ہند) دریا گنج۔ دہلی