

سلسلہ مطبوعات انجمن ترقی اُردو (ہند) نمبر ۲۲۶

داستانِ ریاضی

از

ڈاکٹر رضی الدین صاحب صدیقی

پروفیسر ریاضیات جامعہ عثمانیہ



حیدرآباد دکن

شائع کردہ

انجمن ترقی اُردو (ہند) دہلی

قیمت مجلد پیر بلا جلد پیر

۱۹۳۵ء

طبع اول

PEOPLE'S PUBLISHING HOUSE
ALHIND MARKET CHOWK ANARKALI,
LAHORE.

**Collection of Prof. Muhammad Iqbal Mujaddidi
Preserved in Punjab University Library.**

پروفیسر محمد اقبال مجددی کا مجموعہ
پنجاب یونیورسٹی لائبریری میں محفوظ شدہ



۴ مطبوعہ ہمدرد و برقی پریس وہلی ۲

سلسلہ مطبوعات انجمن ترقی اُردو (ہند) نمبر ۲۲۶

دَاسْتَانِ رِیاضِی

ڈاکٹر رضی الدین صاحب صدیقی

پروفیسر ریاضیات جامعہ عثمانیہ حیدرآباد دکن

شائع کردہ

انجمن ترقی اُردو (ہند) دہلی

قیمت مجلد ہے بلا عدد

۱۹۴۵ء

طبع اول

138558

فہرستِ مضامین

نمبر شمار	مضمون	صفحہ
	پہلا باب	
۱	ریاضی - انسانی تہذیب و تمدن کا آئینہ	۳
	دوسرا باب	
۲	تاریخی زمانے سے پہلے کی ریاضیات	۲۹
	تیسرا باب	
۳	جسامت، ترتیب اور گنتی کے قاعدے	۶۶
	چوتھا باب	
۴	تسہیلِ علم ہندسہ	۸۹
	پانچواں باب	
۵	حساب کی ابتدا	۱۱۹
	چھٹا باب	
۶	دنیا کا حجم - علمِ مثلث سے کیا کام لیا جاسکتا ہے	۱۳۲
	ساتواں باب	
۷	جبر و مقابلے کی ابتدا اور صفر کی ایجاد	۱۵۶
	آٹھواں باب	
۸	دنیا کی مساحت یا علمِ مثلث کرومی	۱۷۹
۹	نواں باب - دے کارت کا علم ہندسہ یا تریسعات	۱۹۹
۱۰	دسواں باب - لوکار تم کی ایجاد اور ان کا استعمال	۲۰۹

پہلا باب

ریاضی انسانی تہذیب و تمدن کا آئینہ

دیدرو (Diderot) فرانسیسی انسائیکلو پیڈیا کا ایک مشہور مؤلف اور ماڈرن پست
 دہریہ تھا جس نے انقلاب فرانس کے قبل یورپ کے ذہنی نشاۃ میں نمایاں حصہ لیا۔
 وہ روسی دربار میں ٹھہرا ہوا تھا اور اپنی طرح داری اور چرب زبانی سے درباریوں کی
 تفریح کا باعث بنا ہوا تھا اور ان کے مذہبی خیالات کو لغو ثابت کر رہا تھا۔
 مگر روس کو یہ اندیشہ ہوا کہ دیدرو کے اثر سے درباریوں کے عقیدے بگڑ
 جائیں گے اس لیے اُس نے جرمنی کے مشہور ریاضی دان آئیولر (Euler) کو
 دیدرو سے خدا کے وجود پر مناظرہ کرنے کی غرض سے طلب کیا۔ دیدرو
 کو یہ اطلاع دی گئی کہ ایک ریاضی دان نے خدا کا وجود ثابت کیا ہے
 مناظرے میں حصہ لینے کے لیے جب دیدرو بھرے دربار میں آیا تو آئیولر
 نے بہت ہی متین لہجے میں اس کو اس طرح خطاب کیا: $1 + 1 = 2$ ،
 اس لیے خدا وجود رکھتا ہے۔ اس کے جواب میں آپ کیا کہتے ہیں؟“
 دیدرو جبر و مقابلہ سے قطعاً واقف تھا اس لیے وہ جبر و مقابلہ
 کی زبان سے، جو مددوں کی زبان کہی جاسکتی ہے، بہت مرعوب ہو گیا۔
 اور آئیولر کے سوال کا کوئی جواب نہ دے سکا۔ درباریوں نے دیدرو کی

بہت ہنسی اڑائی اور وہ اس قدر شرمندہ ہوا کہ دربار سے اٹھ کر اپنے کمرے میں جا چھپا اور فوراً فرانس واپس ہو گیا۔ ویدرو کے لاجواب ہونے کی وجہ یہ تھی کہ وہ اس بات سے ناواقف تھا کہ عددوں کی ایک خاص زبان ہے جو معمولی زبان سے بالکل مختلف ہے۔ اگر عددوں کی زبان سے واقف ہوتا تو آئیلر سے ہرگز مرعوب نہ ہوتا بلکہ اس سے عددوں کی زبان کے جملے لے لے کر ان کا ترجمہ معمولی زبان میں کرنے کے لیے کہتا اور یہ دریافت کرتا کہ اس جملے کی بنا پر استدلال کا دوسرا حصہ یعنی خدا کا وجود کس طرح ثابت ہوتا ہے؟ آج کل بھی عوام کو 'جو ریاضیات سے ناواقف ہیں' ریاضی دانوں کی زبان کے چند جملے کہ کر نہ صرف مرعوب کر دیتے ہیں بلکہ مغالطے میں بھی ڈال دیتے ہیں۔ مثلاً ایک ہم عصر ہیئت دان نے اپنے گفٹڈ لیکچر (Gifford Lecture) میں یہ بیان کیا، سو کہ ڈیوڈ ہیلبرٹ (David Hilbert) نے پ (p) اور ق (q) اعداد دریافت کیے ہیں۔ اس لیے خدا وجود رکھتا ہے اور ایک اور مشہور ہیئت دان ستاروں کے فاصلوں کے متعلق نہایت پیچیدہ حسابات سے عوام کو حیرت میں ڈالنے کے بعد کہتا ہے کہ اس سے ثابت ہوتا ہے کہ خدا بھی ریاضی دان ہے۔ ریاضیاتی معلومات کی مدد سے عوام کو مرعوب کرنے والے آئیلر اور ویدرو کے زمانے سے صدیوں قبل بھی موجود تھے۔ دنیا کے پہلے ریاضی دان وہ تقویم ساز کاہن تھے جو موسموں کی تبدیلیوں کا اندازہ لگاتے تھے۔ مصر کے مندروں میں دریا کے نیل

علی ان مثالوں سے ہمارا مدعا ہرگز یہ نہیں جو کہ خدا کے وجود پر بحث کی جائے بلکہ صرف یہ بنانا مقصود ہے کہ ریاضی دانوں کی زبان کی مدد سے عوام کو کس طرح مغالطے میں ڈال سکتے ہیں۔

سے زیر زمین تعلق رکھتے والے ایسے آلات موجود تھے جن کے ذریعے کاہن دریائے نیل کے اتار چڑھاؤ کا قبل از قبل صحیح اندازہ لگا سکتے تھے اور اسے حساب کی بنا پر، جو عوام سے بالکل مخفی رکھے جاتے تھے حیرت انگیز صحت کے ساتھ پیش گوئیاں کر کے عوام پر اپنی الہامی معلومات کا رعب جھلاتے تھے۔ مصر کی قدیم تحریروں (Papyrus) سے پتا چلتا ہے کہ مصر کے کاہن عددوں کی ایسی زبان سے ضرور واقف تھے جو اس بناوٹی اور مغالطہ آمیز زبان سے جس میں وہ اپنی پیش گوئیاں بیان کر کے عوام کو دھوکا دیتے تھے، بالکل جداگانہ تھی۔

موجودہ زمانے میں بنی نوع انسان کی خوش حالی کا انحصار زیادہ تر اس بات پر ہے کہ وہ مختلف قسم کے اعداد و شمار (Statistics) کی اہمیت کو اچھی طرح سمجھیں اور خود غرض جماعتوں کے غلط استدلال سے مرعوب ہوئے بغیر ان اعداد و شمار سے صحیح نتیجے اخذ کریں اس لیے ضروری ہے کہ ہم میں سے ہر شخص ریاضی یعنی عددوں کی زبان سے کافی طور پر واقف ہو جائے۔

وہ پہلے انسان جنھوں نے ابتدا میں بستیاں بسائیں صرف حیوان ناطق نہ تھے لیکن موجودہ زمانے کے انسان حساب لگانے والے حیوان کہلانے کے مستحق ہیں۔ ہم ایسے دور میں ہیں کہ ہمارے چاروں طرف اعداد و شمار اور حساب کی گرم بازاری ہے۔ چنانچہ ہر آن اور ہر لحظہ ہمیں ریلوں کے وقت ناموں ابے روزگار کے تخمینوں، سرکاری ٹکٹوں، جنگ کے قرضوں، بنکوں کی شرح سود، تعلیمی خرچ، کمپنیوں کے حصوں کے نرخ، پمپشن کے اوسط، معزاتہ درجہ، پیش پیدائش اور موت کی شرحوں سے اور اسی طرح نوز کی موجوں کے طولوں، زمین کی مختلف موجوں کے طولوں، بجلی کے میٹروں کی قیمتوں، ریلوں اور

جہازوں کے کرایوں وغیرہ سے دوچار ہونا پڑتا ہے۔ ہر روز جب کوئی شخص اپنی گھڑی کو چابی دیتا ہے تو وہ ایسا نازک اور صحیح آلہ استعمال کرتا ہے جو اسکندریہ کے عروج کے زمانے میں بھی بڑے سے بڑے حکیم یا کاریگر کے وہم و گمان میں نہ آسکتا تھا۔ ہمارے لیے جو باتیں روزمرہ کی بن گئی ہیں وہ قدیم زمانے کے حکیموں اور ریاضی دانوں کے لیے ناقابل حل عقدہ تھیں۔ اس کا یہ مطلب نہیں کہ ہم ان بڑے حکما سے زیادہ ذہین اور فہیم ہو گئے ہیں۔ بلکہ اصل یہ ہے کہ قدیم زمانے سے اب تک جو حکما گزرے ہیں ان کی ذہنی مساعی کے نتیجے میں ورثے کے طور پر ملے ہیں اور ہمارے معاشرتی نظام کا لازمی جز بن گئے ہیں۔ ہر انسان خواہ وہ کتنا ہی ذہین اور فہیم کیوں نہ ہو اپنے معاشرتی ماحول میں مقید ہوتا ہے اور ان پابندیوں سے نہیں نکل سکتا جو اس کے معاشرتی ماحول نے اس کے ذہن پر عائد کی ہیں۔ قدیم زمانے کے معاشرتی ماحول میں نسبت و تناسب، اثر و رفتار، اسراع اور اسی طرح کے دوسرے تصور جو ہمارے لیے معمولی بن گئے ہیں موجود نہیں تھے۔ اس لیے ایسے سوالوں کے حل میں، جو ہمارے لیے بالکل آسان معلوم ہوتے ہیں، قدیم زمانے کے حکما کو بہت مشکلیں پیش آتی تھیں۔

اوپر کے بیان کو واضح کرنے کے لیے ایک دل چسپ مثال پیش کی جاتی ہے۔ یونان کی علمی ترقی کے زمانے میں حکیم زینو (ZENO) نے اپنے ہم عصروں کو محو حیرت کرنے کے لیے بہت سے معصیہ پیش کیے تھے جن میں سے ذیل کا معصیہ بہت مشہور ہے۔

اکلیز (قدیم یونانی کہانیوں کا ایک مشہور بہادر) (ACHILLES) اور کچھوے میں دوڑ ہوتی ہے۔ اکلیز کی رفتار کچھوے کی رفتار سے دس گنی ہے

ابتدا میں کچھوا اکلینز سے سوگز آگے ہو۔ اب حکیم زینو کہتا ہے کہ اگر اکلینز سوگز دوڑ کر اس مقام پر پہنچے جہاں ابتدا میں کچھوا تھا تو اس عرصے میں کچھوا اپنے ابتدائی مقام سے دس گز آگے نکل جائے گا اور اس لیے کچھوا اکلینز سے دس گز آگے ہوگا۔ اگر اکلینز یہ دس گز طر کرے تو اس عرصے میں کچھوا ایک گز آگے بڑھ جائے گا یعنی کچھوا اکلینز سے ایک گز آگے ہوگا۔ اگر اکلینز یہ ایک گز طر کرے تو کچھوا ایک گز آگے بڑھ جائے گا یعنی کچھوا اکلینز سے ایک گز آگے ہوگا۔ اگر اکلینز یہ ایک گز طر کرے تو کچھوا اکلینز سے ایک گز آگے ہوگا۔ اس استدلال کو جاری رکھ کر حکیم زینو یہ کہتا ہے کہ کچھوا اکلینز سے ہمیشہ آگے رہے گا اگرچہ کہ کچھوے اور اکلینز کا درمیانی فاصلہ بہ تدریج گھٹتا جائے گا۔ اس لیے اکلینز کچھوے تک ہرگز نہیں پہنچ سکتا اور کچھوے سے آگے بڑھ نہیں سکتا۔

آپ یہ خیال نہ کریں کہ حکیم زینو اور اس کے ہم عصر اس بات سے واقف نہ تھے کہ اکلینز کچھوے تک ضرور پہنچے گا اور کچھوے سے آگے بھی بڑھ جائے گا۔ ان کے لیے حل طلب معما صرف یہ تھا کہ اوپر کے استدلال میں مغالطہ کہاں ہو۔ چونکہ زینو اور اس کے ہم عصر عددوں کی زبان سے اچھی طرح واقف نہ تھے، اس لیے وہ اوپر کے استدلال کے مغالطے کی تحقیق سے قاصر رہے۔ ہمارے لیے جیسا کہ ہم ابھی دیکھیں گے، زینو کے معے کا حل بہت آسان ہے کیوں کہ ہم میں اور قدیم یونانیوں میں دو بڑی تہذیبوں اور دو زبردست معاشرتی انقلابوں کا فصل ہے اور ہمیں اُس زمانے سے، اب تک انسان نے جو ذہنی ترقی کی ہے اس کے نتیجے میں معاشرتی ورثے کے طور پر ملے ہیں

زینو اور اس کے ہم عصر عددوں کی زبان سے کافی طور پر واقف

اگر آپ کو اپنی ابتدائی تعلیم کے زمانے کا حساب یاد ہو تو آپ فوراً بتائیں گے کہ اس دراصل پ کے مساوی ہے۔

پس معلوم ہوگا کہ متعدد وقفوں میں (جن کی تعداد لاتنا ہی ہے) کچھوے نے جو کل فاصلہ طو کیا وہ $\frac{1}{2}$ اگڑ ہے۔ (غور سے دیکھا جائے کہ یہ سب وقفے مساوی نہیں ہیں بلکہ ہر وقفہ اپنے ماقبل وقفے کا $\frac{1}{2}$ ہے۔ نیز اکلنیر کے کچھوے تک پہنچنے کے وقفے یہ گئے ہیں) اس سے ظاہر ہے کہ اکلنیر کچھوے تک پہنچنے کا جب کہ اکلنیر کا طو شدہ فاصلہ $\frac{1}{2}$ اگڑ ہو اور اس کے بعد اکلنیر کچھوے سے آگے بڑھ جائے گا۔

پس معلوم ہوا کہ زمین کے معنی میں جو مغالطہ ہے اس کی تحقیق اس بات کے جاننے پر منحصر ہے کہ گھٹنے والے عددوں کے لاتنا ہی سلسلہ:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$$

کی جتنی بھی رقمیں لی جائیں ان کا مجموعہ محدود ہے اور $\frac{1}{2}$ سے ہرگز بڑا نہیں ہے۔ برخلاف اس کے زمین اور اس کے ہم عصروں کا یہ غلط خیال تھا کہ اوپر کے لاتنا ہی سلسلے کی رقمیں کافی تعداد میں لی جائیں تو ان کا مجموعہ جتنا بڑا چاہیں بنا یا جاسکتا ہے جو کہ اوپر کے لاتنا ہی سلسلے کے مجرے کے متعلق ان کا خیال درست نہیں تھا، اس لیے وہ زمین کے معنی کے مغالطے کو سمجھنے سے قاصر تھے۔ چوں کہ ہمیں عددوں کی زبان معاشرتی ورثے کے طور پر ملی ہے اس لیے زمین کے معنی کے حل میں ہمیں کوئی زیادہ مشکل پیش نہیں آتی۔

ہم آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ لاتنا ہی سلسلہ

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$$

کی رقموں کو کافی تعداد میں لینے سے ان کا مجموعہ $\frac{1}{2}$ کے جتنا قریب چاہیں لایا جاسکتا ہے۔ چنانچہ پہلی چار رقموں کے مجموعے اور $\frac{1}{2}$ میں جو فرق ہے ۰۰۲۵۰ یعنی $\frac{1}{2000}$ سے کم ہے۔ نیز پہلی دس رقموں کے مجموعے اور $\frac{1}{2}$ کا فرق $\frac{1}{100000}$ سے کم ہے۔ اس معمولی مفہوم کو ریاضی دان اس طرح بیان کرتے ہیں کہ لامتناہی سلسلہ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} + \dots$$

مستند ہے اور اس کا مجموعہ $\frac{1}{2}$ ہے۔

اس موقع پر یہ بتادینا ضروری ہے کہ ہر ایسا لامتناہی سلسلہ جس کی ہر رقم ماقبل سے کم ہو لازماً مستند نہیں ہوتا۔ اس کی مثال ہم آئندہ مناسب موقع پر دیں گے۔ ایسا لامتناہی سلسلہ جو مستند نہیں ہے متع سلسلہ کہلاتا ہے۔ تمدن کی تاریخ سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ کسی زمانے کے قابل ترین افراد کی ذہنی کاوشوں کے ثمرات بھی علم کے اس ذخیرے کے مرہون منت ہوتے ہیں جو ان کے زمانے کے لوگوں کا مشترک معاشرتی ورثہ ہے۔ ذہین سے ذہین افراد بھی اپنے زمانے کی معاشرتی تہذیب کے حدود سے بہت آگے نہیں بڑھ سکتے۔ اگرچند ذہین افراد عوام سے اپنی بے تعلقی پر فخر کرنے لگیں تو خود ان کی قابلیت مستتبہ ہو جاتی ہے۔ اس کتاب کے مطالعہ سے ہمیں معلوم ہوگا کہ جب کسی قوم کی تہذیب عوام سے بے تعلق ہو جاتی ہے اور صرف چند بے کار افراد کی تفریح طبع کا باعث بن جاتی ہے تو وہ تہذیب ملاگیزی (Priest hood) کی شکل اختیار کرتی ہے اور آخر میں اس کا خاتمہ تو ہم پرینی ہوتا ہے۔ عوام سے ذہنی طور پر بے تعلق ہونا اور اس بے تعلقی پر فخر کرنا

سہ ہر اگلی منزل پر گھٹنے مالا یا کمی پزیر ہے۔

نہ صرف ایک اہم فریضے سے غفلت کرنا ہو بلکہ ایک نہایت احمقانہ جرم ہو اور اس سے انسان کی علمی ترقی کا خاتمہ ہو جاتا ہے۔ تاریخ سے اس بات کا پتا چلتا ہے کہ توہمات کی بنیاد عوام نہیں بلکہ غیر متوازن اعصاب رکھنے والے (New nolic) انسان ڈالتے ہیں۔ ریاضی داں اور عامی ایک دوسرے کا ساتھ چھوڑ نہیں سکتے کیوں کہ معاشرتی ترقی صرف اس وقت یقینی ہوگی جب کہ ریاضی سے سماج کا ہر فرد مستفید ہو۔

موجودہ زمانے میں اقتصادی مظالم اعداد و شمار اور حساب کی آڑ میں کیے جاتے ہیں۔ ان مظالم کو جڑ پیر سے اکھاڑنے کے لیے ضروری ہے کہ سماج کا ہر فرد ریاضی سے، جو ناپ اور ترتیب کے قواعد پر مشتمل ہو، بہ خوبی واقف ہو اور ایسے سماج کی تعمیر میں حصہ لے جو موجودہ سماج کے عیبوں سے پاک ہو اور جس میں ہر شخص کو کچھ نہ کچھ فرصت ہو اور کوئی بھی محتاج نہ ہو۔ اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ اگر ریاضی سماج کے ہر فرد کے لیے اس قدر ضروری اور مفید ہے تو پھر کیا وجہ ہے کہ نہ صرف مدرسوں کے معلم بلکہ عوام بھی ریاضی کے نام سے بھاگتے ہیں؟ ریاضی سے اس شدید نفرت کی وجہ یہ ہے کہ ریاضی کی تعلیم ایسے طریقے پر دی جاتی ہے کہ عمرانی زندگی سے اس کا کوئی تعلق ظاہر نہیں کیا جاتا اور یہ بتانے کی ہرگز کوشش نہیں کی جاتی کہ کس طرح متمدن انسان زندگی کے ہر شعبے میں ریاضی کا محتاج ہے۔ بچوں یا بڑوں کو کبھی یہ بتانے کی کوشش نہیں کی جاتی کہ اس علم نے بار بار انسان کو توہمات سے آزاد کرنے میں کس طرح مدد دی ہے اور کس طرح سے انسانوں کی آزادی کا محافظ رہا ہے۔ اس غلط طریقہ تعلیم کے اسباب حسب ذیل معلوم ہوتے ہیں۔

شمال مغربی یورپ کا نظامِ تعلیم، اصلاحِ مسیحیت (Reformation) کے زمانے میں تین اہم اثرات کے تحت عمل میں آیا۔ ایک اثر کا تعلق صرف زبان سے تھا۔ کلیسا کے اقتصادی اثر کو توڑنے کے لیے یہ ضروری تھا کہ عوام کے دلوں سے کلیسا کا روحانی اور علمی اقتدار اٹھ جائے۔ پروٹسٹنٹ مصلحین نے یہ ثابت کرنے کے لیے کہ کیتھولک عبادتیں اور مذہبی رسمیں محض بدعتیں ہیں۔ انجیل سے حوالے پیش کیے۔ تحریک کو کامیاب بنانے کے لیے ہر ایک کو انجیل پڑھنے کی ترغیب دینی ضروری تھی۔ عین اس وقت حسن اتفاق سے یورپ میں چھاپے کی ایجاد ہوئی اس سے کتابوں اور پڑھنے والوں کی تعداد بڑھ گئی۔ اس لیے پاپاے روم کے روحانی اور علمی اقتدار پر کاری ضرب لگی۔ انجیل کے پڑھنے اور سمجھنے کے لیے یہ ضروری تھا کہ لاطینی اور یونانی زبانوں کی تعلیم رواج پائے۔ یہی وجوہ تھی جن کی بنا پر قرونِ وسطا میں لاطینی اور یونانی علوم کی تحصیل عزت کی نگاہوں سے دکھی جانے لگی۔

مغربی تعلیم میں عددوں کی زبان یعنی ریاضی کی تعلیم دو مختلف اثرات کے تحت داخل ہوئی۔ صلیبی لڑائیوں نے اہل یورپ کی توجہ عربوں کی عظیم الشان علمی ترقیوں کی طرف مبذول کی۔ سوداگروں اور صنعت و حرفت کے کارخانے والوں نے عربوں کے نئے طریقہ حساب یعنی عشری ترقیم (Decimal notation) کو اپنے کاروبار میں مفید پایا اور رائج کیا۔ جرمنی میں تجارتی ضرورتوں کو پورا کرنے کے لیے عربوں سے سیکھے ہوئے نئے حساب کی تعلیم کے لیے تندر سے قائم کیے گئے۔ چھاپے خانے کی ایجاد کے فوراً بعد تجارتی علم حساب پر بہت سی کتابیں شائع کی

گئیں۔ تجارتی حساب کی تعلیم کو اٹل بھی تقویت حاصل ہوئی جب کہ مارٹن لوتھر (Martin Luther) نے یہ فتوا دیا کہ ہر عیسائی لڑکے پر فرض ہو کہ وہ تجارتی حساب کے چار اساسی قاعدے (یعنی جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم) سیکھے۔ اسی طرح عددوں کی زبان کے گونا گوں معاشرتی اطلاقات پر غور کرنے سے قبل ہی علم حساب کو تجارت کے ساتھ مربوط کر دیا گیا۔

علم ہندسہ جس کو یونانی ریاضی دانوں نے محض نظری علم بنا رکھا تھا۔ یورپ کے نظام تعلیم میں ایک دوسرے راستے سے داخل ہوا۔ چونکہ انجیل کی تعلیم کے لیے یونانی اور لاطینی زبانوں کا سیکھنا ضروری تھا اس لیے یونانی فلاسفہ اور حکما کی تصنیفوں کے مطالعے کی ترغیب دلائی گئی۔ یہی وجہ ہو کہ تاجر اور متوسط طبقے کے لوگ یونانی حکما کے جمہوری نظریوں کی طرف مائل ہونے لگے۔ اور یونانی فلاسفہ کے نقطہ نظر کے گرویدہ ہو گئے۔ چونکہ یونان کے خوشحال طبقے کے لوگ نظری علم ہندسہ کو صرف ذہنی مشغلے کے طور پر، تفریح طبع کے لیے سیکھے تھے، اس لیے علم ہندسہ یورپ کے نظام تعلیم میں مثل دیگر یونانی حکما اور فلاسفہ کی تصنیفوں کے داخل ہوا اور اس بات پر غور ہی نہیں کیا گیا کہ سماجی ضرورتوں کی تکمیل کے لیے اس علم سے کیا استفادہ کیا جاسکتا ہو۔ کئی پشتوں تک علم ہندسہ کو مدرسوں میں ایسے ناکارہ طریقوں سے سکھایا گیا ہو کہ طلبہ کو یہ تک نہ معلوم ہونے پایا کہ اسی علم ہندسہ سے ایک نئے اور کارآمد علم کی کس طرح بنیاد پڑی جو پیمائش اور جہاز رانی کے حسابات میں از حد مفید ثابت ہوگا اور اپنی ارضی و سماوی پیمائشوں کی مدد سے اقسام اور کواکب پرستی کے پرچھے اٹا دے گا۔

افلاطون نے ریاضیات کو ایک عالی شان اور پراسرار مذہبی رسم کا

رتبہ دیا۔ تہذیب کے ایام طفولیت میں دیگر علوم کی طرح ریاضیات کی بھی بنیادیں اُن تاریک توہمات پر قائم تھیں جن میں اس زمانے کے لوگ جکڑے ہوئے تھے۔ چنانچہ اس زمانے کے ذہین افراد بھی عدد ۱۳ کے ایک مفرد عدد ہونے اور ایک منحوس عدد ہونے میں امتیاز نہیں کر سکتے تھے۔ افلاطون کے اثر سے ریاضیات پر وہ پردہ راز جو فیثا غورث اور اس کے شاگردوں نے ڈالا تھا، قائم ہو گیا اور فیثا غورثیوں کی عجیب و غریب خفیہ رسموں کو تقویت حاصل ہوئی فیثا غورث کے شاگرد اپنی علمی برادری کے باہر ریاضیات کے معمولی مسئلے بھی ہرگز نہیں بیان کرتے تھے اور اس دستور کی خلاف ورزی کرنے والے کو نہ صرف اپنی برادری سے خارج کر دیتے تھے بلکہ اکثر سزائے موت بھی دیتے تھے۔ اس پردہ راز کی وجہ سے بہت سی کے لیے ریاضیات کا سیکھنا نہ صرف مشکل بن جاتا تھا بلکہ طلبہ کو اس مضمون سے ہمیشہ کے لیے نفرت پیدا ہو جاتی تھی۔

افلاطون کا شان دار کارنامہ یہ تھا کہ اس نے ان لوگوں کی نفسیاتی ضرورت کو پورا کرنے کے لیے جو اپنے سماجی ماحول سے بے ربط ہوں اور اس سماجی ماحول سے نجات حاصل کرنے کے لیے حیوانی لذتوں میں ڈوبنا نہ چاہتے ہوں ایک ایسا مذہب ایجاد کیا جس کی رُو سے مادی دنیا کی ہر چیز روحانی دنیا میں بالکل مختلف شکل اختیار کرتی ہو۔ چنانچہ اس نے مکالمہ تی میوس (Timaeus) سے جو فلسفیانہ موشگافیوں کا بہت عمدہ مجموعہ ہے، یہ معلوم ہوتا ہے کہ روحانی دنیا میں زمین کو مساوی الاضلاع مثلث سے، پانی کو قائمہ الزاویہ مثلث سے، ہوا کو مختلف الاضلاع مثلث سے اور آگ کو مساوی الساقین مثلث سے تعبیر کیا جاتا تھا۔ خود افلاطون نے بھی علم ہندسہ کی مدد سے انسان کی

تخلیق کے متعلق عجیب و غریب نظریے اخذ کیے ہیں۔ چنانچہ وہ لکھتا ہے کہ چوں کہ کائنات کی شکل کروی ہے اس لیے خداے تعالیٰ نے انسان کی تخلیق کے وقت اس کا سر بھی کروی بنایا اور سر کو دنیا میں ادھر ادھر لڑکنے سے بچانے کے لیے انسان کو چار اعضا یعنی دو ہاتھ اور دو پاؤں دیے تاکہ وہ نقل و حرکت کر سکے۔ افلاطون کے یہ خیالات ان لوگوں کے لیے جو دماغ کو جسم پر فوقیت دینے کے عادی ہو گئے تھے تسکین قلب کا باعث بن سکتے تھے لیکن جو لوگ زندگی کے اہم مسئلوں کا حل ڈھونڈ چاہتے ہیں ان کے لیے یہ خیالات محض بے کار ہیں۔ تعلیم کے اس نظام میں جو افلاطون کے نظریوں پر مبنی ہو، ریاضیات کی تعلیم لازماً ان اساتذہ کے سپرد کی جاتی ہے جو ذہنی تخیلات کو انسان کی تمام مادی ضرورتوں پر ترجیح دیتے ہیں اور دنیا و مافیہا سے بالکل بے خبر ہیں۔ ایسے اساتذہ ریاضی کو انسان کی سماجی ضرورتوں سے بالکل جدا کر کے طلبہ کے رو بہ رو پیش کرتے ہیں۔ اس کا لازمی نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ نہ صرف طلبہ بلکہ عوام کو بھی اس نہایت کارآمد مضمون سے نفرت ہو جاتی ہے۔

دوسری غلطی جس کا ارتکاب ریاضیات کی تعلیم میں کیا جاتا ہے وہ یہ ہے کہ ریاضیات میں ہر نئے اصول یا مفروضہ کو اس طرح پیش کیا جاتا ہے کہ وہ بالکل واضح یا از خود حاضر ہے۔ طلبہ کو ہرگز یہ نہیں بتایا جاتا کہ انسان نے ہزاروں سال کی کاوش کے بعد یہ معلوم کیا کہ استدلال کا فلاں حصہ یا مفروضہ ایک بدیہی چیز ہے۔ مثال کے طور پر ہم کہہ سکتے ہیں کہ مصر کے مندروں میں رہنے والے کاہنوں کو یہ تو واضح طور پر معلوم تھا کہ آله نیل پیمائش کی طرح عمل کرتا ہے لیکن اس شخص کے لیے جو ان مندروں

کے باہر ہو اور نیل پیما کے عمل کے متعلق براہ راست معلومات نہ رکھتا ہو،
 آلہ نیل پیما کا عمل صرف اس صورت میں ذہن نشین ہو سکتا ہے جب کہ اس کو
 زیر زمین نالیوں سے آگاہ کیا جائے جو آلہ نیل پیما کو دریائے نیل سے
 ملاتی ہیں۔ بعینہ اسی طرح طلبہ پر ریاضیات کی افادیت صرف اس وقت
 ظاہر ہوتی ہے جب کہ وہ ان واسطوں کو ملاحظہ کریں جن کے ذریعے ہزار ہا
 سال کی کاوشوں اور ذہنی جدوجہد کے بعد انسان نے اپنے مادی ماحول
 اور فطری قوتوں پر قابو حاصل کیا۔ اکثر اساتذہ جنہوں نے افلاطون کے نظریوں
 کے مطابق تعلیم پائی ہے، طلبہ کو ریاضیات کے ارتقا اور اس کے
 معاشرتی پہلو سے بے خبر رکھتے ہیں اور افلاطون کی طرح اس کے پیرو بھی
 اس بات کو پسند نہیں کرتے کہ ریاضیات کو مشاہدات کی تحلیل و ترتیب سے
 کارآمد نتیجے اخذ کرنے کے لیے استعمال کیا جائے۔

اس کتاب کا مقصد اس بات کو واضح کرتا ہے کہ پیمائش اور گنتی کے
 قواعد انسان کی روز افزوں معاشرتی اور عمرانی ضرورتوں کی وجہ سے کیوں کر
 ترقی کرتے رہے ہیں اور کس طرح اکثر واقعات رسم و رواج نے اس ترقی
 کی راہ میں روڑے اٹکائے ہیں۔ یہ بھی واضح کرنے کی کوشش کی گئی
 ہے کہ ریاضیات کی مدد سے انسان نے کائنات کا خاکہ کس طرح مرتب کیا
 اور کس طرح طبعی قوتوں کو ان کے عمل کے قواعد سمجھنے کی وجہ سے اپنا
 مطمع بنایا اور ثابت کیا کہ طبعی قوتیں بے معنی رسموں اور قربانیوں کی مدد سے
 ہرگز مہربان نہیں بنائی جاسکتیں۔ ریاضی کی اس دل چسپ کہانی کو ایسے
 موثر پیرائے میں پیش کرنے کی کوشش کی گئی ہے کہ مبتدی کو ریاضیات کے
 سیکھنے میں جو مشکلات پیش آتی ہیں وہ بتدریج دور ہو جائیں۔ اس سلسلے میں

یہ بھی واضح کیا گیا ہے کہ ریاضیات کی ترقی کا اصل مقصد پیمائش اور گنتی کی عملی مشکلات کو دور کرنا تھا۔ جوں جوں ہم آگے بڑھیں گے۔ یہ واضح ہوتا جائے گا کہ کس طرح ہر دور میں سابقہ مشکل طریقوں کی جگہ پیمائش اور گنتی کے نئے اور آسان طریقے ایجاد کیے گئے اور قدیم طریقے کس طرح متروک ہوتے گئے حتیٰ کہ جدید ریاضیات میں قدیم ریاضیات کی بہت کم ضرورت پیش آتی ہے۔ اس کا مطلب یہ نہیں ہے کہ جدید ریاضیات قدیم ریاضیات کی مرہون منت نہیں ہے۔ اس میں کوئی شک نہیں کہ جدید ریاضیات کی ہر تحقیق اور ترقی دراصل قدیم ریاضیات کی کسی نہ کسی شاخ پر مبنی ہے لیکن ساتھ ہی ساتھ یہ بھی ذہن نشین کرنا ضروری ہے کہ زیادہ کا رآمد طریقوں کی ایجاد کے بعد پرانے بھدے طریقوں کی کوئی ضرورت باقی نہیں رہتی۔ اگرچہ کہ جبر و مقابلہ، علم مشات، تریحات اور احصا یونانی علم بندہ پر مبنی ہیں لیکن اقلیدس کے مقالوں کے تقریباً دو سو مسئلوں میں سے چند ہی مسئلے ریاضیات کی ان نئی اور کارآمد شاخوں کے سمجھنے کے لیے کافی ہوتے ہیں۔ اقلیدس کے بقیہ مسئلے عوام کے لیے محض بے کار ہیں کیوں کہ ان مسئلوں میں جن نتیجوں کو مشکل طریقوں سے حاصل کیا گیا ہے وہ جدید ریاضیات کی مدد سے آسان طریقوں سے حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ اس شخص کے لیے جو ریاضیات اور موجودہ تہذیب کے باہمی ارتباط کا مطالعہ کرنا چاہتا ہے۔ اقلیدس کے یہ غیر ضروری مسئلے صرف پریشانی اور بہت خلنی کا باعث ہوتے ہیں۔ اس لیے ان مسئلوں کو نظر انداز کرنا ہی مناسب ہے یہ کتاب خاص طور پر ان لوگوں کے لیے لکھی گئی ہے جو ریاضیات کے مروجہ غلط طریقہ تعلیم سے پریشان ہو کر بہت ہار چکے ہیں اور جو کچھ یاد ہے اس کے

اصل مقصد اور استعمال سے بے خبر ہیں اس لیے ہم بالکل ابتدائی حصوں سے اپنے موضوع پر بحث کریں گے اور استدلال کی مختلف کڑیوں کو سلسلہ وار بیان کریں گے۔

ریاضی کی ماہیت کے متعلق دو مختلف نقطہ نظر اختیار کیے جاتے ہیں۔ ایک نقطہ نظر جو افلاطون نے اختیار کیا ہے وہ یہ ہے کہ ریاضی کے نتیجے لازمی اور ابدی حقائق پیش کرتے ہیں۔ دیدرو اور دوسرے دہریوں کے خلاف مشہور جرمن فلسفی کانٹ (Kant) نے اس نقطہ نظر کو دہریت کی تردید میں استعمال کیا ہے۔ کانٹ کا یہ خیال ہے کہ علم ہندسہ کے اصول اور نتیجے ابدی اور پورے پورے طور پر صحیح ہیں اور اس لیے یہ نتیجے ہمارے حواسِ خمسہ سے بے نیاز ہیں۔ کانٹ کی اس تحریر کے ٹھوڑے ہی موصے بعد ماہرین حیاتیات نے یہ ثابت کیا کہ کان کے اندرونی حصے میں ایک اور قوت حاسہ ہے جو جاذبہ کی کشش سے متاثر ہوتی ہے۔ اس نئی تحقیق کی اہمیت کا احساس سب سے پہلے جرمن ماہر طبیعیات ارنسٹ ماخ (Ernst Mach) کو ہوا۔ آئن سٹائن (Einstein) نے نظریہ اضافیت کے سلسلے میں یہ بتایا کہ وہ علم ہندسہ میں کو افلاطون نے فلک ہفتم پر چڑھایا تھا اور جس کے نتیجوں کو کانٹ ابدی حقائق تصور کرتا تھا عملی تجربوں میں صرف تقریباً درست پائے جلتے ہیں۔ اس نظریہ اضافیت نے قدیم طریقے کے ریاضی دانوں کو بہت پریشان کیا ہے۔ بعض ریاضی دان اب یہ رائے پیش کرتے ہیں کہ ریاضی صرف ذہنی کھیل ہے جس میں چند فرضی قاعدے اختیار کیے جاتے ہیں جو اور عملی دنیا میں یہ قاعدے درست ہوں یا نہ ہوں۔ یہ رائے کہ ریاضی صرف ایک ذہنی کھیل ہے ان ریاضی دانوں کی ذہنیت کو بے نقاب

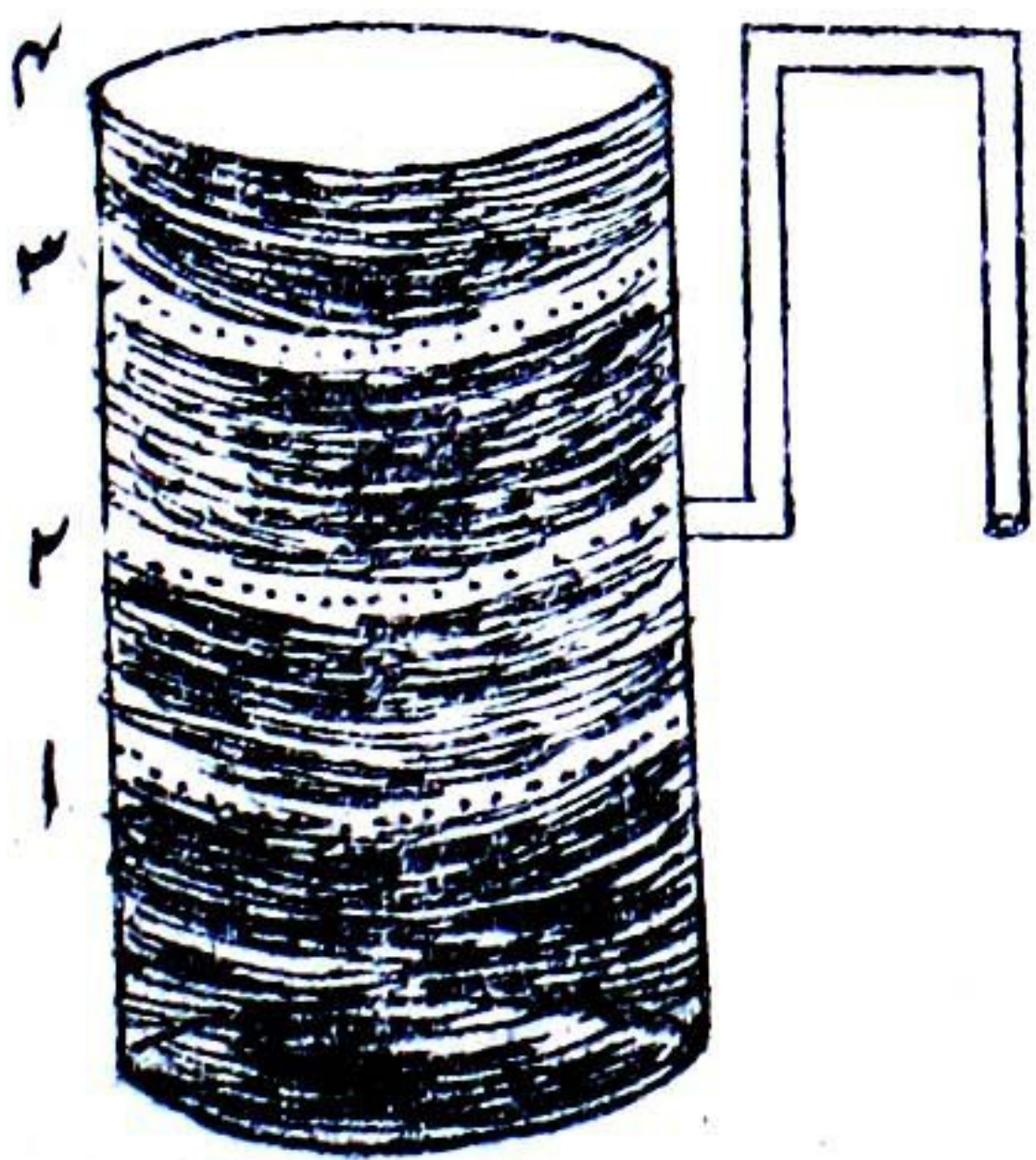
کرتی ہو اور ریاضیات کی حقیقی ماہیت اور سماج کے لیے ریاضیات کی ضرورت سے ہمیں آگاہ نہیں ہونے دیتی۔ اگر یہ مان لیا جائے کہ ریاضی صرف ایک ذہنی کھیل ہو تو ہماری رائے میں سماج کے ہر فرد کے لیے ہرگز یہ ضروری نہیں کہ وہ اس علم کو سیکھے۔ دوسرے کھیلوں کی طرح اس کھیل کو بھی جس کا جی چاہے ترک کر سکتا ہو۔

ریاضیات کے متعلق دو سرا اور ہماری رائے میں زیادہ صحیح نقطہ نظر یہ ہے کہ ریاضیات عددوں اور پیمائش کی زبان ہے جس کے قاعدوں کا سکھنا سماج کے ہر فرد کے لیے ضروری ہے تاکہ وہ سماج کا کارآمد رکن بن سکے۔ ان قاعدوں کا تعلق مادی دنیا کے عملی تجربوں سے ایسا ہی ہے جیسا کہ صرف و نحو کے قاعدوں کا زبان سے ہے جس طرح زبان کے قاعدے ابدی حقائق نہیں ہیں اسی طرح ریاضی کے قاعدے بھی ابدی نہیں ہیں۔ بلکہ ایسی مناسب قراردادیں ہیں جن کی مدد سے انسان پیمائش اور گنتی کے متعلق واضح طور پر ایک دوسرے سے تبادلہ خیال کر سکتے ہیں جس طرح اپنے خیالات کو صحیح طور پر دوسروں کے سامنے پیش کرنے کے لیے زبان کے قاعدوں، الفاظ کے صحیح معنی اور ان کے با محاورہ استعمال کا سیکھنا ضروری ہے اسی طرح سماج کے ہر فرد کے لیے یہ ضروری ہے کہ وہ پیمائش اور گنتی کی زبان کے قاعدوں کو اچھی طرح سیکھے۔ تاکہ سماج کے قوانین، اعداد و شمار، آبادی، تجارت کے حساب اور موازنہ وغیرہ کو خود سمجھ سکے اور ماہرین کے فریب سے بچ کر ان کے استدلال اور نتیجوں کی تنقید کر سکے۔

عام طور پر یہ کہا جاتا ہے کہ اس سے زیادہ کوئی بات یقینی نہیں ہے کہ دو اور دو چار ہوتے ہیں“ یہ کہنا کہ ”دو اور دو چار ہوتے ہیں“

کسی ریاضیاتی حقیقت کا بیان نہیں ہو وہ ریاضیاتی جملہ جس کی طرف اشارہ کیا جاتا ہے حسب ذیل ہے: $۴ = ۲ + ۲$

اس کے یہ معنی ہیں کہ عدد ۲ کو عدد ۲ میں جمع کرنے سے عدد حاصل ہوتا ہے۔ ریاضیاتی جملہ $۴ = ۲ + ۲$ سے فعل "جمع کرو" کے معنی بیان ہوتے ہیں جب کہ اس فعل کی ریاضیاتی علامت + ہو۔ یہ ضروری نہیں ہے کہ عملی دنیا میں بھی یہ نتیجہ ہمیشہ درست ہو جملہ $۴ = ۲ + ۲$ دراصل ایک قرارداد ہے جو ریاضی دانوں نے فعل "جمع کرو" اور اسم "۲" اور "۴" کے متعلق قاعدے کے طور پر اختیار کی ہے۔ اس ریاضیاتی قرارداد کی نوعیت بالکل وہی ہے جو یہ کہنے کی ہے کہ کتاب کی جمع کتب ہے" یا یہ کہنے کی کہ ایک کتاب اور ایک کتاب کو جمع کرنے سے کتب حاصل ہوتی ہیں لیکن یہ اچھی طرح سمجھ لینا چاہیے کہ اوپر کے قاعدے کی بنا پر جو کتاب کی جمع حاصل کرنے کے لیے دیا گیا ہے یہ نہیں کہا جاسکتا کہ "حساب" کی جمع "حسب" ہو۔ ذیل کی توضیح سے یہ بتایا جاسکتا ہے کہ ریاضیاتی علامت + (جو فعل جمع کرو کے لیے استعمال کی گئی ہے) کے معنی میں تبدیلی کی جائے تو یہ بیان کہ $۴ = ۲ + ۲$ ہمیشہ درست نہیں ہوتا۔



اس کی تمثیل میں ایک شکل

پیش کی گئی ہے۔

مکن ہے کہ ریاضی کے قاعدوں کی رُو سے جو قاعدے حاصل ہوں وہ عملی دنیا میں درست نہ ہوں۔ ایسی صورتوں میں ریاضی کے قاعدوں میں ترمیم اور تبدیلی کی ضرورت پیش آتی ہے چنانچہ سمتی احصاء (Vector Analysis) میں علامت "+" کے استعمال کے قاعدے ابتدائی ریاضی کے قاعدوں سے بالکل جداگانہ ہیں۔

اگر معمولی بول چال کی زبان میں انسان کی تدریجی معاشی ترقی کی اہم منزلوں کو پیش کیا جاسکتا ہے تو اس سے زیادہ آسانی کے ساتھ ہم اس معاشی ارتقا کا نقشہ پیش کر سکتے ہیں جب کہ ہم ریاضی کے قاعدوں سے مدد لیں۔ معمولی زبان جس میں مختلف اشیاء کی صرف قسموں کو بیان کیا جاسکتا ہے۔ اس قدر باضابطہ اور واضح نہیں ہے جیسی کہ عددوں کی زبان ہے۔ انسان کو ۲۰۰۰ سال قبل مسیح سے فیراڈے (Faraday) اور ہرٹز (Hertz) کے زمانے تک معمولی زبان میں بہت کم تبدیلی اور وسعت کی ضرورت پیش آئی۔ لیکن اس کے برعکس عددوں کی زبان میں یعنی ریاضی کی مختلف شاخوں میں فطری ماحول پر انسان کے روز افزوں تسلط پر قابو رکھنے کی غرض سے عظیم الشان ترقی اور تبدیلی ہوئی۔ تاریخی زلزلے سے بہت قبل برقی اور مقناطیسی کششیں دریافت ہو چکی تھیں۔ ساتویں صدی ق۔ م میں طالیس (Thales) کو یہ معلوم تھا کہ کہربا کو رگڑنے سے اس میں چھوٹے چھوٹے تنکوں کو اپنی طرف جذب کرنے کی قوت پیدا ہو جاتی ہے۔ اس سے قبل چینیوں کو طبعی مقناطیس کے خواص معلوم تھے۔ ایک ہزار سال ق۔ م میں انسان نے پہلی دفعہ تصویری تحریروں کو چھوڑ کر رمزی (Symbolic) حروف تہجی اختیار کیے اور اس زمانے سے آٹھویں صدی تک اشیاء کی قسموں کے

138558

بیان کرنے کے طریقے میں صرف ایک قابل لحاظ اضافہ ہوا وہ یہ کہ اٹھارویں صدی میں ماہرین حیاتیات نے یورپ کی مختلف زبانوں میں دواؤں میں کام آنے والے پودوں کے مختلف ناموں کی وجہ سے جو انتشار پیدا ہو گیا تھا اس کو دور کرنے کے لیے علمی اصطلاحات کا ایک بین الاقوامی لغت تقریباً غیر مستعمل اور مشکل لاطینی اور یونانی لفظوں کی مدد سے تیار کیا اور ان نئی اصطلاحوں کو پودوں اور جانوروں کے معمولی اور مشہور ناموں کی بجائے اختیار کر لیا۔ اس طریقے سے یورپ کے ماہرین حیاتیات کی علمی زبان بین الاقوامی ہو گئی۔ جس سے ان کی تحریروں میں صحت اور وضاحت کا بہت اضافہ ہوا۔

ریاضیات کی زبان میں اور معمولی بول چال کی زبان میں اہم فرق یہ ہے کہ ریاضیات کی زبان نہایت احتیاط اور صحت کے ساتھ مرتب کی گئی ہے۔ عددوں کی زبان میں کسی فرد یا قوم کے ذاتی جذبات کو کوئی دخل نہیں ہوتا۔ یہ زبانیں، حیاتیات کی علمی زبان کی طرح، بین الاقوامی صورت اختیار کر چکی ہیں اور جن امور کو ان زبانوں میں بیان کیا جاتا ہے ان میں خطا یا شبہ کا امکان کم ہوتا ہے۔

پیمائش اور گنتی کے فنی طریقے تجارت کے بہری اور بحری راستوں کے ذریعے دنیا میں پھیلے ہیں۔ ریاضی کی ترقی اور تشکیل بہت تدریجی اور سلسلے میں رہی ہے۔ تقریباً چار ہزار سال قبل ہسپت داں سورج گرہنوں کا قبل از قبل اندازہ لگا سکتے تھے۔ لیکن صرف حال ہی میں یہ معلوم ہو سکا کہ سورج میں رہے کی مقدار کتنی ہے۔ کہر باکو فلائین یا ریشم سے رگڑنے سے جو برقی قوت پیدا ہوتی ہے اس کی دریافت میں اور ایک برقائے ہوائے جسم کی کشش کی مقدار معلوم کرنے کے طریقے کی ایجاد میں تقریباً دو ہزار سال کا وقفہ ہے۔ اسی

طرح مفناطیسی کشش کی مقدار کی پیمائش سے کئی ہزار سال قبل انسانوں کو سنگ متناطیس (یعنی طبیعی متناطیس) کا علم ہو چکا تھا۔ انسان نے سب سے پہلے مختلف چیزوں میں ان کی قسموں کے لحاظ سے تمیز کرنا سیکھا کیوں کہ یہ عمل نسبتاً آسان تھا اور بعد ازاں اشیاء کو ان کی مقدار کے لحاظ سے ترتیب دینا سیکھا کیوں کہ یہ عمل بہت مشکل ہے۔ پیمائش کے طریقوں میں انسان کی ترقی اس کی فطری قوتوں پر نہیں بلکہ اس کی معاشرتی ترقیوں پر منحصر رہی ہے۔ ہم بغیر آلات کی مدد کے صرف آنکھوں اور کانوں کی مدد سے دور کی چیزوں میں ان کی قسموں کے لحاظ سے امتیاز کر سکتے ہیں لیکن دور کی کسی چیز کو ناپنے کے لیے انسان کو مختلف آلات مثلاً اصطلاب، دور بین اور میکروفون ایجاد کرنا پڑا۔ نیز انسان نے ایسی ترازوئیں ایجاد کیں جو وزن کے ایسے فرق کو بتا سکتی ہیں جسے ہمارے ہاتھ کسی طرح بھی محسوس نہیں کر سکتے۔ پیمائش کے آلات کی ایجاد کی ہر منزل پر انسان نے عددوں کی زبان کے قاعدوں اور طریقوں میں مناسب اور کارآمد تبدیلی کی۔ ابتدا میں انسان کو ریاضی کی ضرورت اپنے گلے کی بھیلوں اور مویشیوں کی تعداد معلوم کرنے کے لیے پیش آئی تھی۔ لیکن اس منزل سے گزر کر انسان نے مندروں کی تعمیر کی اور اس سلسلے میں عددوں کی زبان میں شے حصوں کا اضافہ ہوا۔ جب تمدن اور آگے بڑھا تو انسان نے تیرہ تار مندروں میں بیسے جان مادے کے زور سے بڑے بڑے جہاز چلانے اور جہاز رانی کے حسابات کے لیے ریاضی کی نئی شاخیں ایجاد ہوئیں۔ ریاضی کے اس ارتقا کی ہر منزل پر سابقہ طریقوں کی جگہ نئے اور زیادہ کارآمد طریقوں نے لی اور پیمائش کے قاعدوں میں

نئے نئے اصولوں کا اضافہ ہوتا گیا۔

عددوں کی زبان یعنی ریاضی کی ابتدا مصری اور سمیری (Sumerian) مذہبی تہذیبوں کے زمانے میں ہوئی۔ ان قدیم مذہبی تہذیبوں کے علوم

تجارتی قافلوں کے ذریعے نہ صرف چین تک پہنچے بلکہ بحیرہ روم کو عبور کر کے سامی قوموں سے (جو قلعی اور رنگوں کی تجارت کے لیے سمندریا کی سیاحت کرتے تھے) جلسے۔ اس کے کچھ عرصے بعد شمالی یورپ کی وحشی قومیں ان سامیوں کے مقبوضات پر جو یونان اور ایشیائے کوچک میں تھے حملہ آور ہوئیں۔ ان وحشی قوموں نے ان علاقوں کو توح کر لیا لیکن ساتھ ہی سامیوں کے علم سے خود مفتوح ہو کر وہیں رہنا سہنا شروع کیا اور سامیوں کے علمی خزانوں میں اپنی طرف سے بھی اضافہ کیا۔ جیسے جیسے یونانیوں کی خوش حالی میں اضافہ ہوا علم ہندسہ ان کے لیے صرف ایک ذہنی مشغلہ اور کھیل بن گیا۔ قدیم زمانے کی کواکب پرستی کی وجہ سے یونانیوں کا فلسفہ اور ان کی علمی ترقی برباد ہو گئی اور عین اس وقت جب کہ عالم ہندسہ ایک نئی شکل اختیار کرنے کے لیے تیار تھا تمام ترقی یک دم رُک گئی۔ اس کے بعد عدم و فنون اور جہاز رانی کا مرکز مصر کا مشہور شہر اسکندریہ بن گیا اور جوان ہمت افراد میں تجارت کے سلسلے میں دنیا کے نامعلوم حصوں کی دریافت کا شوق پیدا ہوا۔ علم ہندسہ کو اجرام فلکی اور زمین کی پیمائش کے لیے استعمال کیا گیا اور علم مثلث وجود میں آیا۔ سورج اور چاند کے فاصلے دریافت کیے گئے زمین کی مساحت عمل میں آئی اور علمی دنیا ستارہ پرستی کی غلامی سے آزاد ہوئی۔

اسکندر یہ میں علم ہنیت کی ترقی اور تشکیل کے ساتھ ایسے بڑے بڑے عددوں کی ضرورت پیش آئی جو یونانیوں کے وہم و گمان میں بھی نہیں آسکتے تھے۔ حکیم انکساگوراس (Anaxagoras) نے پیریکل کے درباریوں کو یہ کہہ کر حیران کر دیا کہ سورج کی ٹھکیا کا رقبہ سرزمین یونان کے رقبے کے تقریباً مساوی ہے اس کے بعد ایراسٹو تھینس (Erasosthenes) اور پوسیدونیس (Posidonius) نے زمین کے محیط کا طول دریافت کیا اور یہ بتایا کہ کرہ ارض کے رقبے کے مقابلے میں سرزمین یونان کا رقبہ بالکل بے حقیقت ہے۔ علم ہنیت کے بڑے بڑے عددوں پر حساب لگانے کے لیے نئے طریقوں کی جستجو ہونے لگی۔ ڈیوفانتس (Diophantus) اور تھیون (Theon) جیسے ذہین افراد نے ہندسی شکلوں کی مدد سے حساب کے نئے طریقے ایجاد کیے اور ایسا معلوم ہوتا تھا کہ بہت جلد جبر و مقابلہ وجود میں آنے والا ہے لیکن اسکندر یہ کے ریاضی دانوں کو اس کوشش میں کامیابی حاصل نہیں ہوئی کیوں کہ علم کا جو ذخیرہ انھیں معاشرتی ورثے کے طور پر ملا تھا اس میں اس نئی سمت میں ترقی کرنے کی صلاحیت نہ تھی۔ مشرق میں ہندستانوں نے (جو یونانیوں کے ابجدی ہندسوں سے ناواقف تھے) عددوں کی ترقیم کا ایسا طریقہ ایجاد کیا جس کے ذریعے آلات کی مدد کے بغیر آسانی کے ساتھ بڑے بڑے عددوں پر حساب لگایا جاسکتا تھا۔ ہندستانوں کا شان دار کارنامہ ہندسوں کی مقامی قیمت اور صفر کی ایجاد ہے۔ اس ایجاد کے ٹھوڑے ہی عرصے بعد اسلامی تہذیب دنیا کے بہت بڑے حصے پر چھا گئی اور عرب ریاضی دانوں نے یونانیوں اور مصریوں کے طریقہ حساب اور پیمائش میں ہندستانوں کی ایجاد کردہ

عشری ترقیم (Decimal notation) کو داخل کیا۔ خوارزمی اور عمر خیام جیسے حکماء نے جبر و مقابلہ کی بنیادیں قائم کیں۔ آج کل بھی یورپ کی تمام زبانوں میں خوارزمی اور عمر خیام کے ایجاد کردہ علم کو عربی اصطلاح "الجبر" سے موسوم کر کے متمدن دنیا پر ان حکماء کے احسانِ عظیم کی یاد تازہ رکھی جاتی ہے۔ مسلمانوں نے مساحت، علم مثلث، جبر و مقابلہ اور علم ہیت میں قابلِ لحاظ ترقی کی۔ خاص طور پر علم ہیت اور جہاز رانی کے متعلق ان کے حسابات میں حیرت انگیز صحت پائی جاتی ہے۔

ہسپانیہ میں عربوں نے تمام علوم کے لیے جامعات (universities) قائم کیں اور علم کے دروازے ہر طالب علم کے لیے بلا لحاظ مذہب و ملت کھول دیئے۔

تجارتی شاہ راہوں سے گزر کر عربوں کے علوم اور خاص طور پر ان کے حساب کا نیا طریقہ یہودی عالموں کے توسط سے یورپ میں پھیلا۔ صلیبی لڑائیوں نے، یورپی قوموں اور مسلمانوں کے میل جول کی وجہ سے، یورپی قوموں کے ذہنی نقطہ نظر میں بلا ارادہ توسیع کی۔ عربوں کے تیار کردہ کوکبی جدولوں اور بحری نقشوں کی مدد سے جہاز رانی کے نئے اور عظیم الشان دور کی بنیادیں تیار ہوئیں۔ سوداگر روز افزوں تجارت سے مالا مال ہوئے اور بڑے بڑے عددوں سے حساب لگانے کی ضرورت کا احساس قوی ہوتا گیا۔ بحری سفروں میں کوکبی جدولوں کے ذریعے آسانی کے ساتھ حساب لگانے کے لیے الخوارزمی کا ایجاد کردہ نیا طریقہ رواج تک اسی کے نام پر الگورتھم یا لوگارتھم کا طریقہ کہلاتا ہے، نہایت مفید ثابت ہوا۔ ریاضی دانوں نے طول بلد، عرض بلد اور بحری نقشوں کی مدد سے جہاز رانی کے متعلق

کارآمد کے حل کیے۔ ان تحقیقات کا لازمی نتیجہ یہ ہوا کہ ایک نیا علم ہندسہ (جس کو معمولی زبان میں تریسہمات کہتے ہیں) وجود میں آگیا۔ اس نئے علم ہندسہ میں اس کے موجد ڈے کارٹ (Descartes) نے ایسے تخمیل داخل کیے جو یونانی علم ہندسہ میں موجود نہ تھے۔ بحری سیاحت کے اس زمانے میں وقت ناپنے کے لیے گھڑیاں ایجاد ہوئیں اور وقت کی صحیح پیمائش کی وجہ سے (جو اب تک مذہبی فرقے کے سپرد تھی)، علم ہندسہ میں وقت کا تخمیل داخل ہوا اور رقاص اور سیاروں کی حرکت کے سلسلے میں ریاضی کی ایک نئی شاخ ایجاد ہوئی جو احصا کہلاتی ہے۔

فی الحال ہم ریاضی کے ارتقا اور انسانی تمدن، معاشرتی ترقی، سفید ایجادوں اور مذہبی عقیدوں کے ساتھ ریاضی کے ارتباط کی اس دل چسپ کہانی کے خاکے کو اس دور پر ختم کرتے ہیں جب کہ نیوٹن نے انتقال کیا۔ اس کے بعد کے دور میں ریاضی کی کئی نئی شاخیں ایجاد ہوئیں اور ان کے ذریعے انسان کی سماجی زندگی پر گہرا اثر پڑا۔ ریاضی کی ان نئی اور کارآمد شاخوں کا ذکر مختلف ابواب میں مناسب موقع پر آئے گا۔



دوسرا باب

تاریخی زمانے سے پہلے کی ریاضیات

یعنی

گنے اور ناپنے کی ابتدائی کوششیں

بعض لوگوں کا یہ غلط خیال ہے کہ ریاضی کی ابتدا صرف اسی وقت ہوئی جب کہ ایک خوش حال طبقہ، جس کو ہندسی شکلوں اور حدودوں سے کھیلنے کے لیے کافی فرصت تھی، وجود میں آیا۔ جیسے جیسے ہم ریاضی کے ارتقا کی دل چسپ کہانی کا مطالعہ کرتے جائیں گے۔ ہمیں معلوم ہوگا کہ ریاضی کی ترقی زیادہ تر اس وقت ہوئی جب کہ ریاضی دانوں کو کسی حقیقی اور مفید کام میں ریاضی کی ضرورت پیش آئی اور بوں ہی ریاضی ایک سب سے بڑے کار خوش حال طبقے کا، جو روزمرہ زندگی سے کوئی دل چسپی نہیں رکھتا تھا ذہنی کھیل بن گئی تو اس میں انحطاط اور نمود پیدا ہو گیا۔

ہر زمانے میں ریاضی کی ترقی انسان کی حیاتیاتی معاشری حیثیت پر اور اس زمانے کے ذہنی ماحول پر منحصر رہی ہے، سب سے پہلے ریاضی پر اچھی کتابیں قدیم یونانی علما نے تصنیف کیں۔ ان کے ماحول میں ایسے

لوگ تھے جو قطب تارے کے مقام اور ستاروں کے درمیانی زاویہ فاصلوں کی مدد سے بحری سفر کرتے تھے۔ ریت پر کھینچے ہوئے خاکوں کی مدد سے عبادت خانے بناتے تھے اور سایوں کی مدد سے میناروں کی بلندیاں محسوب کرتے تھے۔ اس ماحول نے قدیم یونانی علماء اور خوش حال ذہین لوگوں کو اس بات کی طرف مائل کیا کہ وہ اس دنیا پر غور کریں جس میں لوگوں کی محنت سے دن بہ دن مفید تر تئیاں ہو رہی تھیں۔ یونانیوں سے پہلے بابل اور مصر والوں نے ریاضی میں قابل لحاظ ترقی کی تھی۔ چنانچہ اہل بابل گنتی کے ایسے طریقوں سے واقف تھے جو قدیم (اتی کاہی) یونانیوں کے طریقوں سے بہتر تھے۔ ریاضی کی ابتدا کے متعلق صحیح معلومات حاصل کرنے کے لیے ہمیں (نمرودا نپر) (Mesopotamia) کی تختیوں اور چپوس (Clay tablets) کے ہرم سے پہلے کے زمانے کی ترقیوں پر، جو سماجی ضرورتوں کے تحت ہوئیں غور کرنا ہوگا۔ ریاضی کی قدیم ترین کتابوں کی تصنیف سے بہت پہلے ہی انسان ایسے سوالوں کے حل کے طریقے معلوم کر چکا تھا جن کا جواب ایک عدد ہوتا ہو۔ ذیل کے سوالوں کی تحقیق سے ہمیں معلوم ہوگا کہ کن سماجی ضرورتوں کے تحت قدیم زمانے میں ریاضی میں ترقی ہوئی۔

۱۱ کسی دیے ہوئے گروہ میں کتنے افراد ہیں؟

تسمانیہ کے قدیم باشندے انسانی تمدن کے ابتدائی دور کے یادگار تھے یہ صرف چار تک گن سکتے تھے۔ یہ بات قرین قیاس ہو کہ بڑے عددوں کی ضرورت انسان کو صرف اس وقت پیش آئی جب کہ اس نے مویشیوں کے گلے پالنے شروع کیے کیوں کہ مویشیوں کے مالک کے لیے

یہ جاننا ضروری ہوتا ہے کہ اس کے گائے میں کتنے جانور ہیں اور آیا ان میں سے کوئی جانور غائب تو نہیں ہو گیا۔ انسان نے شہر بسانے سے بہت پہلے اپنی مویشیوں کو دس دس کی جماعتوں میں گننا سیکھا۔ اس کو ہم ریاضی کی جدید زبان میں یوں کہتے ہیں کہ گنتی کا اساس دس کا عدد مقرر کیا گیا ہے۔ گنتی کے اکثر نظاموں میں پانچ یا اس کا کوئی مناسب ضعف بھی اساس کے طور پر استعمال کیا جاتا تھا۔ اس انتخاب کی وجہ یہ معلوم ہوتی ہے کہ قدیم انسان، چھوٹے بچوں کی طرح اپنے ہاتھ اور پاؤں کی انگلیوں سے مدد لیتا تھا۔ دونوں ہاتھ اور دونوں پاؤں کی انگلیوں کی مدد سے گنتی کے طریقے کا نشان انگریزی لفظ (Seam) میں بھی پایا جاتا ہے جو بس کے لیے استعمال ہوتا ہے اور بجائے اکیس بائیس وغیرہ کے بس اور ایک، بس اور دو وغیرہ اور ستر کی بجائے تین بس اور دس کہا جاتا ہے۔

(۲) کوئی واقعہ کتنے زمانے پہلے گزرا؟

تحقیق کے ساتھ یہ نہیں بتایا جاسکتا کہ انسان نے پہلے مویشیوں کے گلوں میں جانوروں کی تعداد کو گننا سیکھا۔ یا موسموں کی تبدیلی اور وقت کی پیمائش سیکھی۔ جب انسان شکار کے ذریعے خوراک کی فراہمی کے دؤر سے گزرا تو اس نے اپنے کھیتوں میں اناج بونا سیکھا اور یہ بھی معلوم کیا کہ اناج بونے اور کھیتی کاٹنے کے خاص موسم ہوتے ہیں اور اس کے جانور صرف خاص موسموں میں بچے دیتے ہیں۔ اس ضرورت کے تحت انسان کو موسموں کی تبدیلی کا اندازہ لگانا پڑا۔ مشاہدے سے اس نے یہ معلوم کیا کہ ایک پورا (Full moon) سے دوسرے بدرتک چاند کے طلوع و غروب ہونے کے ادقات، سورج کے لحاظ سے، بتدریج دیر سے

واقع ہوتے ہیں۔ یعنی چاند مغرب سے مشرق کی طرف ہٹتا جاتا ہے اور ۲۹ یا ۳۰ دن کے بعد سورج کے لحاظ سے پھر اپنے ابتدائی مقام پر آجاتا ہے۔ بدر سے بدر یا ہلال سے ہلال تک کے وقفہ کو جو ۲۹ یا ۳۰ دن کا ہوتا ہے ایک مہینے سے موسوم کیا گیا۔ مشاہدے سے یہ بھی معلوم کیا گیا کہ ستاروں کے جٹ موسموں کی تبدیلی کے ساتھ اپنا مقام بدلتے جلتے ہیں۔ چنانچہ وہ جٹ جو کبھی آدھی رات کے وقت عین سر پر تھے تین مہینے بعد آدھی رات کو افق پر غروب ہوتے نظر آتے ہیں اور ستاروں کے وہ جٹ جو آدھی رات کو طلوع ہوتے تھے تین مہینے بعد آدھی رات کو عین سر پر ہوتے ہیں۔ (مندرجہ بالا مشاہدہ سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کو کبھی یوم یعنی کسی ستارے کے طلوع سے طلوع تک کا وقفہ شمسی یوم یعنی سورج کے طلوع سے طلوع تک کے وقفہ سے چھوٹا ہوتا ہے)۔ اس بنا پر یہ معلوم ہوا کہ موسموں کی تبدیلی کے ساتھ رات کے وقت آسمان کا کو کبھی منظر بھی بدلتا جاتا ہے اور اس تبدیلی کی مدد سے موسموں میں امتیاز کیا جاسکتا ہے۔ سورج کے طلوع کے وقت آسمان پر ستاروں کے مختلف جٹوں کے مقاموں کا مشاہدہ کر کے اہل مصر نے تقریباً (۲۰۰۰) سال قبل مسیح یہ معلوم کر لیا تھا کہ ایک سال کے ۳۶۵ دن ہوتے ہیں۔ سال کے طول کے متعلق یہ نتیجہ اس مشاہدہ پر مبنی تھا کہ اگر کسی دن ستارہ شعریٰ یا نیسی سورج کے طلوع ہونے سے عین قبل نکلتا ہو تو پھر ۱۲۶۵ ہی دن کے بعد سورج کے عین قبل طلوع ہوتا ہے۔ اس طرح انھوں نے یہ معلوم کیا کہ آسمان پر ستاروں کے لحاظ سے، سورج ایک کامل چکر ۳۶۵ دن میں لگاتا ہے اور بارش کے ایک موسم سے بارش کے دوسرے موسم تک یہی ۳۶۵ دن کا وقفہ ہوتا ہے۔ اس وقفہ یا مدت کا نام ایک شمسی سال رکھا گیا ہے۔

سال کا تخمیل ایک سلاخ کے سایے میں کمی بیشی دیکھنے سے بھی پیدا ہوتا ہے۔ اگر کسی دن ایک سلاخ کے سایے کے طول کی تبدیلی کا مشاہدہ کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ سایہ جب انتہائی طویل ہو اس روز کم ہو تو ایک معین سمت میں واقع ہوتا ہے اور اس کا یہ اقل طول عین نصف النہار کے وقت (یعنی اس آن پر جو سورج کے طلوع اور غروب کے عین درمیان ہے) حاصل ہوتا ہے۔ اقل طول والے سایے کی یہ وہ سمت ہے جو شمال اور جنوب کے نقطوں میں سے گزرنے والے افقی خط کے سمت ہوتی ہے (شمال اور جنوب کے نقطوں میں سے گزرنے والے خط کی سمت تعین..... کا ایک اور آسان طریقہ سوال ۳۲ کے ضمن میں بیان کیا جائے گا) اگر اس خط پر عمود وار ایک اور افقی خط کھینچا جائے تو یہ مشرق اور مغرب کے نقطوں میں سے گزرنے والا خط ہوگا [مشرق اس طرف ہوتا ہے جہاں سے سورج طلوع ہوتا ہے اور مغرب اس کی مخالف جانب یعنی سورج کے غروب ہونے کی طرف] مختلف موسموں میں مشرقی افق پر سورج کے طلوع ہونے کے مقام بھی مختلف ہوتے ہیں۔ اعتدال ربیع (۲۱ مارچ) اور اعتدال خریف (۲۳ ستمبر) کے دن سورج عین مشرق میں طلوع ہوتا ہے اور عین مغرب میں غروب ہوتا ہے۔ ان دونوں دنوں کے لیے دن اور رات کے طول مساوی ہوتے ہیں۔ یعنی سورج کے طلوع سے غروب تک کا وقفہ غروب سے طلوع تک کے وقفے کے برابر ہوتا ہے۔ اسی خاصیت کی بنا پر ان دونوں دنوں کو اعتدالین کہتے ہیں ان دونوں دنوں میں فصل کے خاص شہوار اور جشن منائے جاتے تھے۔ اعتدال ربیع کے بعد سورج کے طلوع ہونے کا مقام بتدریج شمال کی طرف ٹہتا جاتا ہے اور ۲۱ جون کو شمال کی طرف انتہائی نقطے پر پہنچتا ہے۔

اس کے بعد سورج کے طلوع ہونے کا مقام پھر مشرق کی طرف ہٹتا جاتا ہے اور ۲۳ دسمبر کو سورج پھر عین مشرق کی سمت میں طلوع ہوتا ہے۔ ۲۳ دسمبر سے ۲۱ دسمبر تک سورج کے طلوع ہونے کا مقام جنوب کی طرف ہٹتا جاتا ہے اور ۲۱ دسمبر کو اپنے انتہائی نقطہ پر پہنچتا ہے۔ اس کے بعد سورج کے طلوع ہونے کا مقام پھر مشرق کی طرف ہٹتا ہے اور ۲۱ مارچ کو سورج پھر عین مشرق میں طلوع ہوتا ہے۔ اس طرح ایک سال میں سورج کے طلوع ہونے کے مقام کی سمت کا کامل دور ختم ہوتا ہے۔

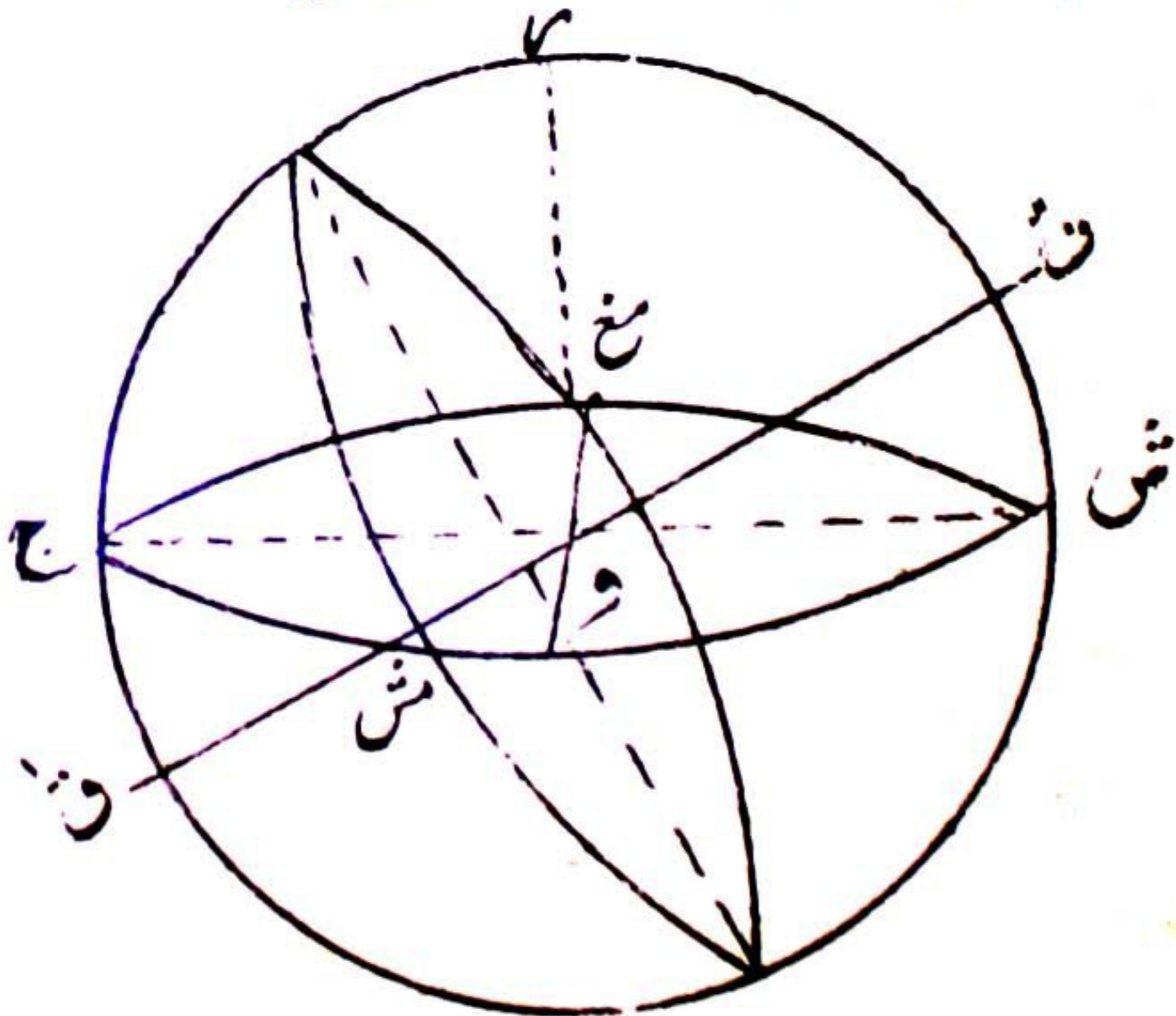
سال کے دوران میں سورج کے طلوع ہونے کی سمت کی تبدیلی کے ساتھ ساتھ سلاخ کے نصف النہاری سایہ کا طول بھی بدلتا جاتا ہے اور سایہ کے طول کی تبدیلی کی دوری مدت بھی ایک سال ہوتی ہے۔

اگر کسی دن کرہ سماوی پر یعنی آسمان پر سورج کے مقام کی تبدیلی کا مشاہدہ احتیاط کے ساتھ کریں تو معلوم ہوگا کہ سورج ایک معین خط (جو محور سماوی کہلاتا ہے) کے گرد یکساں زاوی رفتار سے مشرق سے مغرب کی طرف گھومتا ہے۔ اگر ستاروں کی حرکت کا بھی اسی طرح مشاہدہ کیا جائے تو معلوم ہوتا ہے کہ ستارے بھی اسی محور سماوی کے گرد یکساں زاوی رفتار سے جو سب ستاروں کے لیے ایک ہی ہے، گھومتے ہیں لیکن ستاروں کی یہ زاوی رفتار سورج کی زاوی رفتار سے کسی قدر زیادہ ہوتی ہے کیوں کہ ہم دیکھ چکے ہیں کہ کوئی یوم شمسی یوم

لے کرہ سماوی سے مراد ایک ایسا کرہ ہے جو مشاہدہ کنندہ یا مقام مشاہدہ کو مرکز مان کر کھینچا جائے، کرہ سماوی پر کسی فلکی جرم (ستارہ، سیارہ، سورج، چاند) کا مقام اس نقطے سے تعبیر ہوتا ہے جس پر کرہ سماوی کے مرکز کو فلکی جرم سے ملانے والا خط کرہ سماوی کو قطع کرتا ہے۔

سے چھوٹا ہوتا ہے، اگر مشاہدہ کنندہ میں سے یعنی کرۂ سماوی کے مرکز میں سے محور سماوی پر عمود داہ ایک مستوی سطح کھینچی جائے تو یہ سطح کرۂ سماوی کو ایک کبیر دائرہ پر قطع کرتی ہے جو استوائی سماوی کہلاتا ہے۔ استوائی سماوی مشرقی اور مغرب کے نقطوں میں سے گزرتا ہے۔ کرۂ سماوی پر کا وہ کبیر دائرہ جو شمال اور جنوب کے نقطوں میں سے افقی سطح پر عمود وار کھینچا جائے نصف النہاری دائرہ کہلاتا ہے۔ وہ نقطہ جس پر کرۂ سماوی کے مرکز میں سے افقی سطح پر عمود وار کھینچا ہوا خط کرۂ سماوی سے ملتا ہے راس کہلاتا ہے۔ نصف النہاری دائرہ محور سماوی اور راس میں سے بھی گزرتا ہے۔ محور سماوی کرۂ سماوی کو دو نقطوں پر قطع کرتا ہے جو سماوی قطب کہلاتے ہیں۔

افقی سطح کے ساتھ محور سماوی کا میلان مقام مشاہدہ کے عرض بلد کے مساوی ہوتا ہے۔ اگر استوائی نصف النہاری دائرہ کو E پر قطع کرے اور R راس ہو تو Q E کے مقابل سماوی کرۂ کے مرکز پر بننے والا زاویہ کبھی مقام مشاہدہ کے عرض بلد کے مساوی ہوتا ہے۔



اوپر کی شکل میں و مقام مشاہدہ ہے۔ ش اور ج ترتیب وار شمال اور جنوب کے نقطے ہیں مش اور ج ترتیب وار مشرق اور مغرب کے نقطے ہیں ق اور ق ترتیب وار قطب شمالی اور قطب جنوبی ہیں۔ افقی سطح ش مش ج منحنی ہے اور مقام مشاہدہ کا عرض بلد ش و ق کے مساوی ہوتا ہے ظاہر ہے کہ ش و ق = ع و د

سماوی قطبوں میں سے ایک افق کے اوپر ہوتا ہے اور دوسرا افق کے نیچے۔ شمالی نصف کرہ ارض پر رہنے والوں کے لیے قطب شمالی ق افق کے اوپر کی طرف ہوتا ہے اور جنوبی نصف کرہ ارض پر رہنے والوں کے لیے قطب جنوبی ق افق کے اوپر کی طرف ہوتا ہے اگر کسی دن نصف النہار پر سورج کا مقام س ہو تو ع و س سے اس دن سورج کا میل تعبیر ہوتا ہے یہ میل شمالی یا جنوبی ہوگا یہ موجب اس کے کہ نقطہ س نقطہ ع کے شمال کی طرف ہے یا جنوب کی طرف۔

سال کے دوران میں سورج کے طلوع ہونے کے مقام کی تبدیلی کے ساتھ ساتھ نقطہ س کا مقام بھی بدلتا رہتا ہے، اعتدال ربیع اور اعتدال خریف کے دن سورج نصف النہار کو نقطہ ع پر عبور کرتا ہے۔ یعنی نقطہ س نقطہ ع پر واقع ہوتا ہے۔ اس دن سورج کا میل صفر ہوتا ہے اور کرۂ سماوی پر سورج کا طریق استوا پر منطبق ہوتا ہے۔ اعتدال ربیع (۲۱ مارچ) سے سورج کا میل شمال کی طرف بڑھتا ہے اور ۲۱ جون کو اپنی انتہائی قیمت یعنی $۲۳\frac{1}{2}^{\circ}$ شمال اختیار کرتا ہے۔ ۲۱ جون سے سورج کا شمالی میل گھٹنے لگتا ہے اور ۲۳ ستمبر کو یعنی اعتدال خریف کے دن پھر صفر ہو جاتا ہے۔ ۲۳ ستمبر سے سورج کا میل جنوبی ہوتا ہے اور اس جنوبی میل

کی انتہائی قیمت یعنی ۲۳° جنوب ۲۱ دسمبر کو حاصل ہوتی ہے۔ اس کے بعد جنوبی میل کھٹنا شروع ہوتا ہے اور پھر اعتدال ربیع کے دن سورج کا میل صفر ہو جاتا ہے۔ چونکہ ۲۱ جون کو سورج کا شمالی میل اپنی انتہائی قیمت کو پہنچتا ہے۔ اس لیے یہ دن انقلاب گرما کہلاتا ہے۔ اسی طرح چونکہ ۲۱ دسمبر کو سورج کا جنوبی میل اپنی انتہائی قیمت کو پہنچتا ہے۔ اس لیے یہ دن انقلاب سرما کہلاتا ہے۔

اس موقع پر یہ واضح کر دینا ضروری ہے کہ ان مقاموں کے لیے جن کے عرض بلد ۲۳° شمال اور ۲۳° جنوب کے درمیان ہیں، سال میں دو دن سورج عین راس پر نصف النہار کو عبور کرتا ہے اور اس وقت کسی انتصابی سلاخ کے سایہ کا طول صفر ہوتا ہے۔ ظاہر ہے کہ اس دن جب کہ سورج نصف النہار کو راس پر عبور کرتا ہے۔ سورج کا میل مقام مشاہدے کے عرض بلد کے مساوی ہوتا ہے۔ مثلاً حیدرآباد کا عرض بلد ۲۴° شمال ہے۔ اس لیے اگر حیدرآباد میں افقی سطح پر ایک سیدھی سلاخ قائم کی جائے تو نصف النہار کے وقت اس سلاخ کے سایہ کا طول صفر ہو گا جب کہ سورج کا میل ۲۴° شمال ہو۔۔۔ بجزی جدول سے معلوم ہوتا ہے کہ سورج کا میل ۲۴° شمال بتاریخ ۱۰ مئی اور بتاریخ ۱۰ اگست ہوتا ہے۔ اس لیے یہی دو مطلوبہ دن ہیں۔

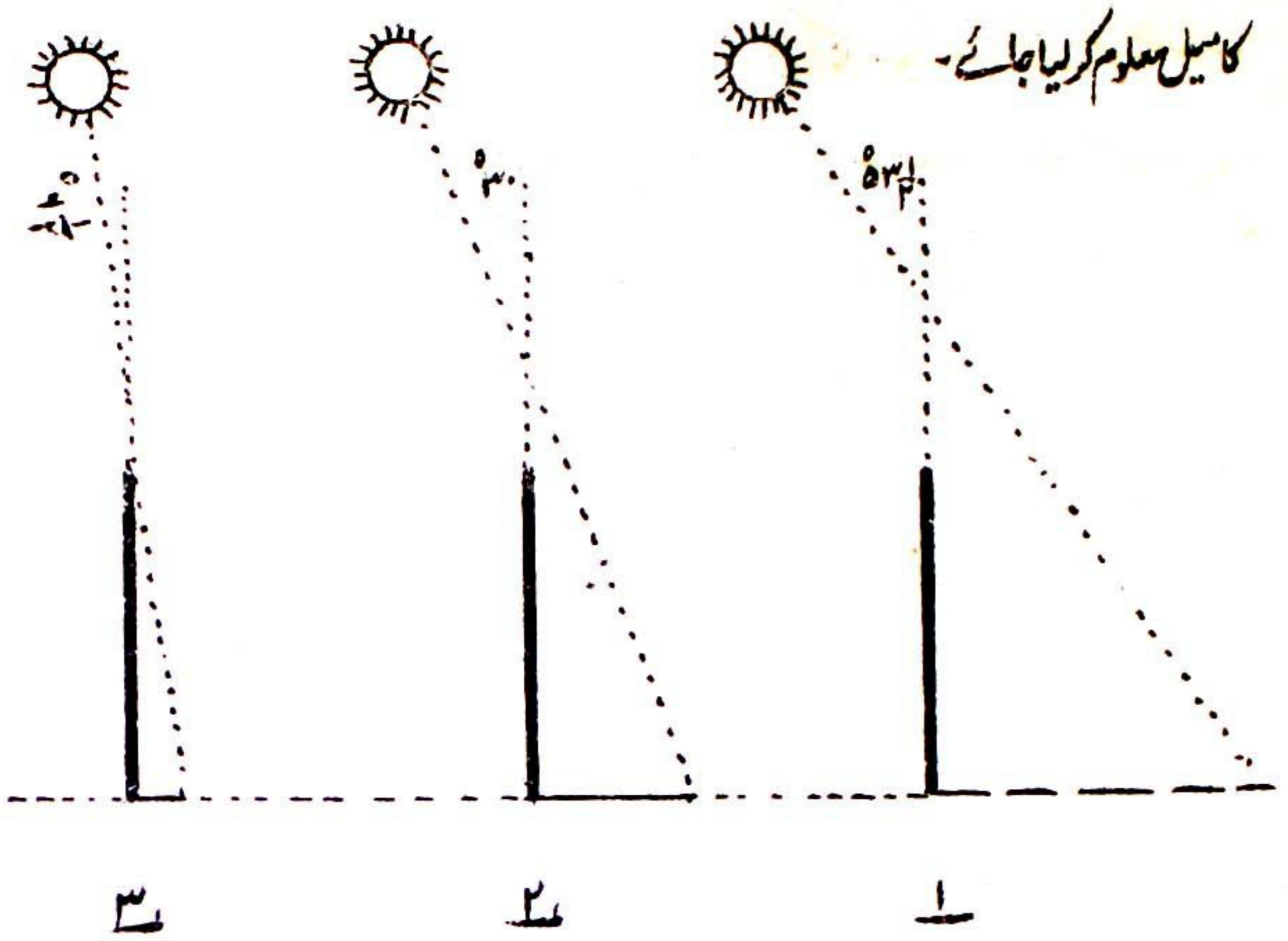
اگر مقام مشاہدہ کا عرض بلد ۲۳° سے بڑا ہو تو سلاخ کے نصف النہاری سایہ کا طول کسی دن بھی صفر نہیں ہو سکتا۔ یہ بھی دیکھا جائے کہ نصف النہار کے سوائے کسی اور وقت کسی سلاخ کے سایہ کا طول کسی مقام پر صفر نہیں ہو سکتا۔

شمالی نصف کرۃ ارض کے ان مقامات کے لیے جن کے ارض بلد $۲۳\frac{1}{2}^{\circ}$ سے بڑے ہیں انتصابی یعنی سیدھی گڑھی ہوئی سلاخ کے نصف النہاری سایہ کا طول اس دن کم سے کم ہوتا ہے جب کہ سورج کا شمالی میل اپنی انتہائی قیمت پر پہنچے یعنی انقلاب گرما (۲۱ جون) کے دن۔ اسی طرح جنوبی نصف کرۃ ارض کے ان مقامات کے لیے جن کے عرض بلد $۲۳\frac{1}{2}^{\circ}$ سے بڑے ہیں۔ انتصابی سلاخ کے نصف النہاری سایہ کا طول انقلاب سرما (۲۱ دسمبر) کے دن کم سے کم ہوتا ہے۔

آسانی سے یہ بھی دیکھا جاسکتا ہے کہ شمالی نصف کرۃ ارض کے مقامات کے لیے انتصابی سلاخ کے نصف النہاری سایہ کا طول انقلاب سرما کے دن بڑے سے بڑا ہوتا ہے اور جنوبی نصف کرۃ ارض کے مقامات کے لیے متناظر تاریخ انقلاب گرما کے دن واقع ہوتی ہے۔

ذیل کی شکلوں میں ایسے مقام کے لیے جس کا عرض بلد ۲۰° شمال ہے، انقلاب سرما کے دن (۳۱) اعتدالیں کے دن اور (۳) انقلاب گرما کے دن انتصابی سلاخ کا سایہ کے نصف النہاری طول دکھائے گئے ہیں۔ یہ عمل بالکل عام ہے۔ اس لیے کسی مقام کے لیے کسی دن انتصابی سلاخ کے نصف النہاری سایہ کا طول معلوم کرنے کے لیے اس کو استعمال کیا جاسکتا ہے بشرطے کہ بحری جدول کی مدد سے مشاہدے کے دن سورج

۱۰ شمالی نصف کرۃ ارض میں رہنے والوں کے لحاظ سے ہم ۲۱ دسمبر کو انقلاب سرما کہتے ہیں۔ جنوبی نصف کرۃ ارض میں رہنے والوں کے لیے ۲۱ دسمبر کو انقلاب گرما واقع ہوتا ہے۔



انقلاب سرما کے دن سورج نصف النہاری دائرے کو ایک ایسے نقطے پر عبور کرتا ہے جو $۲۳\frac{1}{2}^{\circ}$ جنوب کی طرف ہوتا ہے۔ اس لیے سورج کا نصف النہاری راسی فاصلہ $(۳۰ + ۲۳\frac{1}{2})$ یعنی $۵۳\frac{1}{2}^{\circ}$ جنوب ہوتا ہے۔ اعتدالیں کے دن سورج نصف النہاری دائرے کو نقطہ ۰° پر عبور کرتا ہے۔ اس لیے سورج کا نصف النہاری راسی فاصلہ ۳۰° جنوب ہوتا ہے۔ انقلاب گرما کے دن سورج نصف النہاری دائرے کو ایک ایسے نقطے پر عبور کرتا ہے جو $۲۳\frac{1}{2}^{\circ}$ شمال کی طرف ہوتا ہے۔ اس لیے اس دن سورج کا نصف النہاری راسی فاصلہ $(۳۰ - ۲۳\frac{1}{2})$ یعنی $۶\frac{1}{2}^{\circ}$ جنوب ہوگا۔ ان نتیجوں کی بنیاد پر مندرجہ بالا شکلیں ۱ تا ۳ کھینچی گئی ہیں۔ اگر سلاخ کا طول کسی مناسب پیمانے کے لحاظ سے کھینچا جائے اور چاندے کی مدد سے زاویے صحت کے ساتھ بنائے جائیں تو سلاخ کے سلیے کا طول ناپ کر معلوم کیا جاسکتا ہے۔

انتصابی سلاح یا سینار کے نصف النہاری سایے کے طول کے تغیرات کی مدد سے سال کے مختلف موسموں کے تعین کے ساتھ ساتھ عہدِ جبری متاخر (میں انسان دن کے وقت انتصابی

سلاح کے سایے کی لمبوں کی تبدیلی کے مشاہدے سے اپنے کھانے اور کام کے اوقات متعین کرتا تھا۔ جیسے جیسے انسان مویشیوں کی پرورش اور کاشتکاری میں ترقی کرتا گیا۔ اسے وقت کی تقسیم کا احساس بھی زیادہ ہوتا گیا اور اس احساس کی وجہ سے نین اہم نتیجے مرتب ہوئے۔

قدیم قوموں میں موسموں کی تبدیلی اور اناج بونے اور غلہ جمع کرنے کے اوقات کے تعین کا کام قبیلے کے مسمر اور عقل مند افراد یا ایک خاص خاندان کے سپرد کیا جاتا تھا جنھیں فلکی اجرام کے مقام کی تبدیلی کا خاص علم ہوتا تھا۔ اس طرح تقویم ساز کاہنوں کی ایک جماعت وجود میں آئی جس کے سپرد تقسیم عمل کے اصول کے مطابق موسموں کے تعین اور تقویم کی حفاظت کا اہم سماجی کام تھا۔ تقویم ساز کاہنوں کی ایسی جماعت کو موجودہ زمانے کی کسی مذہبی جماعت کے مماثل خیال کرنا فاش غلطی ہے۔ قدیم زمانے میں کاہنوں کا حلقہ اثر صرف مذہب تک محدود نہ تھا بلکہ ان کا اہم ترین فریضہ ایک اقتصادی اور سماجی ضرورت کو پورا کرنا تھا۔ اگرچے کہ اس جماعت کے فرائض میں غلط توہمات اور بے بنیاد عقیدے شامل کیے گئے تاہم باضابطہ اور علمی معلومات کی بنیاد اسی جماعت کے ہاتھوں رکھی گئی۔ ان کے عقائد جو موجودہ معلومات کی روشنی میں بالکل لغو ہیں۔ دراصل مظاہراتِ فطرت کی عقلی توجیہ کی پہلی منظم کوشش کا نتیجہ تھے۔

قدیم انسان نے آسمانوں پر سورج چاند اور ستاروں کے مقاموں کی تبدیلی کے ساتھ خواب اور بیداری، بہار اور خزاں، اناج ہونے اور غلہ جمع کرنے کے اوقات، مویشیوں کے بچے دینے کے موسم اور عورت کی صنعتی زندگی (Sociology) کے ماہانہ دور کا گہرا تعلق پایا۔ چوں کہ عوام کو فلکی اجرام کے مقاموں کی تبدیلی کے قواعد کا علم نہ تھا اس لیے ان کے دلوں میں تقویم ساز کاہنوں کی جماعت کے متعلق یہ خیال پیدا ہوا کہ ان کے وسیلے کے بغیر آسمانی دیوتاؤں کو خوش نہیں کیا جاسکتا۔ اس لیے کاہنوں کے توسط سے آسمانی دیوتاؤں کی خدمت میں نذر اور قربانیاں پیش ہونے لگیں۔ چوں کہ عوام کے اس غلط عقیدے سے کاہنوں کا نہ صرف مالی فائدہ تھا بلکہ قتل اور اشرافی بڑھتا تھا اس لیے انھوں نے اس مقدس رشوت دہی کی خوب تائید کی۔

تقریباً پانچ ہزار سال قبل کلدانی یا خالڈیہ (Chaldean) کے کاہن چاند اور سورج گرہنوں کے متعلق پیش گوئیاں کر سکتے تھے۔ چوں کہ ان کا علم عوام سے بالکل مخفی رکھا جاتا تھا اس لیے وہ اپنی پیش گوئیوں کی بنا پر عوام کو مرعوب کرتے تھے۔ اس طرح فلکی اجرام کا علم صرف ایک خاص جماعت تک محدود رہا اور بجائے خدمت خلق کے لیے کام آنے کے عوام پر ظلم و ستم کا ایک زبردست آلہ بن گیا۔

کئی صدیوں تک یہ تقویم ساز کاہن موسموں کی تعیین اور تقویم کی حفاظت کی اہم سماجی ضرورت کو پورا کرنے رہے اور اسی عرصے میں انھوں نے عددوں کی تحریر کا طریقہ ایجاد کیا۔ مویشیوں کی تعداد محفوظ رکھنے کی کوئی ضرورت نہ تھی۔ اعداد محفوظ رکھنے کی ضرورت اس وقت

پیش آئی جب کہ موسموں کے متعلق باضابطہ مشاہدات ہونے لگے۔ تحریر کے ذریعے پنیاموں کو ایک شخص سے دوسرے تک پہنچانے کا طریقہ بہت بعد کی ایجاد ہے۔ سب سے پہلے موسموں اور دیگر آسمانی مظاہروں کی تاریخوں کو محفوظ رکھنے کے لیے انسان نے مختلف طریقے ایجاد کیے۔ انسان کی سب سے پہلی تحریریں مذہبی تہواروں اور قربانیوں کی یادداشتیں ہیں جو اس نے پتھروں اور لکڑی کے ٹکڑوں پر مختلف نشانوں کی صورت میں کندہ کیں۔

عددوں کے طرزِ تحریر کے قدیم طریقوں میں سے ہر ایک میں انسان کی دس انگلیوں کا اثر پایا جاتا ہے۔ چنانچہ بحیرہ روم کے کنارے جو قدیم قومیں آباد تھیں ان کے رسم الخط میں اعداد ایک تا نو کو انگلیوں کی شکلوں کے ذریعے تعبیر کیا جاتا تھا۔ اس کے بعد فونیقیوں (Phoenicians) نے تجارتی اغراض کے لیے عددوں کی تحریر کا جو طریقہ ایجاد کیا اس میں اکائی کے لیے ایک علامت تھی جو نو تک دہرائی جاسکتی تھی۔ جیسا کہ رومی طرزِ تحریر (I II III . . .) میں کیا جاتا ہے۔ اکائی کی علامت کے علاوہ دس اور سو کے لیے بھی جدا جدا علامتیں تھیں جو حسب سابق دہرائی جاسکتی تھیں جس طرح کہ رومی طرزِ تحریر میں دس کی علامت اور سو کے لیے علامت C استعمال کی جاتی ہے۔ یہ فینیقی (Phoenician) طرزِ تحریر طولانی تھا لیکن اس کے بعد کی ایجادوں سے زیادہ باضابطہ تھا۔ شمالی اٹلی کی ایک قدیم قوم ایٹروسکن (Etruscan) نے فینیقی طرزِ تحریر کو کسی قدر مختصر اور کم طولانی بنانے کے لیے ایک ہاتھ کی گنتی کی طرف رجوع کیا اور رومی ہندسوں کی

طرح اعداد پانچ، پچاس اور پانچ سو کے لیے علامتیں داخل کیں۔ جیسا کہ رومی طرز تحریر میں علامتیں V ، L اور D ہیں ان کے بعد یونانیوں نے عددوں کے اس طرز تحریر کو ترک کر کے حروف تہجی کی مدد سے عددوں کی تحریر کا ایسا طریقہ ایجاد کیا جس میں تمام حروف تہجی استعمال ہوتے تھے عددوں کی تحریر کا یہ طریقہ مختصر تو تھا لیکن اس کی مدد سے معمولی حسابی عمل بھی آلات کی مدد کے بغیر نہیں کئے جاسکتے تھے۔ اس لیے یہ طرز تحریر حساب کی ترقی کی راہ میں سنگ گراں ثابت ہوا۔ نیز حروف تہجی کی مدد سے عددوں کو ظاہر کرنے کی وجہ سے ریاضی میں دو مضراثر داخل ہوئے۔ جن کا ذکر آئندہ ابواب میں کیا جائے گا۔

علم حساب کی قدیم ترین کتابوں میں ایک چینی کتاب ہے جس کا نام کتاب ترتیبات ہے جو تقریباً ۱۱۰۰ سال قبل مسیح لکھی گئی تھی۔ اس کتاب سے معلوم ہوتا ہے کہ چینیوں نے صحیح عددوں کو طاق اور جفت عددوں کی دو جماعتوں میں تقسیم کیا تھا۔ طاق اعداد $۱، ۳، ۵، ۷، ۹، \dots$ میں سے ہر ایک "نر" عدد کہلاتا تھا اور جفت اعداد $۲، ۴، ۶، ۸، \dots$ میں ہر ایک "مادہ" عدد کہلاتا تھا۔ "نر" اور "مادہ" عددوں کے کامل از دوارج سے صحیح عددوں کا سلسلہ $۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، \dots$ حاصل ہوتا ہے۔

یہ اعداد کسی جماعت میں افراد کی تعداد کو ظاہر کرنے کے لیے تو کا نام

The Chinese Book of Permutations

تھے لیکن ان کے ذریعے کسی پیمائش کو تعبیر کرنے میں بہت سی مشکلیں پیش آئی تھیں۔ مثلاً قدیم زمانے کے ریاضی دانوں کے لیے $\frac{1}{2}$ ناقابل فہم عدد تھا کیوں کہ $\frac{1}{2}$ کی قیمت نہ اور مادہ اعداد کے رقوم میں ہرگز نہیں بیان کی جاسکتی۔

عددوں کی اس بظاہر بے معنی تذکیر و تائید پر ہمیں حیرت نہیں ہونی چاہیے کیوں کہ قدیم زمانے میں انسان کو اپنی اور اپنی موشیوں کی نسل کی افزائش سے جو گہری دل چسپی تھی اسی کی وجہ سے موشوں کا حساب رکھنے کے لیے باضابطہ تقویم کی ضرورت پیش آئی اور اس تقویم سازی کا ضمنی نتیجہ عددوں کے طرز تحریر کی ایجاد ہو۔ یہ امر کہ عددوں کی تذکیر و تائید کا یہ رجحان دراصل لنگ پرستی کا نتیجہ تھا۔ اس بات سے بھی ظاہر ہوتا ہے کہ اکثر قدیم تہذیبوں میں عدد تین کو جو مرد کے ظاہری اعضاء تناسل کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے خاص اہمیت حاصل تھی۔ چنانچہ عددوں کی رومی ترقیم میں تین تین کے وقفے کے بعد ترقیم بدل جاتی ہے۔ جیسا کہ ذیل میں دکھایا گیا ہے۔

I	II	III	IV	V
VI	VII	VIII	IX	X
۲	۴	۶	۸	۱۰

عددوں کی ترقیم کے قدیم فینیقی (Padenician) اور سمیری (Sumerlan) طریقوں میں بھی عددوں کی علامتوں کو تین تین

۱۰ وہ عدد ہے جس کو اسی سے ضرب دینے سے عدد دو حاصل ہوتا ہے

کی جماعتوں میں ترتیب دینے کی طرف میلان پایا جاتا ہے۔ عدد چار کے لیے رومی ترقیم IV دراصل پانچ منہنی ایک کو ظاہر کرتی ہے۔ یہ طریقہ بالکل ایسا ہے جیسا کہ چار گھنٹے پچاس منٹ کہنے کی بجائے دس منٹ کم پانچ گھنٹے کہنے کا طریقہ۔ عددوں کی اس غیر سوزوں ترقیم کی وجہ سے رومی ریاضی دان حساب کے آسان طریقوں کی ایجاد سے قاصر رہے۔

انسانی تہذیب کے ارتقا کی تاریخ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ حساب کے آسان اور ذمہ عمل قاعدوں کی ضرورت پیش آنے کے بہت پہلے موزوںوں کی تبدیلیوں کی یادداشت مرتب کرنے کے لیے عددوں کے لیے تحریری علامتیں ایجاد ہوئیں۔ عددوں کی ترقیم کی ایجاد کے وقت انسان کو اس امر کا اندازہ ہی نہ تھا کہ آئندہ چل کر اسے حساب کے آسان قاعدوں کی ضرورت پیش آنے والی ہے۔ جیسے جیسے انسان کو سماجی ضرورتوں کے لیے بڑے بڑے عددوں پر حساب لگانے کی ضرورت پیش آئی تو اس نے ایسے آلات سے مدد لی جن سے اس کے حساب کی کل فضا بالکل مفید اور محدود ہو گئی۔ حساب کے ان قدیم آلات کے جمود نے انسان کی دماغی قوتوں کو ترقی کرنے سے روک دیا۔ سب سے پہلے حساب رکھنے کے لیے غالباً لکڑیوں پر نشانات لگائے جلتے تھے۔ اس منزل سے جب انسان آگے بڑھا تو اس نے کوڑیوں اور سیپیوں سے مدد لینی شروع کی۔ اس طریقے میں یہ بھی سہولت تھی کہ کوڑیوں اور سیپیوں کو کئی دفعہ استعمال کیا جاسکتا تھا۔

کوڑیوں اور سیپیوں کے استعمال سے انسان کی توجہ گنتا لے کی ایجاد کی طرف مبذول ہوئی۔ سب سے پہلے غالباً کسی ہموار سطح پر متعدد تالیماں بنا کر ان میں حساب کی کوڑیاں اور سیپیاں رکھی جاتی تھیں۔

اس کے بعد شاہد کھڑی لکڑیوں پر سوراخ دار کوڑیاں یا سیپیاں پروئی جاتی تھیں۔ آخر میں گنتارا ایک چوکھٹے کی شکل میں بنایا گیا جس میں کئی افقی تار لگے ہوئے ہوتے ہیں اور ہر تار پر دس دس کوڑیاں یا منگے پروئے ہوئے ہوتے ہیں۔ گنتارے کی ان صفوں میں سب سے پہلی صف اکائیوں کو تعبیر کرتی ہے۔ دوسری صف دھائیوں کو تیسری صف سیکڑوں کو اور چوتھی صف ہزاروں کو اور علیٰ ہذا القیاس۔ یہ گنتارا انسان کی قدیم ترین ایجادوں میں سے ہے کئی ہزار قبل مسیح اہل مصر اور اہل چین گنتاروں کے استعمال سے واقف تھے رومیوں کے گنتارے کا استعمال ایٹرو سکین قوم سے سیکھا حضرت مسیح کے زمانے تک گنتارے کے سوا حساب کا کوئی اور آلہ نہ تھا۔

ہمارے لیے اعداد ایسی علامتیں ہیں جن کی مدد سے حساب کے سوال حل کیے جاسکتے ہیں۔ لیکن عدد کی اس تصور سے قدیم یونان کے بہترین ریاضی دان بھی نا آشنا تھے۔ عددوں کی ترقیم کے قدیم طریقوں کا مقصد صرف یہ تھا کہ گنتارے کی مدد سے حاصل کیے ہوئے نتیجوں کو قلم بند کیا جائے۔ انھیں قلم سے حسابی سوال حل کرنے کا خیال تک نہ آسکتا تھا۔ ریاضی کی قدیم تاریخ میں سب سے زیادہ انقلاب انگیز ایجاد علامت کی ایجاد ہے۔ یہ علامت گنتارے کی خالی صف کو تعبیر کرنے کے لیے ایجاد کی گئی۔ ساتویں باب میں وضاحت کے ساتھ یہ بتایا جائے گا کہ علامت صفر کی ایجاد کس قدر اہم ہے اور اس کی مدد سے حساب کے آسان طریقے کس طرح دریافت کیے گئے۔ یہاں ہم عدم محض یعنی صفر کی ایجاد کے متعلق سرسری طور پر صرف دو باتوں کا ذکر کریں گے۔ پہلی بات یہ ہے کہ اگر ہماری ترقیم کا اساس دس ہو تو ہمیں صفر کی علامت کے علاوہ ایک سے نو تک کے عددوں کے لیے نو علامتوں کی ضرورت

پیش آتی ہے اور صرف ان دس علامتوں کی مدد سے کسی بڑے سے بڑے عدد کو تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ بر خلاف اس کے کہ رومی طریقے میں دس کے لیے ایک علامت ، سو کے لیے دوسری علامت اور ہزار کے لیے تیسری علامت کی ضرورت پیش آتی ہے یعنی ہم دس کو چھٹی دفعہ ضرب دیں گے اتنی نئی علامتوں کی ضرورت پیش آئے گی۔ صفر کی ایجاد کے متعلق دوسری اہم بات یہ ہے کہ اس کے ذریعے عددوں کی جو ترقیم حاصل ہوئی ہے اس کی مدد سے صرف کاغذ اور قلم سے تمام حسابی عمل آسانی سے کیے جاسکتے ہیں اور کسی آلے کی ضرورت نہیں پیش آتی۔ اس سلسلے میں یہ واضح کرنا ضروری ہے کہ قدیم زمانے کے ریاضی داں ایسے سماجی ماحول میں پرورش پاتے تھے جس میں بڑے عددوں کے استعمال اور ان پر حساب لگانے کی ضرورت پیش آنے سے قبل ہی عددوں کی ترقیم ایجاد ہو چکی تھی اور اس ترقیم کی وجہ سے حساب لگانے کے لیے وہ گنتارے کے استعمال پر مجبور تھے۔ موجودہ زمانے میں صرف چھوٹے بچوں کو حساب سکھانے کے لیے گنتارا استعمال کیا جاتا ہے۔

عام طور پر دو قسم کے عددوں میں امتیاز کیا جاتا ہے۔ پہلی قسم میں اسم عدد ہوتے ہیں جیسے ایک، دو، تین وغیرہ جو کسی جماعت یا گروہ میں افراد کی تعداد کو تعبیر کرتے ہیں۔ دوسری قسم میں صفت عدد ہوتے ہیں۔ جیسے پہلا، دوسرا، تیسرا وغیرہ جن سے کسی چیز کا ایک گروہ میں محل وقوع ظاہر کیا جاتا ہے۔ عددوں کی ان دو قسموں کا فرق اس قدر اہم نہیں ہے جتنا کہ ایک اور فرق جو ساعت شماری کے سلسلے میں پیش آتا ہے۔ اب ہم عددوں کے اس نئے استعمال کا مختصر ذکر کریں گے۔ جب ہم کہتے ہیں کہ ایک گلے میں سو بھیریں ہیں تو ہمارا مطلب یہ ہوتا ہے کہ اگر ان بھیروں کو ایک صف میں

کھڑا کیا جائے تو آخری بھڑ سوویں ہوگی۔ قدیم زمانے میں موسموں کی یادداشت بھی گنتی کی چھڑی پر نشانات کے ذریعے بالکل اسی طرح رکھی جاتی تھی جس طرح ایک گلے کی بھڑوں کو ایک صف میں کھڑا کیا جاتا تھا۔ جب ہم بھڑوں کی گنتی کرتے ہیں تو ہم فرض کر لیتے ہیں کہ گنتی کی خاطر اس گلے کی سب بھڑیں یکساں ہیں۔ گو ہم جانتے ہیں کہ قدیم، عمر میں، وزن میں اور اون کی مقدار میں کوئی ایک بھڑ بھی دوسری کی مانند نہیں ہے۔ اس طرح قدیم تقویم میں وقت کی ایسی تقسیم پر مبنی نہ تھیں جن کے تمام وقفے مساوی ہوں۔ قدرتی مشاہدوں کی مدد سے واقعات کی ترتیب کو قلم بند کیا جاتا تھا۔ مثلاً مختلف دنوں کا شمار کیا جاتا تھا۔ مگر اس بات کا خیال نہیں رکھا جاتا تھا کہ یہ مختلف دن بالکل ایک دوسرے کے معادل یا مساوی ہیں یا نہیں۔ جس طرح کہ ایک بھڑ کو دوسری بھڑ کی مانند خیال کیا جاتا تھا۔ اسی طرح ایک دن کو دوسرے دن کی مانند یا مساوی مان لیا جاتا تھا۔ اب یہ غور سے دیکھا جائے کہ اس بیان میں کہ ایک سال میں ۳۶۵ دن ہوتے ہیں اور اس بیان میں کہ ایک دن اور رات میں ۲۴ گھنٹے ہوتے ہیں۔ زمین آسمان کا فرق ہے، پہلے بیان میں محض گنتی ظاہر ہوتی ہے اور دوسرے بیان سے یہ بتانا مقصود ہے کہ دن اور رات کی تقسیم ریت گھڑی یا کسی دوسرے مناسب آلے کی مدد سے ۲۴ مساوی حصوں میں کی گئی ہے اس تشریح سے معلوم ہوتا ہے کہ جب انسان نے دن اور رات کی تقسیم ریت گھڑی یا سلاخ کے سایے کے طول یا کسی اور آلے کی مدد سے کرنی شروع کی تو اس نے عدد کا ایک نیا استعمال دریافت کیا۔ غور سے دیکھا جائے تو ایک گھنٹہ اور دوسرے گھنٹے میں کوئی ایسی قدرتی حد فاصل نہیں ہے۔ جیسے ایک

دن اور دوسرے دن میں یا ایک اعتدال ربیع اور دوسرے اعتدال ربیع میں ہر یعنی کسی قدرتی واقعہ کی بنا پر ایک گھنٹے کو دوسرے گھنٹے سے جدا نہیں کیا جاسکتا، صرف ایک مصنوعی پیمانے کی بنا پر ہم وقت کو گھنٹوں اور منٹوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ گھنٹے اور منٹ ایک مصنوعی پیمانے پر کی پیمائشوں کو تعبیر کرتے ہیں۔ ان پیمائشوں میں صرف اس قدر صحت ہو سکتی ہے جتنی پیمانہ مرتب کرنے میں اور پیمانے پر نمائندہ (POINTER) کے مقام کا اندازہ لگانے میں ہو سکتی ہے۔ جیسے جیسے پیمانے کی درجہ بندی اور نمائندے کے مقام کے تعین میں صحت حاصل ہوگی ویسے ہی ہماری پیمائش میں بھی صحت حاصل ہوگی۔

(۳) ایک دریا ہو یا مقام کس سمت میں واقع ہے؟

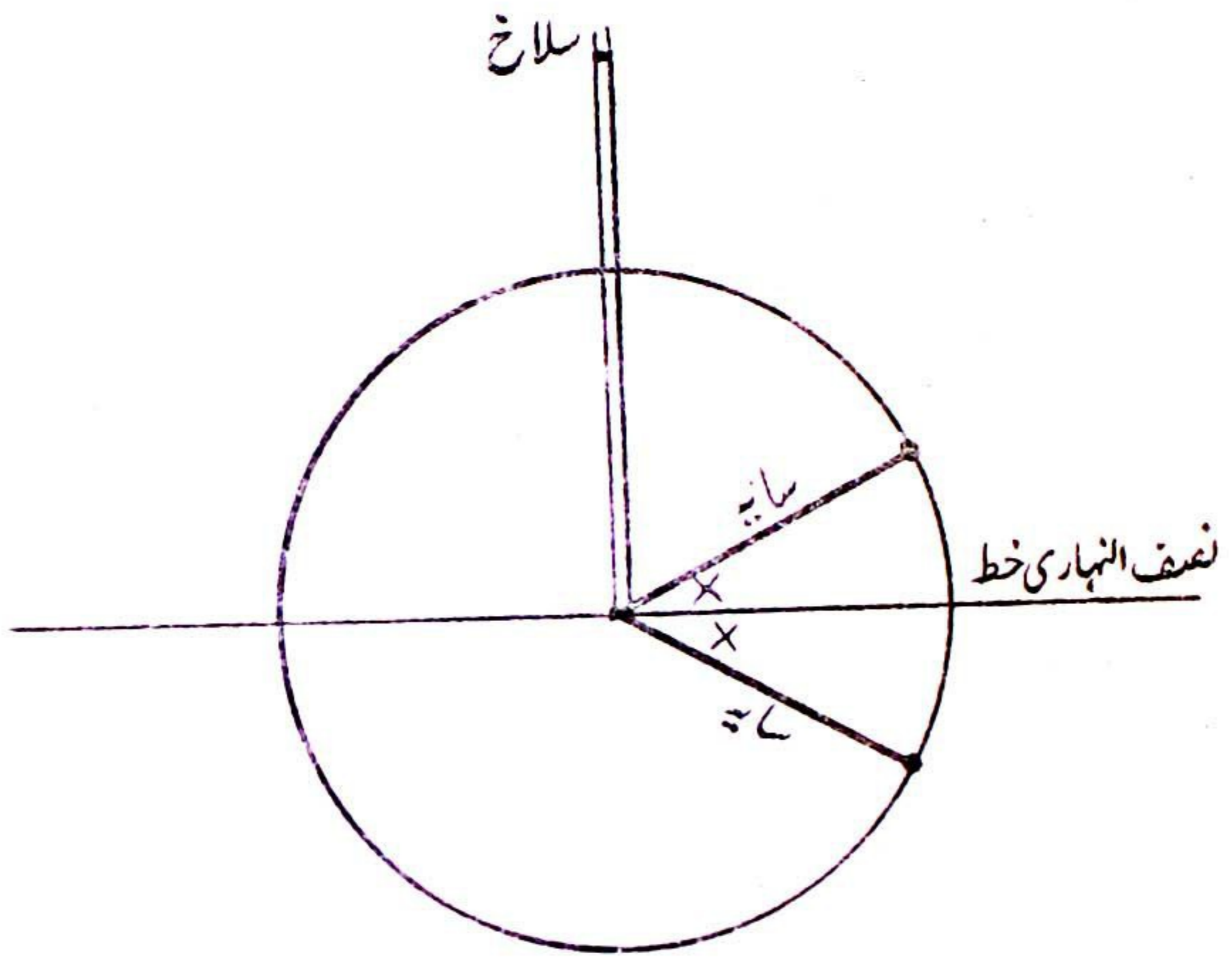
مستقل شہری زندگی کے لیے وقت کا شمار اولین شرط تھی اور وقت شماری ہی کے سلسلے میں انسان کو زیادہ صحیح پیمائش کی ضرورت پیش آئی۔ یہ امر تقریباً یقینی ہے کہ انسان نے طویل اور فاصلہ کی پیمائش سے بہت پہلے ہی سمت کی پیمائش شروع کر دی تھی۔ دریائے نیل کے کنارے پر مستقل شہری زندگی کے بالکل ابتدائی زمانے میں ایک سال میں دنوں کی تعداد کا تعین شعرائی یمانی کے شمسی طلوع (HELIACAL RISING) کی مدد سے لیا گیا تھا۔ کسی خاص ستارے کے طلوع کا مشاہدہ کرنے کے لیے یہ ضروری ہے کہ اس کے طلوع ہونے کے مقام کی سمت معلوم کی جائے۔ اس بات کے باور کرنے کی قوی دلیلیں موجود ہیں کہ عہدِ حجری جدید میں، جب کہ کسی قابل ذکر شہری زندگی کی

شمسی طلوع سے مراد ستارے کا وہ طلوع جو طلوع شمسی کے عین قبل واقع ہو۔

ابتدا بھی نہ ہوئی تھی، انسان نے نائٹراشیدہ پتھروں سے ایسے نشان بنائے تھے جن سے آسمانی مظاہروں کی سمتوں کا تعین ہو سکتا تھا۔ کسی جسم کی سمت کے تعین کے لیے ضروری ہے کہ اسے ایک ثابت نقطے سے دیکھا جائے اور اس کے محل وقوع کا تعین ایک ثابت خط کی مدد سے کیا جاسکے۔ اس ضرورت کو پورا کرنے کے لیے تقویمی تہذیبوں کے وجود میں آنے سے بہت پہلے انسان نے دو ثابت خط متعین کیے تھے جن میں سے ایک نصف النہاری خط ہے جو شمال اور جنوب کے نقطوں میں سے گزرتا ہے اور دوسرا اس نصف النہاری خط پر عمود وار کھنچا ہوا خط ہے جو مشرق اور مغرب کے نقطوں میں سے گزرتا ہے۔ ان دو ثابت خطوں کے تعین سے ریاضی کی بنیاد قائم ہوئی جو سماجی زندگی کے لیے ضروری اور کارآمد تھی۔

شمال اور جنوب کے نقطوں میں سے گزرنے والے نصف النہاری خط کا انتخاب اس لیے کیا گیا تھا کہ کسی دن کسی انتصابی سلاخ کے سایے کا طول سب سے چھوٹا ہوتا ہے جب کہ سایہ اس خط پر ہو۔ نیز نصف النہاری دائرے پر وہ سماوی محور واقع ہے جس کے گرد تمام ستارے گھومتے ہوئے نظر آتے ہیں۔ اہرام مصر کی تعمیر کے زمانے میں ستارہ α - DRACONIS شمالی قطب سماوی کے گرد ایک چھوٹے دائرے میں (جس کا نصف قطر تقریباً 2° تھا) گھومتا تھا۔ ہزار ہا سال میں ستاروں کے لحاظ سے قطب سماوی کے مقام میں خفیف سی تبدیلی ہوئی ہے اور موجودہ زمانے میں قطب سماوی کی شناخت قطب تارے کی مدد سے ہو سکتی ہے جو قطب سماوی سے صرف ایک درجے کے فاصلے پر ہے۔ ہمارے پاس اس امر کی اثری شہادتیں موجود ہیں کہ قدیم زمانے میں انتصابی سلاخ کے

نصف النہاری سایے کی سمت یعنی شمال اور جنوب میں سے گزرنے والے خط کی سمت ذیل کے طریقے سے معلوم کی جاتی تھی۔ ریت یا نرم زمین پر ایک سیدھی چھڑی گاڑ دی جاتی تھی یا ایک ستون بنایا جاتا تھا۔ اس چھڑی یا ستون کے پائیں کو مرکز مان کر ایک ڈوری کی مدد سے ایک دائرہ کھینچا جاتا تھا۔ ایک دن میں صرف دو وقت چھڑی یا ستون کے سایے کا سرا اس دائرے پر واقع ہوتا ہے۔ سایے کے سرے کے ان مقامات کو دائرے



کے مرکز سے ملانے والے خطوں کے درمیانی زاویے کا نصف یعنی اس زاویے کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرنے والا خط شمال اور جنوب کے نقطوں میں سے گزرنے والا خط ہوتا ہے۔ اس نصف النہاری خط پر عمود وار کھنچا ہوا خط مشرق اور مغرب کے نقطوں میں سے گزرنے والا خط ہوتا ہے۔ مشرق اور مغرب کے نقطوں میں سے گزرنے والے خط کا تعین سورج کے طلوع ہونے کی انتہائی شمالی اور انتہائی جنوبی سمتوں کی مدد سے بھی

آسانی سے کیا جاسکتا ہے۔ اگر انقلابِ گرما اور انقلابِ سرما کے وقت سورج کے طلوع ہونے کی سمتیں معلوم کی جائیں تو ان سمتوں کے درمیانی زاویے کا تانسف مشرق اور مغرب کے نقطوں میں سے گزرنے والا خط ہوتا ہے اور اس طرح سے وہ سمتیں حاصل ہوتی ہیں جن میں اعتدالیں کے دن سورج طلوع اور غروب ہوتا ہے۔ قدیم زمانے میں زرخیری کا تہوار اعتدالِ ربیع کے دن بڑی شان و شوکت سے منایا جاتا تھا۔ نیز قدیم قبروں کی سمتوں سے بھی اس بات کا پتا چلتا ہے کہ قبروں کی تعمیر میں مشرق اور مغرب کی سمت کو ملحوظ رکھا جاتا تھا۔

اسٹون ہینج (STONEHENGE) اور دیگر مقاموں پر ایسے قدیم آثار موجود ہیں جن کی عدد سے ہزار ہا سال پہلے انقلابِ گرما کے دن سورج کے طلوع ہونے کی سمت کا تعین کیا جاتا تھا۔ اس غرض کے لیے دو ستون، جن کی بلندیاں مختلف ہوں، اس طرح قائم کیے جاتے تھے کہ ان کے سروں کو ملانے والے خط کی سمت سے انقلابِ گرما کے دن سورج کے طلوع ہونے کی سمت ظاہر ہوتی تھی۔ اسی طرح انقلابِ سرما کے دن کے لیے بھی سورج کے طلوع ہونے کی سمت کا تعین کیا جاتا تھا۔

اُس زمانے سے بہت قبل جس کے تہذیبی کارناموں کے متعلق ہمیں تحریری شہادتیں ملتی ہیں، تقویم ساز کاہن ستاروں کے نصف النہاری مرور کی سمتوں سے اچھی طرح واقف تھے۔ مصر کے سب سے بڑے ہرم کا (جو تقریباً ۲۸۰۰ سال قبل مسیح تعمیر ہوا تھا) جنوبی رخ اس طرح بنایا گیا تھا کہ مرور کے وقت شعرائی یمانی کی شعاعیں ہرم کے جنوبی رخ پر عمود وار ہوتی تھیں اور شعرائی یمانی اس روشن دان کی عین سیدھ میں

دکھائی دیتا تھا جو جنوبی رُخ سے فرعون کی شاہی آرام گاہ تک بنایا گیا تھا۔ ہرم کا صدر دروازہ اور ایک اور روشن دان اس طرح بنائے گئے تھے، نچلے سرور کے وقت عہ۔ ڈریکونس (DRACONIS - بے) ان کی سمت میں دکھائی دیتا تھا۔ ان تعمیری کمالات کی حیرت انگیز صحت دراصل صدیوں کی تحقیق اور مشاہدے کا نتیجہ تھی اور یہ اس بات کا بین ثبوت ہے کہ سمت کے تعین کی حقیقی ضرورت کے تحت زاویے کی پیمائش وجود میں آئی۔

قدیم مذہبی روایتوں کے مطابق کرہ سماوی محور سماوی کے گرد گھومتا ہے اور تمام اجرام فلکی اس کرہ کے اندر متوازی دائروں میں گردش کرتے ہیں۔ ہر روز سورج کے لحاظ سے چاند تھوڑا سا پیچھے کی طرف پھسل جاتا ہے جس کی وجہ سے اس کی ہیئتوں کی تبدیلی کے ساتھ ساتھ اس کے طلوع اور غروب کے وقت بھی پیچھے ہٹتے جاتے ہیں۔ نیز ستاروں کے لحاظ سے سورج بھی کرہ سماوی پر ایک ایسے دائرے پر پھلتا ہے جو استوائی سماوی کے ساتھ ایک مستقل زاویہ ($23\frac{1}{4}$) بناتا ہے۔ سورج کی اس حرکت کی وجہ سے ستارے سابقہ دن کی نسبت ذرا پہلے طلوع ہوتے ہیں۔ استوائی سماوی کے لحاظ سے سورج کے اس مائل طریق (یعنی طریق الشمس) کی مدد سے سال کے دوران میں سورج کے نصف النہاری ارتفاع کی تبدیلی کی توجیہ کی جاسکتی ہے۔ سال کے طول کے تعین کے لیے نہایت صحیح پیمائشوں کی ضرورت ہوتی ہے۔ اس لیے ہمیں اس بات پر تعجب نہ ہونا چاہیے کہ سال کے طول کی ابتدائی پیمائشیں کچھ زیادہ صحیح نہیں تھیں۔ جوں جوں وقت اور زاویے کی پیمائش کے طریقے زیادہ صحیح ہوتے گئے سال کے طول کا تعین بھی زیادہ صحت کے ساتھ ہونے لگا۔

پہلے پہل اہل بابل کے ہاں ایک سال صرف ۳۶۰ دن کا ہوتا تھا اور بعد میں جب اس غلطی کا احساس ہوا تو انھوں نے تیس تیس دن کے بارہ مہینوں کے سال میں تہواروں کے پانچ دن کا اضافہ کر کے سال میں ۳۶۵ دن مقرر کیے۔ سال کی ابتدائی پیمائش یعنی ۳۶۰ دن کی بنا پر اہل بابل نے طریقِ شمس کو ۳۶۰ مساوی حصوں میں تقسیم کیا اور اس طرح ایک درجے کا تخیل وجود میں آیا۔ سورج اپنے طریق پر ستاروں کے لحاظ سے روزانہ تقریباً ایک درجہ مغرب سے مشرق کی طرف حرکت کرتا ہے۔

حضرت مسیح سے دو ہزار سال قبل ہی بحیرہ روم کے کناروں پر بسنے والی متمدن قومیں کرۂ سماوی پر طریقِ شمس اور استوا کے درمیانی زاویہ (یعنی طریقِ شمس کے میلان) سے واقف تھیں۔ قدیم آثار سے یہ پتا چلتا ہے کہ اہل بابل اصطلاح کی تقسیم کے آلات اور بالکل ابتدائی قسم کے سمت پیمانوں سے کام لیتے تھے اور دورِ بین کی ایجاد کے زمانے تک صرف انھی آلات سے ہی مشاہدے کیے جاتے تھے۔ ان ابتدائی آلات کی مدد سے انھوں نے مقامی آسمان کا نقشہ تیار کیا تھا۔

اوپر کے بیان سے یہ ظاہر ہو گیا ہو گا کہ کس طرح سمت کی پیمائش سے عددوں کے استعمال کا ایک نیا طریقہ دریافت ہوا۔ ابتدا میں عددوں کے ذریعے کسی گروہ کے افراد کی تعداد کو ظاہر کیا جاتا تھا اور اس عمل میں پوری صحت ممکن تھی۔ لیکن کسی پیمائش میں جو آلات کی مدد سے کی جائے کسی طرح پوری صحت حاصل نہیں ہو سکتی۔ دائرے کے محیط کو، ممکنہ احتیاط کے باوجود، ۳۶۰ بالکل مساوی حصوں میں ہرگز تقسیم نہیں کیا جاسکتا۔ صحت صرف اس حد تک حاصل ہو سکتی ہے جس کی ہمارے آلات میں

گنجائش ہے۔ نیز سمت کی پیمائش میں ایک اور مشکل یہ ہے کہ اکثر اوقات مطلوبہ سمت ہمارے آلہ کے کسی نشان پر پوری طرح منطبق نہیں ہوتی بلکہ دو نشانوں کے درمیان کہیں نہ کہیں ہوتی ہے اور زاویے کا تعین اس نشان کے ذریعے کیا جاتا ہے جس سے یہ سمت قریب تر ہے یعنی ہر صورت میں جب کہ پیمانہ استعمال کیا جائے صرف تقریبی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔ البتہ آلات کی درجہ بندی میں صحت کے اضلاع کے ساتھ ساتھ پیمائش میں خطا بھی کم ہوتی جاتی ہے۔ عددوں کے استعمال کی یہ دقت اور پیچیدگی نہ صرف زاویے کی پیمائش میں بلکہ اس باب کے دیگر سوالوں کے جوابوں میں بھی پیش آئے گی۔

۴۔ کسی مقام کا فاصلہ یا کسی خط کا طول کیا ہے؟

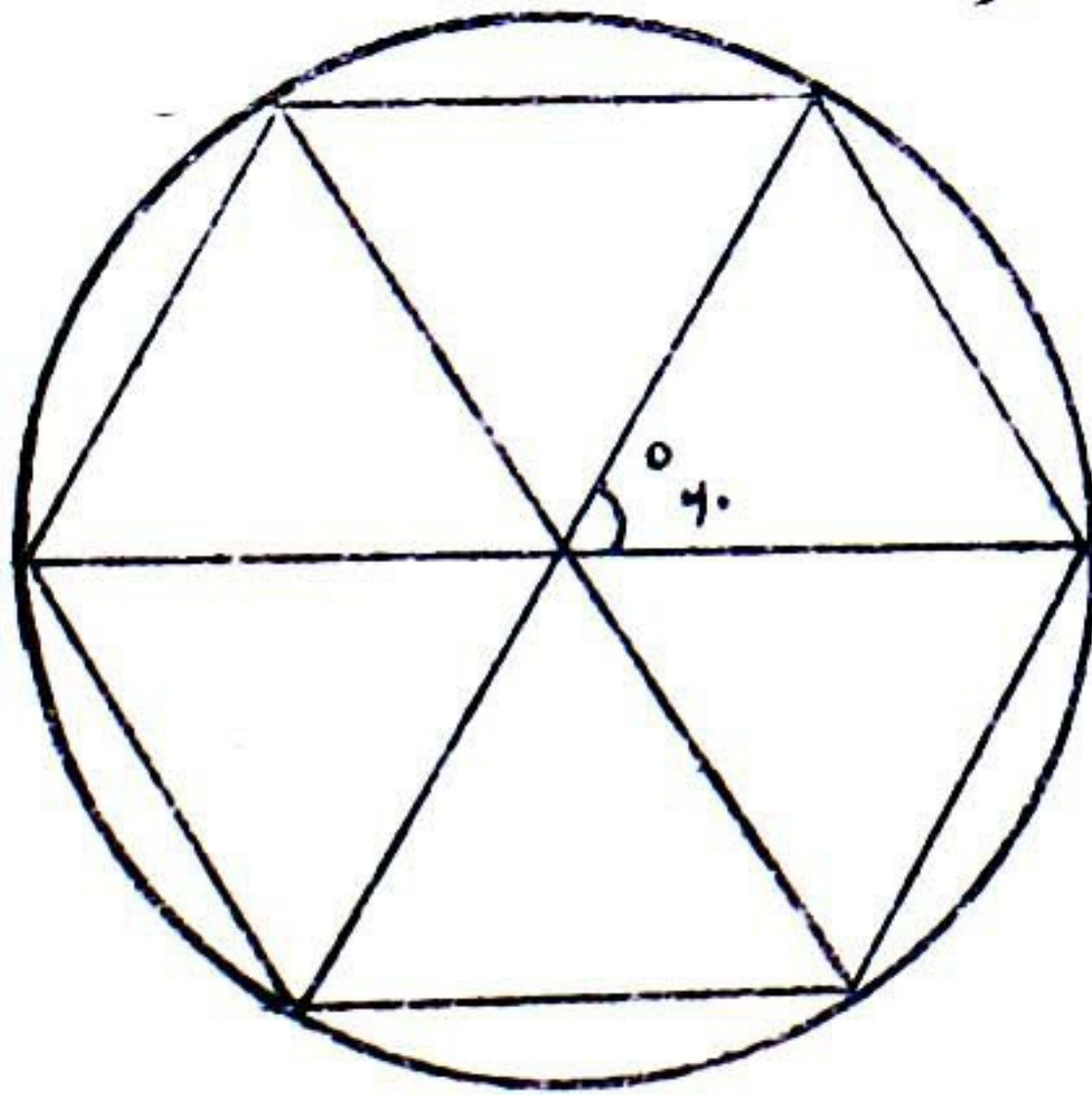
انسان نے اپنی سکونت کے قابل گھر بنانے سے بہت پہلے اپنے آسمانی ہمانوں (یعنی دیوتاؤں) اور ان کے ارضی نمائندوں (یعنی کاہنوں) کے لیے نہایت عالی شان محل (یعنی مندر) بنائے۔ اجرام سماوی کے مشاہدے کے لیے رصدگاہوں اور مہر کے فرعونوں کی محفوظ کردہ لاشوں کے لیے عظیم الشان مقبروں کی تعمیر کے لیے فاصلے کی نہایت صحیح پیمائش کی ضرورت تھی۔ جیولس اور نیرو نامی ہرموں کی تعمیر ایک ہی ہندسی خاکہ کے مطابق ہوئی ہے اور یہ دونوں ہرم آپس میں متشابه ہیں۔ ان ہرموں کی تعمیر کی حیرت انگیز صحت کی وجہ یہ ہے کہ انسان کی عمرانی اور سماجی ضرورتیں ان سے وابستہ تھیں۔ چونکہ وہ آسمانی ہمانوں کے قیام کے لیے بنائے گئے تھے اس لیے ضروری تھا کہ نہایت صحت کے ساتھ ان کی سمت کا تعین کیا جائے۔ سمت کے تعین کے لیے زاویوں کی پیمائش کے آلات ایجاد کیے گئے لیکن کئی صدیوں تک طول کی پیمائش کے لیے نہایت بھونڈے جسمانی ناپ استعمال ہوتے

رہے۔ چنانچہ سامیوں کے ہاں طول یا فاصلے کی پیمائش ہاتھوں سے (یعنی کہتی سے نچ کی انگلی کے سرے تک کے فاصلے سے) ہوتی تھی جیسا کہ اب بھی دیہات میں کیا جاتا ہے۔ معمولی اغراض کے لیے طول کی یہ غیر معین اکائی (یعنی ہاتھ) جو مختلف افراد کے لیے مختلف ہوتی ہے کافی تھی لیکن مندروں کی تعمیر کے لیے صحت کے ایک اعلیٰ معیار کی ضرورت تھی۔ اس لیے مندروں کی تعمیر میں سایوں کی مدد سے بلندیاں اور فاصلے معلوم کیے جاتے تھے اور یہ طریقہ خاص طور پر مصر جیسے مقام کے لیے، جہاں دن میں اکثر دھوپ رہتی ہے، آسانی کے ساتھ استعمال کیا جاسکتا تھا۔ کسی عمارت یا مینار کی بلندی اس کے سایے کے طول اور سورج کے ارتفاع کی مدد سے مثلث کو استعمال کر کے محسوب کی جاتی تھی۔

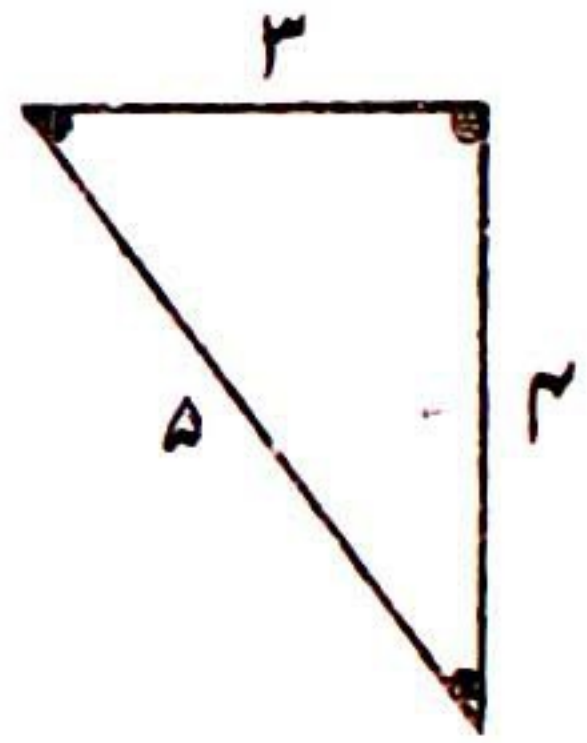
ریاضی کی ابتدائی تحقیقات اسی قسم کے سوالوں سے تعلق رکھتی ہیں۔

بابلی تہذیب کے ابتدائی زمانے میں یہ معلوم تھا کہ ایک دائرے کے اندر ایسی چھ ضلعی شکل بنائی جاسکتی ہے جس کے ہر ضلع کا طول دائرے کے نصف قطر کے برابر ہو اور اس شکل کے ہر ضلع کے مقابل دائرے کے مرکز

پر 90° کا زاویہ بنتا ہے۔



دُنیا کے مختلف حصّوں کے قدیم آثار سے اس بات کا پتا چلتا ہے کہ قائمہ زاویہ بنانے کے لیے یہ ہندسی خاصیت استعمال کی جاتی تھی کہ اُس مثلث میں جس کے ضلعوں کے طول ۳، ۴، ۵ کے متناسب ہوں سب سے بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔ ایک روایت کے مطابق قدیم مصر میں قائمہ زاویہ بنانے کے لیے ایک رستی پر چار گڑھیں اس طرح لگائی جاتی تھیں کہ رستی کے حصّوں کے طول ۳، ۴ اور ۵ کے متناسب ہوں۔ اب اگر پہلی اور چوتھی گڑھ کو ملا کر رستی کے تینوں حصّوں کو کھوٹیوں کے ذریعے تان کر رکھا جائے تو حاصل ہونے والے مثلث میں سب سے بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔



اس سے معلوم ہوتا ہے کہ تقریباً تین ہزار سال قبل مسیح اہل بابل اور اہل مصر قائمہ الزاویہ مثلث کے ضلعوں کے طولوں کے باہمی رشتے کی ایک خاص صورت سے ضرور واقف تھے۔ قائمہ الزاویہ مثلث کی مشہور خاصیت یہ ہے کہ اس کے سب سے بڑے ضلع پر کا مربع بقیہ دو ضلعوں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔ اور اس کا عکس بھی درست ہے۔ یعنی اگر کسی مثلث میں سب سے بڑے ضلع پر کا مربع بقیہ دو ضلعوں پر کے مربعوں

کے مجموعے کے برابر ہو تو سب سے بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔ اسی عام مسئلے کی ایک خاص صورت کی مدد سے یعنی ۳، ۴، ۵ کے متناسب ضلعوں والے مثلث کی مدد سے قدیم مصر میں قائمہ زاویہ بنایا جاتا تھا۔ اسی طرح اگر ایک مثلث کے ضلعوں کے طول ۵، ۱۲، ۱۳ کے متناسب ہوں تو سب سے بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔

اہلِ مصر اور اہلِ بابل کو اس بات کا بھی علم تھا کہ کسی دائرے کے محیط کے طول کو دائرے کے قطر کے ساتھ ہمیشہ ایک مستقل نسبت ہوتی ہے۔ اس مستقل نسبت کو ہم یونانی حرف π (حیط) سے تعبیر کرتے ہیں۔ اس کی تقریبی قیمت $\frac{22}{7}$ یا 3.14159 ہے۔ اہلِ بابل π کی قیمت ۳ لیتے تھے جو زیادہ صحیح نہیں ہے۔ حکیم اہمس کے مخطوطہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ تقریباً ۱۶۰۰ ق۔ م میں π کی قیمت ۳.۱۶ لی جاتی تھی۔

ماسکو کے مخطوطہ میں کرہ کے رقبہ کے لیے جو ضابطہ دیا گیا ہے اس کی مدد سے π کی قیمت ۳.۱۴ حاصل ہوتی ہے۔ پس معلوم ہوا کہ دائرے کی مساحت کے لیے اہلِ مصر جو ضابطہ استعمال کرتے تھے اس میں ایک فی صدی سے بھی کم خطا تھی۔

چونکہ ۹۰° کا زاویہ بنانے کا طریقہ نہایت آسان اور قدیم ہے اس لیے ایک دن کے ۲۴ ویں حصے یعنی گھنٹے کو وقت کی اکائی مقرر کرنے کی ایک نہایت واضح توجیہ سمجھ میں آتی ہے۔ سایے کی سمت کی مدد سے دن کو ایسے حصوں میں تقسیم کرنے کے لیے جن کی کوئی طبعی تعیین نہیں ہو سکتی یہ ضروری ہے کہ ایسا زاویہ منتخب کیا جائے جو دھوپ گھڑی کی درجہ پندی میں اکائی کے طور پر آسانی کے ساتھ کام آسکے۔ اگر سورج کی ظاہری

حرکت کو ملحوظ رکھا جائے تو معلوم ہوتا ہے کہ سورج محورِ سماوی کے گرد ایک گھنٹے میں ۱۵° میں سے گھومتا ہے اور ۶۰° درجے کے زاویے کو چار مساوی حصوں میں تقسیم کرنے سے ۱۵° کا زاویہ حاصل ہوتا ہے۔

فنِ تعمیر کی ترقی کے ساتھ ساتھ قائمہ زاویہ کی اہمیت بھی بڑھتی گئی اور مختلف زاویوں کی قیمتیں قائمہ زاویہ کی رقوم میں بیان ہونے لگیں۔ فنِ تعمیر کی تمام کاری گری مندروں تک ہی محدود رہی اور مندروں کے کاہنوں کی تمام علمی اور ذہنی قابلیت صرف اسی کام کے لیے وقف ہو گئی۔ لیکن جوں جوں فنِ تعمیر پیچیدہ اور تعمیر کا سلسلہ وسیع ہوتا گیا اس بات کی ضرورت محسوس ہوئی کہ تقسیم عمل کے اصول کے مطابق کاہن اس کام کو اپنے غلاموں کے سپرد کریں اور رفتہ رفتہ اس زمانے کا سب سے بڑا ذہنی شاہ کار (یعنی زاویے کی پیمائش) کاری گری غلاموں کا مخصوص ورثہ بن گیا۔ بد قسمتی سے یہ غلام جو صرف کاری گری گرتھے لکھنے پڑھنے سے محض نا آشنا تھے۔ ان کا علم صرف اکتسابی تھا اور یہ کاری گری گراپنے شاگردوں کو اپنا علم اور ٹھہر صرف سینہ بہ سینہ منتقل کرتے تھے۔ چوں کہ ان کا علم تحریر کے ذریعے محفوظ نہ ہو سکا اور صرف ایک مخصوص جماعت کا ورثہ بنا رہا اس لیے علم کا یہ گراں قدر ذخیرہ بعد کی نسلوں تک نہیں پہنچا اور فنا ہو گیا۔ ان کاری گروں کے حیرت انگیز تعمیری کمالات کا پتا صرف ان کی صناعتی کی یادگاروں سے چلتا ہے۔ ان کے تعمیری شاہ کاروں کو دیکھ کر ہمیں ان کی ریاضی دانی کا اعتراف کرنا پڑتا ہے اور یہ بھی ماننا پڑتا ہے کہ اہل مصر فنِ تعمیر، مساحت اور علم حساب میں بعد کے یونانیوں سے بہت آگے بڑھے ہوئے تھے۔

اوپر کے بیان سے یہ واضح ہوتا ہے کہ طؤل اور فاصلے کی پیمائش کے لیے کوئی معین اکائی موجود نہ تھی لیکن طؤلوں، بلندیوں اور فاصلوں کو محسوب کرنے کے لیے زاویے کی پیمائش اور مثلث کی خاصیتوں سے مدد لی جاتی تھی۔

۵۔ کسی دیبے ہونے خطہ ارضی کی وسعت کیا ہے؟

کاشت کار شروع ہی سے زمین دار، حکم ران طبقہ اور کاہنوں کی لوٹ مار کا تختہ مشق رہا ہے۔ چنانچہ مصر میں بھی دریائے نیل کی وادی میں جہاں انسانی تمدن نے جنم لیا بڑے بڑے عظیم الشان مندر اور مقبرے تعمیر کرنے کے لیے اور فراعنہ مصر اور کاہنوں کے خزانوں کو دولت سے معمور کرنے کے لیے غریب کاشت کار پر اس کی زمین کے رقبے کے لحاظ سے مختلف قسم کے محصول لگائے گئے۔ مورخ ہیرودوس کا بیان ہے کہ چوں کہ دریائے نیل میں اکثر طغیانی آتی تھی اور مختلف لوگوں کی زمینوں اور کھیتوں کے حدود مٹ جاتے تھے اس لیے زمین کے مختلف حصوں کی حد بندی کے لیے پیمائش کرنے والوں کی ایک جماعت وجود میں آئی۔ ہم یہ نہیں بتا سکتے کہ رقبے کی اکائی کے لیے مربع کا انتخاب کیوں کر کیا گیا۔ اس کے متعلق ایک قیاس یہ ہے کہ ٹوکری سازی کے فن میں (جو پارچہ بافی سے پہلے کی ایجاد ہے) ٹوکری کی مرمت کے لیے جو طریقہ اختیار کیا جاتا تھا اس کی بنا پر مربعوں کے ذریعے کسی رقبے کو چکر کرنے کی طرف توجہ کی گئی۔ دوسرا قیاس یہ ہے کہ مکروں کے فرش کے لیے چوکے کام میں آنے لگے ان سے اس طرف رہ نمائی ہوئی۔ تیسرا قیاس یہ ہے کہ بابل کے مٹی کے برتنوں پر مربعوں سے جو نقشے بنے ہوئے تھے ان سے لوگوں کو رقبے

کی اکائی کا خیال ہوا۔ قرآن سے اس بات کی تائید ہوتی ہے یونانی علم ہندسہ سے بہت پہلے رقبے کے متعلق ایک اہم نتیجے کا انکشاف چوکوں یا مربع اینٹوں پر ہندسی شکلیں بنانے سے ہوا۔ قدیم چینی طباعت کے ایک نمونے سے جو مربع اینٹ پر بنی ہوئی ہندسی شکل کی نقل ہے، یہ ظاہر ہوتا ہے کہ فیثاغورث سے بہت پہلے چینیوں کو قائمہ الزاویہ مثلث کی اس اہم خاصیت کا علم تھا جو فیثاغورث سے منسوب کی جاتی ہے۔ بابلی اور مصری ریاضی داں مثلث کا رقبہ اس کے ضلعوں کی رقوم میں معلوم کر سکتے تھے۔ نیز دائرے کا رقبہ بھی نصف قطر کی رقوم میں معلوم کر سکتے تھے۔ اس عرض سے دائرے کو متعدد نصف قطروں کے ذریعے تقریباً مثلثی ٹیوں میں تقسیم کیا جاتا تھا۔ کسی کمرے کے فرش کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے صرف اتنا معلوم کرنا کافی ہے کہ ایک مقررہ ناپ کی کتنی مربع اینٹیں اس فرش کی سطح کو پُر کرنے کے لیے کافی ہوتی ہیں۔ رقبے پر اینٹ کی موٹائی کا کوئی اثر نہیں پڑتا۔ جب ہم کہتے ہیں کہ کسی کمرے کی لمبائی ۱۰ فٹ ہے تو اس سے ہمارا مطلب یہ ہوتا ہے کہ طویل کی اکائی یعنی فٹ کو اس کمرے کے طویل پر چالیس دفعہ رکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح قدیم زمانے میں کسی کمرے کی لمبائی معلوم کرنے کے لیے یہ دریافت کیا جاتا تھا کہ ایک خاص ناپ کی کتنی اینٹوں کو جوڑ کر کمرے کی لمبائی میں لگایا جاسکتا ہے۔ اگر اینٹ کے طویل کو طویل کی اکائی مانا جائے تو کمرے کے فرش کو پُر کرنے کے لیے جتنی اینٹیں درکار ہوتی ہیں ان کی تعداد کمرے کے فرش کے رقبے کو تعبیر کرتی ہے۔ کمرے کی لمبائی اور کمرے کے فرش کا رقبہ معلوم کرنے کے علاوہ ہم یہ بھی معلوم کر سکتے ہیں کہ کسی خلا کو پُر کرنے کے لیے کتنی اینٹیں درکار

ہوتی ہیں۔ اگر حجم کی اکائی کے لیے اینٹ کا حجم لیا جائے تو اینٹوں کی اس تعداد سے اس خلا کا حجم تعبیر ہوتا ہے۔ طویل، رقبہ اور حجم کی اکائیاں ایک دوسرے سے مربوط ہیں۔ اگر اکائی طول والے خط پر ایک مربع بنایا جائے تو اس کا رقبہ اکائی رقبہ ہوگا اور اگر ایک مکعب کا ہر کنارہ اکائی طول کے مساوی ہو تو مکعب کا حجم اکائی حجم ہوگا۔ اس لیے کسی طویل یا رقبہ یا حجم کا اندازہ کرنے کے لیے سب سے پہلے طویل کی اکائی کا مقرر کرنا ضروری ہے۔ نیز دو طولوں یا رقبوں یا حجموں کے مقابلے کے لیے انھیں ایک ہی اکائی کے رقوم میں محسوب کرنا ضروری ہے۔ مثلاً اگر ایک خط کی لمبائی تین انچ ہو اور دوسرے خط کی لمبائی پانچ فٹ تو ان دو خطوں کے طولوں کے مقابلے کے لیے دونوں کے طولوں کو انچوں یا فٹوں میں بیان کرنا ضروری ہے۔ چنانچہ اوپر کی مثال میں پہلے خط کا طول تین انچ ہے اور دوسرے کا ساٹھ انچ۔ اس لیے ان خطوں کے طولوں کی نسبت ۳:۶۰ ہے۔ اسی طرح ایک مربع کے ضلع کا طول چار انچ ہو اور دوسرے مربع کے ضلع کا طول دو فٹ تو پہلے مربع کا رقبہ ۱۶ مربع انچ ہوگا اور دوسرے کا رقبہ (۱۲×۲) یعنی ۲۴ مربع انچ ہوگا۔ اس لیے ان دونوں مربعوں کے رقبوں کی نسبت ۱۶:۲۴ ہوگی۔ اس بیان سے اکائی کی یکسانیت کی ضرورت واضح ہوتی ہے۔

۶۔ کسی دیے ہوئے جسم کا حجم کیا ہے؟

جب تجارت کا دار و مدار مبادلہ یعنی ایک جنس کو دوسری جنس کے

لے یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ اگر ایک مربع کے ضلع کا طول چار انچ ہو تو اس کا رقبہ (۴×۴) مربع انچ ہوتا ہے۔ اسی طرح اگر مربع کے ضلع کا طول n اکائی طول ہو تو مربع کے رقبے میں $(n \times n)$ مربع اکائی ہوتے ہیں۔

ساتھ بدلنے یا پختے پر تھا تو شہد، گھی، تیل وغیرہ خاص خاص برتنوں سے ناپے جاتے تھے۔ جیسا کہ آج کل بھی دیہاتوں میں ہوتا ہے۔ اور رواج عام سب کو اس بات کی پابندی پر مجبور کرتا تھا کہ برتنوں کی وضع اور ناپ تقریباً برابر رکھے جائیں۔ مثلاً گھی ناپنے کے تمام برتن ایک ہی وضع اور ناپ کے ہوں۔ ناپ کا یہ طریقہ نہ صرف ہمارے دیہاتوں میں بلکہ انگلستان جیسے ترقی یافتہ ملک میں بھی شراب ناپنے کے لیے اب تک رائج ہے، حالاں کہ حجم کی اکائی مثلاً مکعب فٹ کے استعمال سے زیادہ سہولت ہو سکتی ہے۔ قدیم زمانے میں جیسے جیسے سمیری تاجر اپنی تجارت میں ترقی کرتے گئے انھیں مختلف برتنوں کے حجموں کا مقابلہ کرنے کے لیے (جو مختلف مقاموں پر استعمال ہوتے تھے) حجم کی ایک معین اکائی کی ضرورت محسوس ہوئی اور انھوں نے حجم کو ایک معین مکعب کی مدد سے ناپنے کا طریقہ اختیار کیا۔ شاید سب سے پہلے اس طریقے کی طرف سمیریوں کی توجہ اس وجہ سے ہوئی کہ وہ اینٹوں سے دیواریں بناتے تھے اور اینٹوں کی تعداد کی مدد سے دیوار کا حجم معلوم کرتے تھے۔

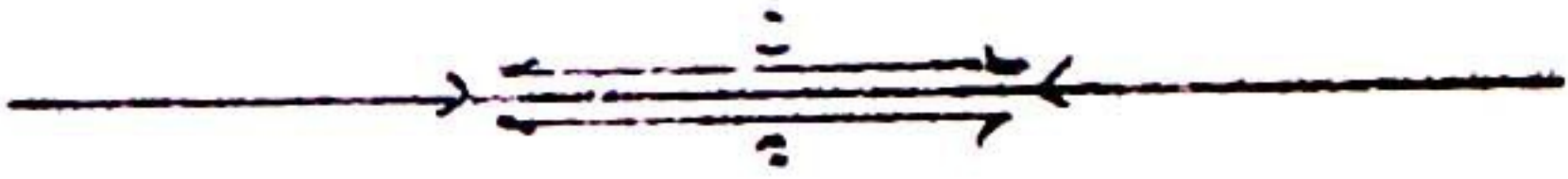
۷۔ کسی دی ہوئی چیز میں کتنا مادہ ہے یعنی کسی دی ہوئی چیز کی کمیت کیا ہے؟

موجودہ زمانے میں بھی ہم ایسی ٹھوس چیزوں کو جو کسی برتن میں اچھی طرح بھری جاسکتی ہیں حجم کے پیمانوں کی مدد سے ناپتے ہیں مثلاً دیہاتوں میں چاول ایک برتن کی مدد سے جو استوانے کی شکل کا ہوتا ہے ناپے جاتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ لوہا یا قلعی جیسی چیزوں کی مقدار کا اندازہ لگانے کے لیے یہ طریقہ کار آندہ نہیں ہو سکتا۔ چونکہ فنیقی سوداگر پہلے پہل قلعی

خریدنے کے لیے انگلستان آئے اس لیے انھوں نے قلعی کی مقدار کا اندازہ لگانے کے لیے اس کی کمیت معلوم کرنے کا طریقہ اختیار کیا۔ قدیم زمانے میں تجارتی قوموں کو بہت جلد اس معاشی ضرورت کا احساس ہوا کہ ناپ اور تول میں غلط پیمانے استعمال کرنا نہایت درجے قابل ملامت کام ہے۔ اس لیے عراق اور ایشیائے کوچک کی تہذیبیں ناپ اور تول کے پیمانوں کی ایجاد اور ان کی تنظیم میں مصر سے بہت آگے بڑھ گئیں۔ تجارتی ضرورتوں کے لیے اس سلسلے میں علم حساب میں بھی نمایاں ترقی ہوئی۔

سمت کی پیمائش کے بارے میں (اس باب کے ابتدائی حصے میں) جو کچھ لکھا جا چکا ہے اس کا اطلاق بہ حیثیت مجموعی طویل، رقبہ، حجم اور کمیت کی پیمائش پر بھی ہو سکتا ہے۔ کسی جسم کی کمیت کا اندازہ لگانے کے لیے ہم اس جسم کو ترازو کے ایک پلڑے میں رکھتے ہیں اور اکائی کمیت کے متعدد باٹ دوسرے پلڑے میں رکھتے ہیں تاکہ دونوں پلڑے متوازن ہوں یعنی ترازو کی ڈنڈی افقی ہو۔ دوسرے پلڑے میں اکائی کمیت کے باٹوں کی تعداد سے دیے ہوئے جسم کی کمیت تعبیر ہوتی ہے۔ یہ غور سے دیکھا جائے کہ عددوں کے استعمال میں اور کسی گالے میں بھینٹوں کی تعداد معلوم کرنے میں بہت بڑا فرق ہے۔ کیوں کہ ایک معمولی ترازو میں دو جسموں کی کمیتیں بہ ظاہر مساوی معلوم ہو سکتی ہیں لیکن زیادہ حساس ترازو کے استعمال سے ان جسموں کی کمیتوں کا حقیقی سا فرق بھی ظاہر ہوتا ہے۔ ہم خواہ کسی قسم کے آلات یا کسی قسم کی اکائیاں استعمال کریں صرف صحیح عددوں کی مدد سے کسی چیز کے وزن یا حجم یا کسی سطح کا رقبہ یا کسی خط کے طویل یا کسی زاویے کی مقدار کامل صحت کے ساتھ تعبیر نہیں ہو سکتی۔ اگر ہم اس امر کو پیش نظر رکھیں

کہ صحیح عدد ایک گروہ کے افراد کی تعداد کو ظاہر کرنے کے لیے وضع کیے گئے تھے تو ہمیں ان مشکلوں کو حل کرنے میں آسانی ہوگی جو قدیم زمانے کے ریاضی دانوں کو پیمائش کے نتیجوں کو صحیح عددوں کے ذریعے تعبیر کرنے میں پیش آئیں۔ چونکہ پیمائش کے نتیجے کسی صورت میں بھی بالکل صحیح نہیں ہو سکتے، اس لیے عددوں کے اس نئے استعمال کے متعلق ہم آئندہ باب میں چند اہم اور اصولی باتوں پر کسی قدر تفصیل کے ساتھ بحث کریں گے۔



تیسرا باب

جسامت، ترتیب اور گنتی کے قاعدے

یا

اعداد کی زبان کا ترجمہ اور اس حسابی زبان کے قواعد

ریاضی کے متعلق یہ کہنا کہ ریاضی عددوں کی زبان ہے اور ریاضی کے قاعدے صرف ونحو کے قاعدوں کے مماثل ہیں محض استعارہ نہیں ہے۔ ریاضی کے سمجھنے میں ہمیں بہت آسانی ہوگی اگر ہم معمولی بول چال کی زبان اور عددوں کی زبان کی مشابہت کو اچھی طرح ذہن نشین کر لیں۔ معمولی بول چال کی زبان میں ہم اشیا کی مختلف قسموں کو ظاہر کرتے ہیں اور عددوں کی زبان (یعنی ریاضی) میں ہم اشیا کی جسامت، ترتیب اور گنتی کو ظاہر کرتے ہیں۔ ریاضی کی ہر شاخ میں معمولی زبان اور عددوں کی زبان کی مشابہت نمایاں ہوتی ہے۔

سب سے پہلے انسان نے اپنی بول چال کو تصویروں کے ذریعے تحریر میں لانا شروع کیا تاکہ وہ مختلف موسمی واقعات کی یادداشت کا کام دے سکیں۔ رفتہ رفتہ ان تصویروں نے بالکل مختلف حیثیت اختیار کر لی اور ہر محسوس شے یا واقعے کے لیے ایک مخصوص تصویر مقرر ہو گئی۔

چینی، مصری اور بابلی تحریر کے طریقے اسی طرح وجود میں آئے۔ بہ تدریج
تحریر کی تصویری نوعیت زائل ہونے لگی اور وہ علامتوں (یعنی رموز) کا
مجموعہ بن گئی اور رفتہ رفتہ اس نے حروف تہجی کی صورت اختیار کر لی۔
اس طرح سے تحریر کے دو مختلف طریقے وجود میں آئے (۱) تصویری طریقہ
اور (۲) رمزی یا حروف تہجی کا طریقہ۔ تحریر کے ان دو طریقوں کے
جواب میں ریاضی میں بھی دو طریقے پائے جاتے ہیں۔ ریاضی کی ابتدا
بھی تصویری تحریر سے ہوئی۔ ریاضی کی اس تصویری تحریر کو ہم علم ہندسہ
کہتے ہیں۔ علم ہندسہ کے ارتقا میں اور تصویری تحریر (مثلاً چینی تحریر) کے
ارتقا میں بہت مشابہت پائی جاتی ہے۔ ابتدا میں مجسموں اور سطحوں کو تعبیر کرنے
کے لیے ہندسی شکلیں استعمال کی گئیں۔ نیز حسابی سوالوں کے حل کے لیے
بھی ہندسی شکلوں سے مدد لی گئی۔ اس کے کئی صدی بعد عددوں پر بحث کرنے
کے لیے اور حسابی سوالوں کو حل کرنے کے لیے صرف ہندسی شکلوں سے مدد
لینے کی بجائے حروف تہجی کا استعمال شروع ہوا۔ اس سلسلے میں بول چال
کی زبان کے لغات کی طرح ریاضی کی جدولیں مرتب کی گئیں۔ جس طرح
لغت کی مدد سے کسی لفظ کے معنی معلوم کیے جاسکتے ہیں اسی طرح ان
ریاضاتی لغات یعنی جدولوں کی مدد سے ریاضی کی کسی علامت سے تعبیر
ہونے والی مقدار کی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے۔ مثلاً جیبوں (SINES) کی
جدول کی مدد سے جب ۱۵ کے جواب میں عدد ۰.۲۵۸۸ حاصل ہوتا ہے۔
البتہ جس طرح معمولی لغت میں کسی لفظ کے معنی دیکھنے سے اس لفظ کا
استعمال اچھی طرح معلوم نہیں ہوتا اسی طرح جیبوں کی جدول کی مدد سے
کسی زاویے کی جیب کی قیمت حاصل کی جائے تو مزید معلومات کیے بغیر یہ

واضح نہیں ہوتا کہ یہ جدولیں جہاز رانی کے حسابوں میں کس طرح کام آتی ہیں۔ جس طرح تصویری تحریر کے طریقے سے ابجدی رسم الخط ایجاد ہوا، اسی طرح علم ہندسہ اور ہندسی شکلوں کی مدد سے ریاضیات کے حل کی مختلف شاخیں ایجاد ہوئیں۔ نیز جس طرح معمولی تحریر میں کسی خیال کو زیادہ واضح کرنے کے لیے مزاحیہ تصویریں استعمال کی جاتی ہیں اسی طرح ریاضیاتی تحلیل میں بھی اکثر ہندسی شکلوں سے مدد لی جاتی ہے۔ دنیا کی مختلف زبانوں کی مختلف خصوصیتیں ہیں۔ مثلاً فرانسیسی زبان متین ہجو کے لیے بہت ہی سوزو ہے، اور انگریزی زبان علمی اصولوں کو واضح اور مختصر طور پر بیان کرنے کی خاص صلاحیت رکھتی ہے۔ اسی طرح ریاضیاتی تحلیل کی مختلف شاخیں مثلاً سفاری احصا، سمتی احصا، وغیرہ مختلف حسابی ضرورتوں کو پورا کرتی ہیں۔ معمولی زبان کے قواعد صرف و نحو اور عددوں کی زبان کے قاعدوں کی مماثلت ایک اور طریقے سے بھی واضح کی جاسکتی ہے۔ معمولی زبان کے ہر جملے میں ایک اسم اور ایک فعل ہوتا ہے۔ اسم وہ ہے جس کے متعلق جملے میں خبر دی جاتی ہے اور فعل وہ ہے جو اسم کے متعلق خبر دیتا ہے۔ اسی طرح عددوں کی زبان میں بھی اسم اور فعل ہوتے ہیں۔ اس مطلب کو واضح کرنے کے لیے ذیل میں کسی قدر تفصیل کے ساتھ بحث کی جائے گی۔

اسم۔ ریاضی کے قاعدوں میں عددوں سے وہی کام لیا جاتا ہے جو معمولی زبان میں اسم سے لیا جاتا ہے۔ جس طرح زبان کے قواعد میں اسم کو مختلف قسموں (یعنی اسم معرفہ، اسم نکرہ، اسم جنس وغیرہ) میں تقسیم کیا جاتا ہے اسی طرح عددوں کی زبان میں بھی اسم کی مختلف قسمیں ہوتی ہیں۔ بنی نوع انسان نے ہزار ہا سال کی محنت اور تحقیق کے بعد عددوں کی

مختلف قسموں میں تمیز کرنا سیکھا۔ ریاضی کے قاعدے سمجھنے میں جو مشکلیں پیش آتی ہیں ان کی ایک اہم وجہ یہ ہے کہ عددوں کی مختلف قسموں اور ان کے استعمال میں بالعموم امتیاز نہیں کیا جاتا۔

جب تک انسان وقت کا اندازہ دنوں میں اور پانی کی مقدار کا اندازہ ڈولوں کی تعداد سے کرتا رہا اس کو اس بات کا احساس تک نہ ہوا کہ وہ ایک ہی لفظ کو دو بالکل مختلف ضرورتوں کے لیے استعمال کر رہا ہے۔ عددوں کے استعمال کے ان دو طریقوں میں تمیز کرنے کے لیے یہ کہا جاسکتا ہے کہ پہلے طریقے میں گنتی کی جاتی ہے اور دوسرے طریقے میں پیمائش کی جاتی ہے۔ گنتی کے لیے جو عدد استعمال ہوتے ہیں وہ معرفہ عدد ہوتے ہیں اور پیمائش کے لیے جو عدد استعمال ہوتے ہیں وہ نکرہ عدد ہیں۔ ہم رُپہ، آم، دن، کسی شہر کی آبادی وغیرہ گنتے ہیں اور اس گنتی کو تعبیر کرنے کے لیے جو عدد استعمال کیے جاتے ہیں وہ اسم معرفہ کہلائے جاسکتے ہیں کیوں کہ اس عدد سے کسی جماعت میں افراد کی تعداد ٹھیک ٹھیک طور پر ظاہر ہوتی ہے جس طرح کہ اسم معرفہ سے ایک شخص ٹھیک معلوم ہوتا ہے۔ جب ہم کہتے ہیں کہ ایک کمرے میں ۲۵ آدمی ہیں تو اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ کمرے میں ٹھیک ۲۵ آدمی ہیں نہ کہ ۲۴ یا ۲۵ آدمی۔ لیکن اس کے برخلاف اگر ہم کہیں کہ اس کمرے کی چھت کی بلندی ۱۵ فٹ ۳ انچ ہے اور یہ پیمائش ایک ایسے پیمانے کی مدد سے جس میں چھوٹے سے چھوٹا نشان ۱ انچ کا ہے کی گئی ہو تو صرف یہ کہا جاسکتا ہے کہ کمرے کی چھت کی بلندی ۱۵ فٹ ۲ ر ۵ انچ اور ۱۵ فٹ ۳ ر ۵ انچ کے درمیان ہے۔ یعنی کسی پیمائش کا نتیجہ ٹھیک ٹھیک طور پر نہیں بتایا جاسکتا۔ اس

لیے پیمائش کی بنا پر صرف یہ معلوم ہوتا ہے کہ کمرے کی بلندی ان تمام طوؤں میں سے جو ۱۵ فٹ ۲ ر ۵ انچ اور ۱۵ فٹ ۳ ر ۵ انچ کے درمیان ہیں کوئی ایک ہو سکتی ہے۔ اسم نکرہ کا استعمال بھی اسی کے مماثل ہوتا ہے۔ کیوں کہ اگر ہم کہیں کہ زید نے ایک فقیر کو روٹی دی تو فقیر اسم نکرہ ہے اور اس سے صرف یہ ظاہر ہوتا ہے کہ فقیروں کی جماعت میں سے کسی ایک فرد کو زید نے روٹی دی۔ اوپر کی تشریح سے یہ واضح کرنا مطلوب ہے کہ جب ہم کسی کمرے کا طول بیان کرتے ہیں تو اس کے لیے ایک معین عدد نہیں دیا جاسکتا بلکہ عددوں کی ایک جماعت دی جاسکتی ہے جس کے کسی دو عددوں کا فرق ایک معین مقدار سے زیادہ نہیں ہوتا۔ مثلاً اوپر کی مثال میں ۱۵ فٹ ۲ ر ۵ انچ اور ۱۵ فٹ ۳ ر ۵ انچ کے درمیان کے کسی طول سے کمرے کی بلندی کو تعبیر کیا جائے تو بلندی کی کسی دو قیمتوں کا فرق ایک انچ سے زیادہ نہیں ہوگا۔ اسی مطلب کو اس طرح بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ کمرے کی بلندی $(183 \pm \frac{1}{4})$ انچ ہے۔ اگر ہم کمرے کی بلندی کو تعبیر کرنے والے عددوں کی جماعت کے کسی دو عددوں کا فرق اور بھی گھٹانا چاہیں تو ایسا پیمانہ استعمال کرنا ہوگا جس میں انچ سے بھی چھوٹے درجے مثلاً $\frac{1}{4}$ انچ کے درجے بنے ہوئے ہوں۔ اگر ایسے پیمانے کی مدد سے معلوم کیا جائے کہ چھت کی بلندی ۱۸۳ ر ۲ انچ ہے تو اس سے مراد یہ ہوتی ہے کہ بلندی $(183 \pm \frac{1}{4})$ انچ ہے۔ اسی طرح پیمانے کی درجہ بندی میں اور چھوٹے حصے لے کر پیمائش کی خطا کو اور بھی گھٹایا جاسکتا ہے۔ لیکن یہ اچھی طرح سمجھ لینا چاہیے کہ پیمانے کی درجہ بندی ایک خاص درجہ صحت سے آگے بڑھائی نہیں جاسکتی

کیوں کہ ہمارے حواس خمسہ کی قوت محدود ہے۔
 عددوں کی مذکورہ بالا دو قسموں میں تمیز نہ کرنے کی وجہ سے نظری
 ریاضی داں اور عملی ضرورتوں کے لیے ریاضی کو استعمال کرنے والوں کے
 درمیان بہت سی غلط فہمیاں پیدا ہو گئی ہیں۔ چوتھے اور پانچویں باب
 میں ہم یہ بتائیں گے کہ گنتی اور پیمائش میں امتیاز نہ کرنے کی وجہ سے
 ریاضی میں پہلا انقلاب کس طرح پیدا ہوا۔ ابتدائی دور میں انسان
 کو پیمائش کے نتیجوں کو صحیح عددوں کے ذریعے تعبیر کرنے میں جو مشکلات
 پیش آئیں انھیں دور کرنے کے لیے یہ ضروری تھا کہ مناسب نئے عدد
 ایجاد کیے جاتے۔ لیکن انسان نے ایسا کرنے کی بجائے پیمانے کے
 چھوٹے حصوں کو نئی اکائی کے طور پر اختیار کیا۔ مثلاً ایک عرصے تک
 ایک درجے کے زاویے کے $\frac{1}{2}$ حصہ یعنی منٹ کو درجے کی کسر تصور
 کرنے کی بجائے ایک نئی اکائی کے طور پر استعمال کیا گیا۔ اس عمل
 سے کسر کے صحیح تصور کی تشکیل ناممکن ہو گئی۔

کسی جماعت میں افراد کی تعداد کو یا کسی چیز کی پیمائش کو ظاہر
 کرنے کے تین طریقے ہیں: پہلا اور سب سے ناقص طریقہ یہ ہے کہ اس
 مقدار کی صرف ایک حد بتائی جائے۔ اسی طرح یہ بیان کیا جاسکتا
 ہے کہ دہلی سے سورج کا فاصلہ (س) بڑا ہے۔ دہلی سے لندن کے فاصلہ
 (ف) کے ۱۰۰ گنے سے یعنی س سے ۱۰۰ ف۔ اس طرح کے بھدے
 بیان پیمائش کے ابتدائی دور میں واقع ہوتے ہیں۔ زیادہ صحیح اور تشفی
 بخش پیمائش کے لیے یہ ضروری ہے کہ پچلی اور بالائی حدیں دی جائیں۔
 مثلاً اگر لندن کی آبادی ۱۱ ملین ہو اور لورپول کی ایک بلین اور ماسکو کی

طول ترتیب وار ۱۰ فٹ اور ۱۵ فٹ ہیں تو پوری صحت کے ساتھ یہ نہیں کہا جاسکتا ہے کہ ان خطوں کے طُولوں کی نسبت $\frac{۲}{۱۱}$ ہے کیوں کہ خطوں کی پیمائش میں ہمیشہ چھوٹی خطا کا امکان ہوتا ہے یعنی تمام پیمائش صرف ایک خاص درجہ صحت تک ممکن ہے۔ ہم متوالی اعشاریہ ۶.۶ کے ذریعے اس کی توضیح کر سکتے ہیں۔ ۶.۶ سے مراد ایک ایسی مقدار ہے جو $\frac{۶}{۱۰}$ سے بڑی اور $\frac{۶}{۱۰}$ سے چھوٹی ہے؛ جو $\frac{۶۶}{۱۰۰}$ سے بڑی اور $\frac{۶۶}{۱۰۰}$ سے چھوٹی ہے اور اسی طرح اُن دو حدوں کا فرق جن کے درمیان یہ مقدار واقع ہے جتنا چاہیں کم کیا جاسکتا ہے اس سے واضح ہوتا ہے متوالی کسر اعشاریہ ۶.۶ ایک غیر معین کسر ہے۔ صرف ایک سو سال سے کسر اعشاریہ روزمرہ پیمائشوں میں استعمال ہو رہے ہیں۔ ہمیں فرانس کی قومی مجلس کا ممنون ہونا چاہیے جس نے اس اہم ایجاد کو رواج دے کر اس کو سب کا ورثہ بنا دیا۔

متوالی کسر اعشاریہ ۶.۶ میں واقع ہونے والے ہندسے کبھی ختم نہیں ہوتے۔ اسی قسم کی اور بہت سی ایسی غیر معین کسریں دی جاسکتی ہیں۔ اگر غیر معین کسر اعشاریہ میں ہندسے کسی خاص ترتیب یا قانون کے لحاظ سے واقع ہوں تو اس کسر کی قیمت کسی مطلوبہ درجہ صحت تک آسانی سے لکھی جاسکتی ہے ایسے تمام عدد نکرہ عدد کہلائیں گے لیکن اگر غیر معین کسر میں ہندسے کسی قاعدے کے مطابق واقع نہ ہوں تو ہمیں ایسے عددوں کو ایک نیا نام دینا پڑتا ہے۔ ایسے عددوں کو ہم ضمیر کے مماثل تصور کیا جاسکتا ہے۔ ایسا ایک مشہور عدد آ (حیط) ہے۔ عدد آ سے

آ عبرانی زبان کا ایک حرف ہے۔

کسی دائرے کے محیط اور اس کے قطر کی مستقل نسبت تعبیر کی جاتی ہے۔
 آ کی ٹھیک ٹھیک قیمت نہیں دی جاسکتی۔ دراصل آ سے عددوں
 کا ایک گروہ تعبیر ہوتا ہے جس کے کسی دو رکنوں کا فرق کافی چھوٹا ہے۔
 آ کی تقریبی قیمت ۳.۱۴۱۵۹ لینے سے ایک فی صد سے کم خطا ہوتی ہے،
 اگر آ کی قیمت ۳.۱۴۱۵۹ لی جائے تو ۱ فی صد سے بھی کم خطا ہوتی ہے،
 یہ یاد رہے کہ آ کی قیمت کا درجہ صحت اس بات پر منحصر ہوتا ہے کہ
 اس قیمت کو کس غرض کے لیے استعمال کیا جا رہا ہے۔ چنانچہ کسی
 گاڑی کے پیٹے کا محیط معلوم کرنے کے لیے اتنی صحت ضروری نہیں
 ہے جتنی کہ ایک انجن کے استوانے کے سرے کے محیط میں ضروری ہے۔
 ریاضی میں حروف تہجی ایک اور طریقے سے بھی استعمال کیے
 جاتے ہیں۔ کسی زبان کے قواعد میں اسم نکرہ، اسم معرفہ اور اسم ضمیر
 کے علاوہ اسم کی اور قسمیں بھی دی جاتی ہیں جن میں سے اسم مجرد اور
 اسم جنس قابل ذکر ہیں۔ چوں کہ ریاضی کا تعلق زیادہ تر استقرار اور عمل
 سے ہے، اس لیے اس میں اسم مجرد اور اسم جنس میں امتیاز کرنے کی
 ضرورت پیدا نہیں ہوتی۔ جو حروف تہجی عددوں کی ایک خاص جماعت
 یا ایک خاص جنس کے تمام رکنوں کی ایک مشترک خاصیت کو ظاہر
 کرتے ہیں وہ ریاضی کے اسم جنس کہلا سکتے ہیں اور ان کے اختیار
 کرنے سے لکھنے اور بولنے میں اختصار حاصل ہوتا ہے۔ ذیل کی مثالوں
 سے اوپر کے بیان کی توضیح ہوتی ہے۔

(۱) کسی مستطیل کے رقبے میں اکائیوں کی مقدار معلوم کرنے کے
 لیے مستطیل کے طویل اور عرض میں اکائیوں کی تعداد کو ضرب دیا جاتا

ہے۔ اس قاعدے کو مختصر طور پر اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$\text{مستطیل کا رقبہ} = \text{طویل} \times \text{عرض}$$

اب اگر رقبے کو ق سے طویل کو ط سے اور عرض کو ع سے تعبیر کیا جائے تو

$$ق = ط \times ع$$

اوپر کے قاعدے کی رو سے مختلف مستطیلوں کے رقبے معلوم کیے جاسکتے ہیں جب کہ طویل اور عرض معلوم ہوں۔ اس ضابطے میں ط سے کسی مستطیل کا طویل، ع سے اس مستطیل کا عرض اور ق سے اس کا رقبہ تعبیر ہوتا ہے۔ اس لحاظ سے یہ حروف ط، ع، ق اسم جنس کے قائم مقام ہوتے ہیں۔ حروف تہجی کے اس طرح کے استعمال کا ایک بڑا فائدہ یہ ہے کہ ان کی مدد سے کسی قاعدے یا کلیے کو نہایت اختصار کے ساتھ بیان کیا جاسکتا ہے۔

(۲) فرض کرو کہ کرسیوں کو اس طرح ترتیب دیا گیا ہے کہ پہلی صف میں ایک کرسی ہے، دوسری میں دو، تیسری میں ۳، چوتھی میں چار، وغیرہ۔ تب پہلی بارہ صفوں میں کرسیوں کی تعداد ہوگی ۱ + ۲ +

$$۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲$$

فرض کرو کہ کرسیوں کی مجموعی تعداد مر ہے۔

$$\text{تب مر} = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲$$

$$\text{نیز مر} = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲$$

$$\text{پس ۲ مر} = (۱ + ۱۲) + (۲ + ۱۱) + (۳ + ۱۰) + (۴ + ۹) + (۵ + ۸)$$

$$+ (۶ + ۷) + (۷ + ۶) + (۸ + ۵) + (۹ + ۴)$$

$$+ (۱۰ + ۳) + (۱۱ + ۲) + (۱۲ + ۱)$$

$$۱۲ \times ۱۳ =$$

اس لیے کرسیوں کی مقدار مر = $\frac{۱۲ \times ۱۳}{۲} = ۷۸$

اسی طرح کسی مثالیں لے کر یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ اوپر کے طریقے سے ترتیب

دی ہوئی n صفوں میں کرسیوں کی تعداد مر = $\frac{n(n+1)}{۲}$

اوپر کے ضابطے میں پہلے n طبعی عددوں کا مجموعہ معلوم کرنے کا قاعدہ حروف
تہجی کی مدد سے نہایت اختصار کے ساتھ بیان کیا گیا ہے۔

فعل۔ جب ہم عددوں کو حروف تہجی سے تعبیر کرتے ہیں تو ایک
ضابطہ کے مختلف حروف کو مختلف علامتوں کے ذریعے، جو ریاضی کے
اعمال کو تعبیر کرتی ہیں، مربوط کرتے ہیں۔ مثلاً اوپر کا ضابطہ (۱) ہے

$$ق = ط \times ع$$

اس میں علامت \times سے مراد یہ ہے کہ اس کی دونوں جانب جو عدد واقع ہیں
انہیں باہم ضرب دیا جائے۔ نیز علامت $=$ سے مراد یہ ہے کہ $ق$ کی قیمت
وہی ہے جو $ط \times ع$ کی ہے۔ اس لحاظ سے ریاضی کی علامتوں \times اور $=$ سے
ریاضیاتی عمل تعبیر ہوتے ہیں۔ اکثر \times کی بجائے صرف $ط$ لکھا
جاتا ہے۔ یہ واضح رہے کہ ۳×۵ کی بجائے ۳۵ نہیں لکھا جاسکتا کیوں کہ
 ۳۵ سے عدد پینتیس ظاہر ہوتا ہے نہ کہ پندرہ۔ نیز $n(n+1)$ سے یہ مراد
ہے کہ n اور $n+1$ کا حاصل ضرب لیا جائے۔ اسی طرح جمع کے لیے
علامت $+$ ، تفریق کے لیے علامت $-$ اور تقسیم کے لیے علامت \div
استعمال کی جاتی ہے۔ اس اصول کے سمجھنے کے بعد کسی ریاضیاتی جملے کا
ترجمہ معمولی بول چال میں آسانی سے کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً $ق = ط \times ع$ کا
ترجمہ معمولی بول چال میں یہ ہوگا کہ $ق$ حاصل ہوتا ہے جب کہ $ط$ کو ضرب

دیا جائے ع سے۔

جس طرح معمولی بول چال میں ایک لفظ کے کسی معنی ہوتے ہیں اور محل استعمال سے اس کے معنی کا پتا چلتا ہے اسی طرح ریاضی میں بھی علامتوں میں کسی قدر التباس پایا جاتا ہے۔ اگر ہم عدد ۷ کو ۷ سے ضرب دیں تو حاصل ضرب کو ۷ سے تعبیر کیا جائے گا۔ اس میں اور ۲ میں التباس کا امکان ہے اگر ان علامتوں کو بے احتیاطی سے لکھا جائے۔ التباس کو دور کرنے کے لیے ۷ میں ۲ کو باریک خط سے ۷ کی بائیں جانب کسی قدر اوپر ہٹا کر لکھا گیا ہے۔ اسی طرح ۸ سے مراد ہر $8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8$ یعنی عدد ۸ کو ۹ دفعہ لے کر ان تمام عددوں کو آپس میں ضرب دینے سے حاصل ہونے والا عدد۔ اسی طرح اگر عدد ۱ کو ۱۰ دفعہ لیا جائے تو ان تمام عددوں کا حاصل ضرب ۱ سے تعبیر کیا جائے گا۔

ہمیں معلوم ہے کہ $3 \times 3 = 3^2$

چوں کہ ۷ ایک کناری والے مکعب کا حجم ہے مکعب ایکائی ہوتا ہے اس لیے ہم نتیجہ $3 \times 3 = 3^2$ کو ۷ ایکائی کناری والے مکعب کا حجم معلوم کرنے کے لیے استعمال کر سکتے ہیں۔ پس اگر مختلف عددوں کے مکعبوں کے لیے جدول بنائی جائے تو اس کی مدد سے مختلف مکعبوں کے حجم فوراً معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ اسی طرح ریاضی کی مختلف جدولوں سے ہماری ضرورتیں پوری ہوتی ہیں۔

یہ غور سے دیکھا جائے کہ ریاضیاتی جملہ $3 \times 3 = 3^2$ میں ۲ اسم نہیں ہے بلکہ ایک عمل کو تعبیر کرتا ہے۔ اسی طرح $10 = 10$ میں لا سے ایک عمل تعبیر ہوتا ہے۔ یعنی نحوی اصطلاح میں لا اسم نہیں ہے بلکہ فعل ہے۔

چوں کہ اکثر اوقات علامتوں اور حرفوں کی کثرت سے بیان میں دلچسپی باقی نہیں رہتی اس لیے اخبار کے ہوشیار اڈیٹر (مدیر) کی طرح ریاضی دلچسپ و مناسب ہندسی شکلوں سے مدد لیتے ہیں۔ ان شکلوں سے وہی فائدہ ہوتا ہے جو اخباروں میں کارٹون (CARTOON) سے حاصل ہوتا ہے۔ یہ توضیحی کام اقلیدس کے علم ہندسہ سے نہیں لیا جاتا بلکہ اس جدید اور کارآمد علم ہندسہ سے لیا جاتا ہے جو سترھویں صدی میں ایجاد ہوا۔ یہ نیا علم ہندسہ، ہندسہ تحلیلی یا تریسیمی ہندسہ کہلاتا ہے۔ سترھویں صدی کی اس ایجاد تریسمات نے اقلیدسی علم ہندسہ کی ایک اہم کمی کو پورا کر دیا۔ اس نئے علم ہندسہ کی مدد سے بہت سے حسابی عمل ہندسی اشکال کی مدد سے آسانی اور فصاحت کے ساتھ حل کیے جاسکتے ہیں۔ مثلاً اکلینز اور کچھوے کی دوڑ کے متعلق پہلے باب میں جو معرکہ پیش کیا گیا اس کو تریسمات کی مدد سے ہم آسانی سے حل کر سکتے ہیں۔ (دیکھو باب ۹) اسی طرح ہم لاکھوں مختلف قیمتوں کے جواب میں لاکھوں قیمتوں کو تریسمات کی مدد سے تعبیر کر سکتے ہیں اگرچہ کہ یہ تعبیر اقلیدسی علم ہندسہ کے ذریعے ناممکن ہے۔

ریاضی کے نظری نتیجے بالعموم پہلے خاص خاص صورتوں پر تجربہ کرنے سے دریافت کیے گئے ہیں اور بعد میں ان مسئلوں کا عام ثبوت وضع کیا گیا ہے۔ نظری ثبوت کا اصل مدعا صرف یہ ہوتا ہے کہ زیر بحث مسئلے کا تعلق اس کے پہلے کے مسئلوں سے واضح طور پر بتایا جائے۔

مثلاً مستطیل کا رقبہ معلوم کرنے کا عملی قاعدہ کسروں کی ضرب کے قاعدے سے صدیوں پہلے دریافت ہو چکا تھا۔ اس عملی قاعدے کی

وضاحت ذیل کی مثال سے اچھی طرح ہوتی ہے :-

فرض کرو کہ ہمیں ایک ایسے مستطیل کا رقبہ معلوم کرنا ہے جس کے متصل ضلعوں کے طول $\frac{1}{2}$ اور $\frac{3}{4}$ اکائی ہیں۔ اس غرض سے اکائی طول والا ایک مربع بناؤ۔ اس کے ایک ضلع کو ۵ مساوی حصوں میں تقسیم کرو اور متصل ضلع کو ۷ مساوی حصوں میں۔ نقاط تقسیم میں سے دوسرے ضلع کے متوازی خط کھینچو۔ اس طرح سے مربع (۳۵) مساوی حصوں میں تقسیم ہو جاتا ہے اور شکل سے فوراً یہ ظاہر ہوتا ہے کہ ضلعوں $\frac{3}{4}$ اور $\frac{1}{2}$ والے مستطیل میں ایسے (۱۲) حصے ہیں۔ اس لیے زیر بحث مستطیل کا رقبہ اکائی رقبے کا $\frac{12}{35}$ حصہ ہے۔ پس تریسیمی طور پر حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{12}{35} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$ ۔

	۱	۲	۳	۴	۵
۱	۱	۲	۳	۱۳	۱۴
۲	۴	۵	۶	۱۵	۱۶
۳	۷	۸	۹	۱۶	۱۸
۴	۱۰	۱۱	۱۲	۱۹	۲۰
۵	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵
۶	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۷	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵

اس قسم کی کئی مثالوں سے یہ عام قاعدہ حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{ج}{د} = \frac{ج}{د} \times \frac{ب}{ب}$

اب ہم ریاضی کے افعال (یعنی عامل) اور نحوی افعال میں چند نمایاں

اختلافات کا ذکر کریں گے تاکہ ریاضی کے عاملوں کی خصوصیت اچھی طرح

واضح ہو جائے۔ پہلا فرق یہ ہے کہ ریاضی کے افعال میں ماضی، حال اور

مستقبل نہیں ہے۔ دوسرا قابل ذکر فرق یہ ہے کہ ریاضی کے تمام افعال متعدی ہوتے ہیں گویا ریاضی میں سکون اور بے عملی کو کسی قسم کا دخل نہیں ہے۔

ریاضی کے چند عامل ایسے ہیں کہ انھیں التزامی افعال REFLEXIVE

VC R.B.S سے تشبیہ دی جاسکتی ہے۔ مثلاً عامل + اور x کیوں کہ ۳x۳

اور ۳+۳= اس سے فائدہ یہ ہے کہ ہمیں ضرب اور جمع کی صرف آدھی جدولیں

یاد رکھنی کافی ہیں۔ لیکن چند عامل ایسے ہیں کہ ان کے عمل کی ترتیب بدلنے

سے نتیجہ بھی بدل جاتا ہے۔ مثلاً (۳-۲) وہی نہیں ہے جو (۲-۳) ہے اور

(۳ ÷ ۲) وہی نہیں ہے جو (۲ ÷ ۳) ہے۔ ریاضی کے چند عامل ایسے ہیں

جو ایک دوسرے کی ضد ہیں۔ مثلاً معمولی زبان میں "اقرار کیا" اور "انکار کیا"

ایک دوسرے کی ضد ہیں۔ اسی طرح ریاضی میں عامل x اور ÷ ایک

دوسرے کی ضد ہیں اور عامل + اور - بھی ایک دوسرے کی ضد ہیں۔

چنانچہ (۱) $۱۲ = ۳ \times ۳$ $۳ = ۱۲ \div ۳$

(۲) $۷ = ۳ + ۳$ $۳ = ۷ - ۴$

۷-۳=۴ کا ترجمہ معمولی زبان میں اس طرح کیا جاسکتا ہے "۷ میں سے

۳ کو تفریق کرنے سے ۴ باقی رہتا ہے۔ اسی نتیجے کو ہم یوں بھی بیان

کر سکتے ہیں کہ عدد ۳ ایسا عدد ہے کہ اس کو ۳ میں جمع کرنے سے ۷ حاصل ہوتا

ہے۔ اس توضیح سے ظاہر ہوتا ہے کہ عامل + اور - ایک دوسرے کی

ضد ہیں۔ اسی طرح $۱۲ \div ۳ = ۴$ کے معنی حسب ذیل ہیں :-

(۱) ۱۲ کو ۳ پر تقسیم کرنے سے ۴ حاصل ہوتا ہے۔

(۲) ۴ وہ عدد ہے جس سے ۳ کو ضرب دینے سے ۱۲ حاصل ہوتا ہے۔

اس مثال سے یہ واضح ہوتا ہے کہ x اور ÷ کے عامل ایک دوسرے کی

ضد ہیں۔

دو متضاد عالموں کی ایک اور آسان مثال حسب ذیل ہے:-

$$۲۷ = ۲۷$$

$$۷ = \sqrt{۲۷}$$

اس مثال سے معلوم ہوتا ہے کہ مربع لینے کا عمل جذر المربع نکلانے کے عمل کی ضد ہے۔ اوپر کی مثال سے یہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ اگر ایک عامل کے لیے جدول مرتب کی جائے تو اس عامل کی ضد کے لیے جدول فوراً مرتب کی جاسکتی ہے۔ مثلاً عددوں کے مربعوں کی جدول کی مدد سے جذر المربع کی جدول فوراً مرتب کی جاسکتی ہے۔ البتہ یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ ہر مثبت عدد کا جذر المربع صحیح عددوں کی رقوم میں ٹھیک ٹھیک طور پر بیان نہیں کیا جاسکتا۔ مثلاً $\sqrt{۲۷}$ کی قیمت شکل $\frac{۲۷}{۷}$ میں جہاں ۷ اور ۲۷ صحیح عدد ہیں ٹھیک ٹھیک طور پر بیان نہیں کی جاسکتی۔ لیکن مربعوں کی جدول سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ $۱۲ = ۱۴۴$ اور $۱۵ = ۲۲۵$ ؛ اس لیے $(۱۴) = ۱۹۶$ اور $(۱۵) = ۲۲۵ = ۲۲۵$ یعنی $\sqrt{۲۷}$ کی قیمت ۱۴ اور ۱۵ کے درمیان واقع ہے۔ اس سے زیادہ درجہ صحت تک $\sqrt{۲۷}$ کی قیمت معلوم کرنے کے لیے مماثل عمل اختیار کیا جاسکتا ہے۔

نحو۔ قواعد کی کتابوں میں بالعموم پہلے حصے میں لفظ کی مختلف قسموں اور ان کے استعمال کے قاعدوں پر بحث کی جاتی ہے۔ یہ علم صرف کہلاتا ہے۔ دوسرے حصے میں لفظوں کے باہمی تعلق اور جملہ کی ساخت کے قاعدوں پر بحث کی جاتی ہے۔ یہ علم نحو کہلاتا ہے۔ ریاضی کی نحو کے بنیادی قاعدے بہت آسان ہیں کیوں کہ ریاضی میں جذبات کو دخل نہیں ہے اور

ریاضی کے تمام جملوں کی ساخت تقریباً یکساں ہوتی ہے۔ ریاضی کے جملوں میں سے ہر ایک میں علامت = ہوتی ہے جس کے معنی "مساوی ہے" کے ہیں۔ ریاضی کے جملے دراصل مساواتیں ہیں اور علامت مساوات (=) کی دونوں جانب کے حصے جانبین یا طرفین کہلاتے ہیں۔ ریاضی نحوی قاعدوں کا تعلق زیادہ تر اس بات سے ہوتا ہے کہ مساوات کی طرفین میں کسی قسم کی تبدیلی کیوں کر کی جاسکتی ہے۔

مساوات کی ایک طرف میں جو تبدیلی کی جاسکتی ہے وہ صرف رقموں کی ترتیب کی تبدیلی ہے۔ جس طرح ایک فقرے میں بعض لفظوں کی ترتیب بدلنے سے اس کے معنی میں کسی قسم کی تبدیلی نہیں ہوتی اسی طرح ایک مساوات کی ایک طرف کی بعض رقموں کی ترتیب بدلنے سے مساوات میں کوئی فرق نہیں آتا۔ البتہ یہ تبدیلی صرف ان صورتوں میں ہو سکتی ہے جب کہ عامل \times اور $+$ استعمال کیے گئے ہوں نہ کہ عامل \div اور $-$ مثلاً

$$(۱) \quad a = b = c$$

$$\text{تو } b = a = c$$

$$(۲) \quad a = (b + c) = d$$

$$\text{تو } (b + c) = a = d$$

$$\text{اور } (c + b) = a = d$$

مساوات کی دونوں جانبوں میں ایک ہی مقدار جمع کرنے سے یا تفریق کرنے سے یا دونوں جانبوں کو ایک ہی مقدار سے ضرب دینے سے یا ایک ہی مقدار پر تقسیم کرنے سے مساوات میں کوئی فرق نہیں آتا۔ مثلاً

$$۱۱، اگر لا = ل$$

$$تو لا + ب = ل + ب$$

$$لا - ب = ل - ب$$

$$ب لا = ل ب$$

$$اور \frac{لا}{ب} = \frac{ل}{ب}$$

کسی مساوات کے حل سے مراد یہ ہے کہ نامعلوم مقدار کی قیمت معلومہ مقداروں کی رقم میں چل کی جائے۔ اس کے لیے یہ ضروری ہے کہ نامعلوم مقدار والی تمام رقمیں مساوات کی ایک جانب اور معلومہ مقداروں والی تمام رقمیں مساوات کی دوسری جانب لائی جائیں۔ مثلاً اگر دی ہوئی مساوات ہو

$$لا + ل = ب$$

تو اوپر کے قاعدے کی رو سے ہم مساوات کی دونوں جانبوں میں سے ل کو تفریق کرتے ہیں، اب مساوات ہو جاتی ہے

$$لا + ل - ل = ب - ل$$

$$یعنی لا = ب - ل$$

اس سے معلوم ہوتا ہے رقم ل کو مساوات کی دائیں جانب سے بائیں جانب لانے سے اس کی علامت بدل جاتی ہے۔ اسی طرح اگر دی ہوئی مساوات ہو

$$ب لا + ج = د$$

$$تو ب لا = د - ج$$

اور دونوں جانبوں کو ب پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

لا = $\frac{۵}{۳}$ ج

نوٹ :- یہ عمل ناممکن ہو اگر ب = صفر

اس موقعہ پر یہ بتا دینا ضروری ہے کہ ہمارے لیے نسبت و تناسب کے سوالوں کے حل میں وہ مشکلیں پیش نہیں آتیں جو یونانی ریاضی دانوں کو پیش آتی تھیں کیوں کہ آج کل ہمیں ہر طرف اور ہر وقت نسبت و تناسب اور تبدیلی کی شرحوں سے دوچار ہونا پڑتا ہے اور یہ تصورات ہمارا ذہنی ورثہ بن گئے ہیں۔ مثال کے طور پر موٹر کے پٹرول کا صرفہ لیا جائے۔ اگر موٹر ۳۵ میل فی گیلن جاتی ہے اور فاصلے کو ف سے تعبیر کیا جائے تو ہم لکھ سکتے ہیں۔

ف = ۳۵ میل

نیز فاصلہ ف میل طر کرنے کے لیے $\frac{۳۵}{۳}$ گیلن پٹرول کی ضرورت ہوگی۔ دراصل موٹر کی شرح ۳۵ میل فی گیلن، طر شدہ فاصلہ ف میل اور پٹرول کی مقدار ن گیلن میں ہمیشہ رشتہ ف = ن ش درست پایا جاتا ہے اور اس کی مدد سے ف، ن اور ش میں سے کسی دو کی قیمتیں معلوم ہوں تو تیسری مقدار فوراً معلوم کی جاسکتی ہے۔

اسی طرح اگر ہمیں یہ معلوم ہو کہ انار کا شربت بنانے کے لیے فی دو پیالی شیرے میں ۳ پیالی شکر ملائی جاتی ہے تو ہم فوراً بتا سکتے ہیں کہ $\frac{۳}{۲}$ = جہاں ف اور ق سے شیرہ اور شکر کی مقداریں مراد ہیں اور اس رشتے کی مدد سے ف اور ق میں سے کوئی ایک مقدار معلوم ہو تو دوسری مقدار معلوم کی جاسکتی ہے۔

کلمے کی دوسری فسیں - قواعد صرف و نحو اور پیمائش اور حساب

کے قاعدوں کی مشابہت کی مزید وضاحت کے لیے اب ہم یہ بتائیں گے کہ اسم اور فعل کے علاوہ عددوں کے قاعدوں میں کلمے کی اور کون سی قسمیں پائی جاتی ہیں اور کون سی نہیں پائی جاتی۔ ریاضی میں ہدا، حیرت، تاسف، تمنا وغیرہ کے لیے کوئی علامتیں نہیں ہیں کیوں کہ اس قسم کے جذبات کے لیے ریاضی میں بالکل گنجائش نہیں ہے۔ البتہ اسم صفت اور متعلق فعل (ADVERB) کے جواب میں ریاضی میں بھی علامتیں موجود ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ حرف لا سے ہم ایک عدد کو تعبیر کر سکتے ہیں۔ اگر اس قسم کے عددوں میں سے ایک خاص عدد مراد ہو تو ہم اس کے لیے علامت لاکر استعمال کر سکتے ہیں۔ اس علامت لاحقہ ۱ سے عدد لاکر صفت بیان ہوتی ہے جیسا کہ فقرہ ”کالی گائے“ میں لفظ ”کالی“ سے گائے کی صفت ظاہر ہوتی ہے۔ بالعموم علامت ۷ سے جذر المربع تعبیر کیا جاتا ہے۔ لیکن ۳ سے تیسرا جذر اور ۱۱ سے ن والا جذر مراد ہوتی ہے۔ اس صورت میں عامل یعنی علامت ۷ کے آگے جو عدد لکھا جاتا ہے اس سے عامل کے معنی میں تزییم ہوتی ہے۔ اس بنا پر ہم علامت ۱۱ میں ن کو متعلق فعل (ADVERB) کہہ سکتے ہیں۔

ریاضی میں صرف دو حروف عطف استعمال ہوتے ہیں، ایک (جس کے معنی ہیں اس لیے) اور دوسرا (؛ چوں کہ)۔ یہ دونوں علامتیں علم ہندسہ اور حساب میں کثرت کے ساتھ استعمال ہوتی ہیں۔ اسلوب بیان۔ کسی زبان کے اسلوب بیان اور ریاضی کے اسلوب بیان میں ایک دل چسپ مشابہت یہ ہے کہ دونوں صورتوں

میں غیر ضروری لفظوں کا استعمال جملے کے معنی کو غیر واضح کر دیتا ہے۔ ریاضیاتی جملوں میں ہمیشہ یہ کوشش کی جاتی ہے کہ رقموں کو اکٹھا یا ساقط کر کے اختصار کیا جائے۔ ذیل کی مثال سے رقموں کو اکٹھا کرنے کا طریقہ ظاہر ہوتا ہے:-

جملہ (۱۳ - ج + ب + ل - ا + ج + ب) کی بجائے مختصر طور پر ہم (۱۴ + ب - ج) لکھ سکتے ہیں۔
رقموں کو ساقط کرنے کے طریقے کی توضیح ذیل کی مثالوں سے ہوتی ہے:-

(۱) اگر $۱۳ + ب = لا + ب$ تو مساوات کی دونوں جانبوں میں سے ب کو ساقط کر کے ہم لکھ سکتے ہیں $۱۳ = لا$ ۔

$$\frac{۱}{۲} = \frac{۱ \times ۶}{۲ \times ۶} = \frac{۶}{۱۲} \quad (۲)$$

$$\text{اسی طرح } \frac{۳}{۵} = \frac{۳ \times ۱}{۵ \times ۱}$$

اس مثال میں شمار کنندہ اور نسب نامہ سے مشترک جز و ضربی کو ساقط کیا گیا ہے۔

حذف عبارت - روزمرہ بول چال میں ہم کبھی کبھی چند لفظ حذف کر دیتے ہیں جبکہ جملے کے معنی غیر واضح نہ بنتے ہوں۔ مثلاً "یہ روٹی لے جا" اس جملے میں "تو" حذف ہے اور اس لفظ کو حذف کرنے کے باوجود جملے کے معنی واضح ہیں۔ اسی طرح ریاضی میں چند علامتیں حذف کی جاتی ہیں۔ مثلاً اگر عدد "۱" سے ضرب دینا ہو یا تقسیم کرنا ہو تو اسے لکھا نہیں جاتا کیوں کہ اس سے نتیجے پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔ پس

$$\frac{1}{1} = 1 ; 1 = 1 \times 1 ; 1 = 1$$

نیز اگر $\frac{1}{1} = 1$ یا $1 = 1 \times 1$ لکھ سکتے ہیں $\frac{1}{1} = 1$ یا

$$\frac{1}{1} = 1 \text{ اور } \frac{1}{1} = 1$$

یہ بھی ہم دیکھ چکے ہیں کہ لا \times ما میں علامت \times کو حذف کر کے صرف لا ما لکھا جاتا ہے۔

ذیل کے سلسلے پر غور کرو۔ لا، لا^۳، لا^۵۔۔۔۔۔

اس سلسلے میں ہر رقم کے عددی سرا اور قوت نما کا باہمی رشتہ واضح ہوتا ہے جب کہ ہم لکھیں لا^۳، لا^۵۔۔۔۔۔

نیز $\frac{1}{1} = 1$ جب کہ $\frac{1}{1}$ صفر نہ ہو۔ اس نتیجے کی مدد سے ہم سلسلہ $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$ کو ذیل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$ جس سے صاف ظاہر ہوتا ہے کہ اس سلسلے کی رقمیں سلسلہ وار گھٹتی جاتی ہیں۔

مجاورہ۔ ساتویں باب میں زبان کے قواعد اور ریاضی کے قاعدوں کی مزید مشابہت واضح کرنے کے لیے ریاضی کے محاوروں پر بحث کی جائے گی اور یہ بتایا جائے گا کہ ریاضیاتی جملے کے معنی پر علامتوں کی ترتیب کا انٹرکس طرح پڑتا ہے۔

اس باب کو ختم کرنے سے پہلے یہ بتادینا ضروری ہے کہ کسی ریاضیاتی جملہ (مثلاً ضابطہ یا مساوات) کا ترجمہ معمولی بول چال میں کرنے سے قبل اس جملے کو اعداد میں لے آئیں تو اس کے معنی زیادہ واضح ہوتے ہیں اور اس کے بعد ترجمہ آسانی سے کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً اگر یہ دیا جائے کہ کسی موٹر کا طر شدہ فاصلہ ف ایسے بدلتا ہے جیسے صرف شدہ پٹروں کی مقدار ق تو اس کے معنی یہ ہیں کہ ف اور ق

کی نسبت مستقل ہے۔ اب خاص مثال کے طور پر فرض کرو کہ $\frac{۳۵}{ق} = ۳۵$ تب $ق = ۳۵$ ۔ اس مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ طر شدہ فاصلہ (میلوں میں) صرف شدہ پیرٹول کی مقدار (گیلن میں) کا ۳۵ گنا ہوتا ہے۔ اب اگر خاص مستقل ۳۵ کی بجائے کوئی مستقل $م$ لیں تو اوپر کا نتیجہ لکھا جاسکتا ہے، $ق = م$ جہاں $م$ تغیر کا مستقل کہلاتا ہے اسی طرح کسی دیے ہوئے ضابطہ کے معنی سمجھنے میں خاص عددی مثالوں سے مدد لی جاسکتی ہے۔

مشقیں

- (۱) ہندسی شکل کے ذریعے یہ بتاؤ کہ $۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱۰ = ۵۵$ کی قیمت معلوم کرو۔
- (۲) مندرجہ ذیل کا ترجمہ ریاضی کی زبان میں کرو :-
(ا) ایک عدد کے ۴ گنے میں ۱۵ جمع کر کے حاصل شدہ عدد کو ۷ پر تقسیم کرنے سے عدد ۱۱ حاصل ہوتا ہے۔
(ب) ایک کمرے کا طویل اس کے عرض کا دو گنا ہے اور کمرے کا رقبہ ۲۰۰ مربع فٹ ہے۔
- (ج) میرا دوست مجھ سے ۳ سال چھوٹا ہے، ہم دونوں کی عمروں کا مجموعہ ۳۷ سال ہے۔

(۴) مختصر کرو۔ $۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱۰ - ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱۰$

(۵) ذیل کی سادہ مساوتوں کو حل کرو :- (ا) $۱۳ = ۷ + ۲۳$

(ب) $\frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۴}$ (ج) $\frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۸}$ (د) $\frac{۱۵}{۷} = ۷$

چوتھا باب

تسہیل علم ہندسہ
یا

علم ہندسہ سے ہم کیا کام لے سکتے ہیں؟

پہلے تین بابوں میں ہم نے ریاضی کی ابتدائی تشکیل کا خاکہ کھینچا ہے اور بتایا ہے کہ تقریباً دو ہزار سال ق۔م۔ تک بھی انسان نے گنتی اور پیمائش کے کوئی عام اصول اور قاعدے دریافت نہیں کیے تھے۔ ریاضی کی ابتدا تو ہو چکی تھی لیکن اصولوں اور قاعدوں کی تنظیم عمل میں نہیں آئی تھی۔ ریاضی کی معلومات، خاص خاص قاعدوں کی شکل میں، استاد سے شاگرد تک، مذہبی پیشواؤں سے ان کے جانشینوں تک اور ماہر کاری گروں سے بتدیوں تک سینہ بہ سینہ منتقل ہوتی تھیں۔ اس لیے قدیم زمانے میں اور علوم کی طرح ریاضی پر کتابیں نہیں لکھی گئیں۔ قدیم زمانے کی مفید اور کارآمد ریاضیاتی معلومات کا اندازہ مصریوں کے غیر فانی اور عظیم الشان تعمیری شہ کاروں سے کیا جاسکتا ہے اور یہ قیاس غالباً صحیح ہے کہ اُس زمانے میں ریت پر کھنچی ہوئی شکلوں کی مدد سے عبادت خانوں اور دوسری عمارتوں کے خاکے

تیار کیے جاتے تھے۔ دراصل انہی خاکوں سے علم ہندسہ کی ابتدا ہوئی تھی۔ حقیقت تو یہ ہے کہ رستی، کھونٹی، شافول اور سطح آب کی مدد سے عملی علم ہندسہ کے سوالوں کا حل نظری علم ہندسہ پر کتابیں لکھنے سے بہت زیادہ اہم اور قابلِ قدر ہے۔

ریاضی پر سب سے پہلی کتابیں چینیوں نے لکھیں۔ غالباً فیثاغورث سے کم از کم ۱۵۰۰ سال قبل چینیوں کو قائمہ الزاویہ مثلث کی مشہور خاصیت کا علم تھا جیسا کہ ان کی ایک قدیم کتاب میں دی ہوئی ہندسی شکل سے پتا چلتا ہے۔ اس بات کے ماننے کے لیے بھی کافی ثبوت موجود ہے کہ چینی ریاضی داں عددوں کی کسی دل چسپ خاصیتوں سے واقف تھے۔ غالباً انہیں عددوں کی ایسی جماعتوں کا بھی علم تھا جو آج کل اعداد و شمار میں بہت اہمیت رکھتی ہیں۔ افسوس ہے کہ ان کے علم کا بیش تر حصہ تباہ و برباد ہو گیا جب کہ ان کے ایک شہنشاہ کے حکم سے کتب خانے جلا دیے گئے کیوں کہ اُس شہنشاہ کا خیال تھا کہ اگر لوگ کتابیں کم پڑھیں گے تو وہ زیادہ اچھی کتابیں تصنیف کر سکیں گے۔

چوں کہ چینی ریاضی داں اور تقویم ساز کسی مذہبی جماعت کے رکن نہیں ہوتے تھے اس لیے ان کے علم کی ترقی کی راہ میں رکاوٹوں کا اندیشہ کم تھا اور وہ اپنے ہم عصروں سے بہت آگے بڑھ سکتے تھے لیکن ان کا نقشی طرزِ تحریر ان کی ترقی کے راستے میں سنگِ گراں ثابت ہوا۔ تقریباً اسی زمانے میں جب کہ چین میں ریاضی پر پہلی کتابیں لکھی جا رہی تھیں، یونان کی سرزمین پر شمالی یورپ کے خانہ بدوش آریائی وحشیوں نے حملہ کیا۔ وہ لکھنا پڑھنا بالکل نہیں جانتے تھے اور

نہ فن تعمیر اور تجارت سے واقف تھے۔ اُن کے ہاں وزن اور ناپ کے پیمانوں کا وجود تک نہ تھا۔ جب یہ وحشی یونان سے ہوتے ہوئے ایشیائے کوچک کے ساحلی شہروں تک پہنچے، جہاں انھوں نے چھوٹی چھوٹی ریاستیں اور شہری ممالکتیں قائم کیں، تو وہ سامی تہذیب سے دوچار ہوئے اور شامیوں کے ساگردوں کے زمرے میں داخل ہوئے۔ ان وحشیوں کے لیے ان کی ابتدائی بھالت ہی سفید ثابت ہوئی۔ انھوں نے نقشی طرز تحریر کی بجائے انھیں رمزوں سے اپنی زبان کی سادہ آوازوں کو تعبیر کیا اور اس طرح سے عربی کی ابتدا ہوئی اور نقشی علامتیں صوتی حروف کی صورت میں تبدیل ہو گئیں۔

یہ خیال کہ یونانیوں کی علمی ترقی ان کی نسلی فوقیت پر مبنی تھی۔ بالکل بے بنیاد اور غلط ہے کیوں کہ یونان کے سب سے بڑے دو ریاضی دان، طالیس اور فیثاغورث، جو دراصل اقلیدسی علم ہندسہ کے بانی ہیں، فنیقی (یعنی سامی) نسل کے تھے اور ان کی رگوں میں آریائی خون قطعاً موجود نہ تھا۔ فیثاغورث کی تعلیمات میں چینی اثر کا صاف پتا چلتا ہے۔ فیثاغورث نے براعظم ایشیا کی سیاحت کی اور اس کی ذہنی تربیت اُن لوگوں میں ہوئی جو بڑی راستوں سے ایشیا کے دُور دراز ملکوں میں تجارت کرتے تھے۔ طالیس بھی ایک سوداگر تھا اور فن انجیری سے واقف تھا۔ اس نے اپنی تجارت کے سلسلے میں دُور دراز مقاموں کا سفر کیا اور ایک عرصے تک مصر میں رہ کر مصری ریاضی دانوں سے علم حاصل کیا۔ اس نے سلیے کی پیمائش سے مصر کے بڑے ہرم کی بلندی دریافت کی اور ۲۸ مئی ۵۸۵ ق۔ م

کے گریہ کی پیش گوئی کی۔ اس موقع پر یہ بتا دینا دل چسپی سے خالی نہ ہوگا کہ طالب علم نے کبھی بھی ریاضی کو روحانی کمال حاصل کرنے کا ذریعہ نہیں خیال کیا جیسا کہ افلاطون اور اس کے شاگردوں کا خیال تھا۔ شاید طالب علم اور دوسرے یونانی علما کے لیے ان کا جغرافیائی محل وقوع مفید ثابت ہوا اور وہ مذہبی پیشواؤں کے مضر اثر سے محفوظ رہے۔ یونان کے سب سے بڑے مادہ پرست حکیم دیمقراطیس کی تصنیفوں سے اس بات کا پتا چلتا ہے کہ یونانی ریاضی داں اور سائنس داں مذہبی جماعت کے مضر اثر سے آزاد تھے۔ یہی وجہ ہے کہ افلاطون نے جو علم ہندسہ کو صرف ذہنی کھیل خیال کرتا تھا۔ دیمقراطیس کی تمام تصنیفوں کو جلا دینے کی خواہش کی تھی۔ جب اسکندریہ کا پہلا کتب خانہ رومی سپہ سالار جولیس سیزر کے حکم سے جلا دیا گیا تو دیمقراطیس اور اسکندریہ کے ہیئت والوں کی گراں قدر تصنیفیں برباد ہو گئیں لیکن افلاطون اور ارسطو کے فاسد نظریے مٹ نہ سکے۔ اقلیدس نے افلاطونی علم ہندسہ کو اسکندریہ میں رواج دیا اور یہ بات اپنے طلبہ کے ذہن نشین کرانے کی کوشش کی کہ علم ہندسہ کو عملی طور پر استعمال کرنا ہرگز درست نہیں ہے۔ لیکن اسکندریہ کے محنتی اور بلند ہمت طلبہ نے اپنے استاد کی تاکید کے باوجود علم ہندسہ کا عملی استعمال معلوم کیا اور اس کی مدد سے بہت سے کارآمد مسئلے حل کیے۔

اقلیدس کی کوتاہیاں۔

بچھلے چند سال میں این سٹائن (EINSTEIN) اور ارنسٹ ماخ (ERNST MA. H) کی انقلاب انگیز تحقیقات کی وجہ سے علم ہندسہ کے مستعات ہمارے زاویہ نگاہ میں بہت بڑی تبدیلی ہو گئی ہے۔ اب ہمیں یہ

معلوم ہو چکا ہے کہ اقلیدس کا علم ہندسہ فضا کی پیمائش اور مساحت کے لیے صحیح ترین ذریعہ نہیں ہے۔ اس کا مطلب یہ نہیں ہے کہ اقلیدسی علم ہندسہ مفید نہیں ہے۔ البتہ نئی تحقیقات نے اقلیدسی علم ہندسہ کی خامیاں ظاہر کر دی ہیں۔ اقلیدس کے علم ہندسہ کی قدر و قیمت کا صحیح اندازہ لگانے کے لیے یہ ضروری ہے کہ ان کوتاہیوں پر ابتدا ہی میں نظر ڈالی جائے۔ یہ ظاہر ہے کہ غذا اور تزکاری تو لے کے لیے معمولی ترازو، حساس کیمیاوی ترازو سے زیادہ کارآمد ہوتا ہے کیوں کہ کیمیاوی ترازو کی نزاکت اور صحت ہی اس کو معمولی کام کاج کے لیے غیر موزوں بنا دیتی ہے۔ اسی طرح اقلیدسی علم ہندسہ بھی زمین کی معمولی پیمائشوں کے لیے زیادہ کارآمد ہوتا ہے۔ لیکن کسی سماجیے (NEBULA) کا فاصلہ معلوم کرنے کے لیے اقلیدس کا علم ہندسہ مفید ثابت نہیں ہوتا۔ مثلاً انڈرومیڈا (ANDROMEDA) کے بڑے سحاب کا فاصلہ معلوم کرنے کے لیے اقلیدسی علم ہندسہ سے کام نہیں لیا جاسکتا۔ سحاب ہم سے ۱۰۰۰۰۰ (دس لاکھ) نوری سال کی دوری پر ہے۔ اس کے معنی یہ ہیں کہ اس کی روشنی یا نور جس کی رفتار ۱۸۶۰۰۰۰ میل فی ثانیہ (سکنڈ) ہے۔ اس سحاب سے زمین تک دس لاکھ سال میں پہنچتا ہے۔ اقلیدسی علم ہندسہ کی یہ کوتاہی چنداں تعجب انگیز نہیں کیوں کہ اقلیدسی علم ہندسہ اپنے زمانے کے حالات کا پابند تھا۔ جس طرح یونانی حساب اکلینر اور کچھوے کی دوڑ کے سوال کو حل نہ کر سکا اسی طرح اقلیدسی علم ہندسہ بھی سحابیوں کے فاصلوں کی پیمائش میں ناکام رہا۔ اقلیدسی علم ہندسہ زمین کے قطعوں کی مساحت، ریت پر کھنچی ہوئی شکلوں کے ذریعے مندروں اور دوسری عمارتوں کے خاکوں کی تیاری اور سایوں کی مدد سے میناروں

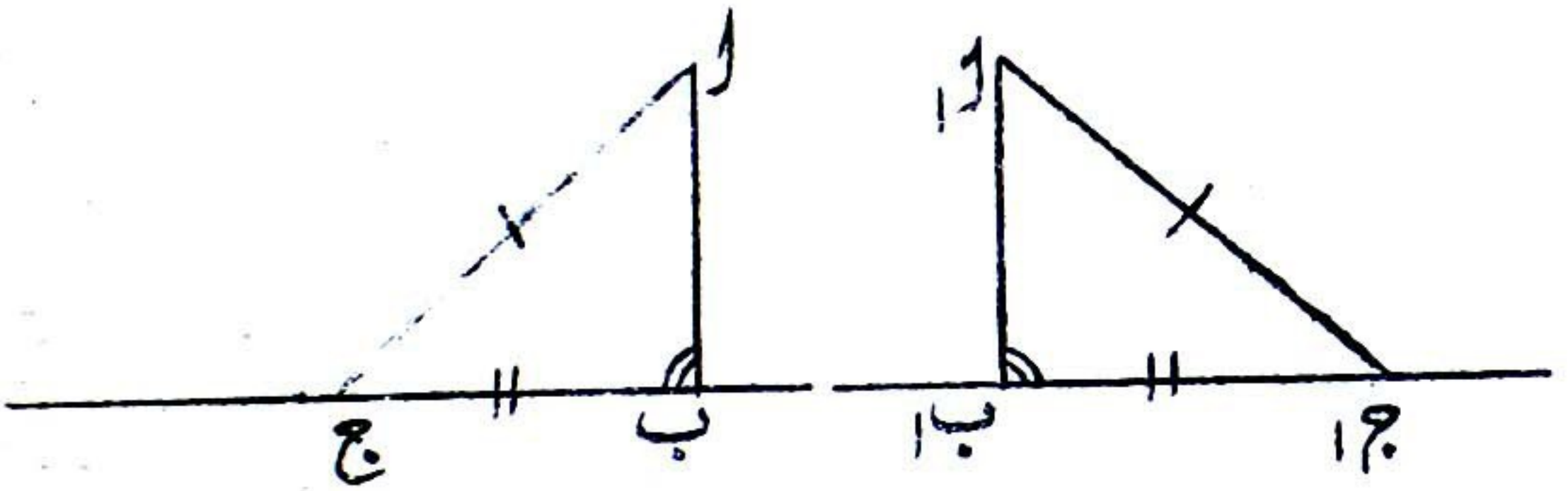
کی بلندیاں معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا تھا۔ اس علم ہندسہ کی غرض و غایت اشیا کے طویل، رقبے اور حجم معلوم کرنا تھی اور چوں کہ اکثر اشیا میں جلد تبدیلی ہونے کا امکان نہیں ہے اس لیے اقلیدسی علم ہندسہ نے ”وقت“ کو اپنی ساحت میں جگہ نہیں دی۔ اس علم ہندسہ کے خط، زاویے اور شکلیں ناقابلِ تغیر ہیں۔ اس لیے جب ہم اقلیدسی علم ہندسہ کی شکلوں کو تغیر پذیر دنیا میں استعمال کرتے ہیں تو ہمیں یہ یاد رکھنا پڑتا ہے کہ ہم نے اس تصویر کے ایک جزو کو نظر انداز کر دیا ہے۔ جب ہم کہتے ہیں کہ کسی صندوق کا حجم اتنا ہے تو اس سے ہمارا مطلب یہ ہوتا ہے کہ صندوق کی ساخت کی وجہ سے اس کے بالکل ٹوٹ جانے تک اس کے حجم میں کسی قسم کی تبدیلی نہیں ہوگی۔ اس قسم کے حسابات میں ”وقت“ کو بالکل داخل نہیں کیا جاتا۔ اسی طرح جب ہم کہتے ہیں فلاں کھیت کا رقبہ اتنا ہے تو ہم کھیت کے رقبے کی اس کمی کو نظر انداز کرتے ہیں جو زمین کے سکڑنے کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے۔ اگر دو کھیت ایسے ہوں کہ ایک کا طویل (۲۰۰) گز اور عرض (۱۰۰) گز ہو اور دوسرے کا طویل (۲۲۵) گز اور عرض (۷۵) گز ہو اور ان کھیتوں کے اطراف ہم دیوار بنانا چاہیں تو دیوار کے طول کے لحاظ سے یہ دونوں کھیت مساوی ہوں گے لیکن ان کے رقبے ایک دوسرے کے برابر نہیں ہوں گے۔ دیوار کا طویل ناپنے کے وقت ہم کھیتوں کے رقبوں کو نظر انداز کرتے ہیں کیوں کہ دیوار کی تعمیر کے وقت کھیت کا رقبہ کوئی اہمیت نہیں رکھتا۔ رقبے کا لحاظ اس وقت کیا جاتا ہے جب کہ کھیت میں کاشت کرنا ہو۔

یونانی مفکرین ناپ اور پیمائش کی ان باریک ضرورتوں میں امتیاز

نہ کر سکے اور یہ بھی نہ دیکھ سکے کہ ناپ کی اکائی اس کے معاشی استعمال کے ساتھ ساتھ بدلتی رہتی ہے۔ اس لیے جب انھوں نے ہندسی شکلوں کی تحلیل شروع کی تو نقطہ خط اور زاویے کو مادے سے خالی فرض کیا اور اس مغالطے میں مبتلا ہوئے کہ انھیں ازلی وابدی حقیقت کا سراغ مل گیا ہے۔ انھوں نے یہ خیال کیا کہ ایک نقطہ، جس کا کوئی طول اور عرض نہ ہو بلکہ محض مقام ہو، وجود رکھ سکتا ہے۔ اسی طرح ایک خط جس کی صرف لمبائی ہو اور کوئی چوڑائی نہ ہو وجود رکھتا ہے۔ انھوں نے یہ یقین کر لیا کہ اس ہمیشہ بدلنے والی دُنیا میں انھوں نے نہ بدلنے والی مقداروں کا پتہ لگایا اس لیے اُن کی یہ ہندسی مقداریں تغیر اور وقت کی قید سے آزاد مان لی گئیں اور ان مجرد تصوروں کی مدد سے انھوں نے استدلال کی ایک مستحکم عمارت بنانے کی کوشش کی۔ یہی وجہ ہے کہ اقلیدس کا علم ہندسہ صحابوں کے فاصلے کی پیمائش میں کارآمد نہیں ہوتا کیوں کہ ان پیمائشوں میں وقت کو ہرگز نظر انداز نہیں کیا جاسکتا۔

اقلیدسی علم ہندسہ کی مذکورہ بالا کوتاہی کے علاوہ ایک اور کوتاہی اس وقت ظاہر ہوئی جب عرب ریاضی دانوں نے علم ہندسہ کی مدد سے حساب اور جبر و مقابلہ کے عملی سوال حل کرنے کی کوشش کی اور یہ پایا کہ ہندسی شکلوں کی مدد سے سوال کا صرف ایک ہی حل نکلتا ہے حالانکہ سوال کے ایک سے زیادہ حل ہو سکتے ہیں۔ علم ہندسہ کی اس کوتاہی کی وجہ یہ تھی کہ اس میں ہندسی شکلوں کے محل وقوع کو بھی وقت کی طرح نظر انداز کر دیا گیا تھا۔ یعنی دو شکلیں جو دراصل اپنے

محل وقوع کے لحاظ سے ایک دوسرے کے برابر نہیں تھیں انھیں اقلیدسی علم ہندسہ میں ایک دوسرے کے بالکل برابر قرار دیا تھا۔ اس کی توضیح ذیل کے دو مثلثوں سے ہو سکتی ہے جو اقلیدس کے قاعدوں کی رو سے تو ہر طرح سے برابر ہیں لیکن ان کے محل وقوع مختلف ہونے کی وجہ سے وہ ایک دوسرے کے برابر نہیں ہیں۔



جب انسان کو اپنی روز افزوں تجارتی ضرورتوں کی وجہ سے سمندر پر حرکت کرنے والے جہاز کے محل وقوع کو متعین کرنے کی سخت ضرورت پیش آئی تو ایک نیا علم ہندسہ ایجاد ہوا جس میں نہ صرف ”محل وقوع“ کو بلکہ ”وقت“ کو بھی ملحوظ رکھنا ضروری ہوتا ہے۔

یونانی علم ہندسہ میں دو شکلوں کو آپس میں ہر طرح سے مساوی ثابت کرنے کے لیے ان شکلوں کو مثلثوں میں اس طرح تقسیم کیا جاتا ہے کہ ایک شکل کے مثلث دوسری شکل کے مثلثوں کے جدا جدا برابر ہوں۔ اس طرح کے مقابلے کے لیے ذیل کے تین قاعدے، جو علی نقطہ نظر سے بدیہی ہیں، کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

قاعدہ (۱) دو مثلث آپس میں ہر طرح سے مساوی ہوتے ہیں اگر ایک مثلث کے تین ضلعے دوسرے مثلث کے تین ضلعوں کے جدا جدا برابر ہوں۔

قاعدہ (۲) دو مثلث آپس میں ہر طرح سے مساوی ہوتے ہیں اگر ایک مثلث کے دو ضلعے اور ان کا درمیانی زاویہ دوسرے مثلث کے دو ضلعوں اور ان کے درمیانی زاویے کے جُدا جُدا برابر ہوں۔

قاعدہ (۳) دو مثلث آپس میں ہر طرح سے مساوی ہوتے ہیں اگر ایک مثلث کا ایک ضلع اور اس ضلعے کے سروں پر کے زاویے دوسرے مثلث کے ایک ضلعے اور اس کے سروں پر کے زاویوں کے جُدا جُدا برابر ہوں۔

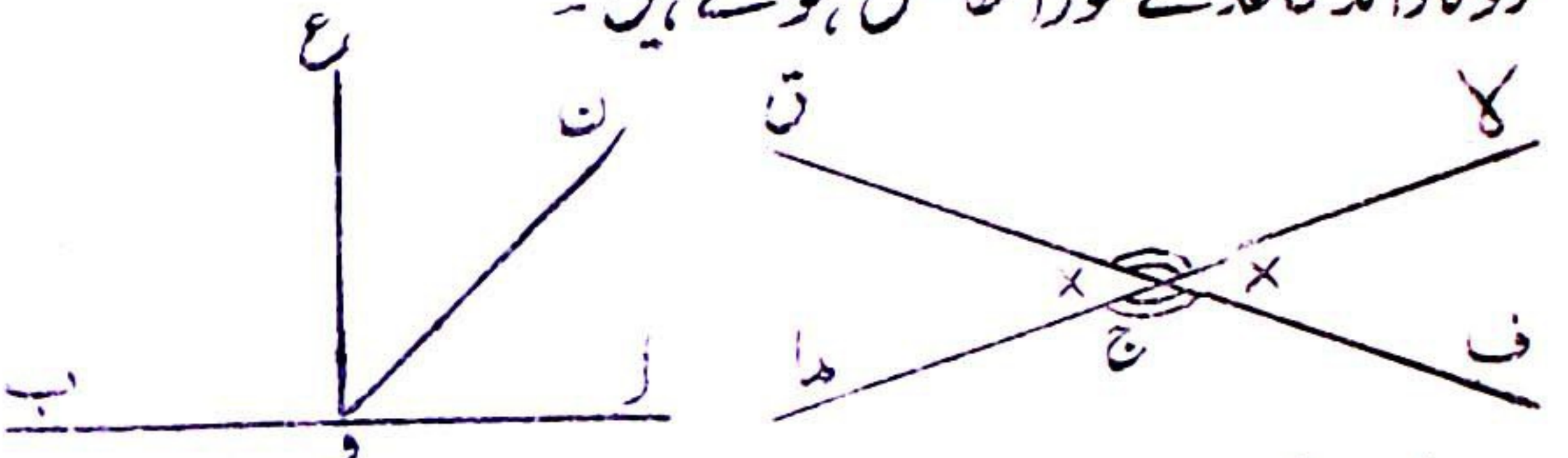
ان تین قاعدوں کی تصدیق آسانی کے ساتھ اس بات سے ہوتی ہے کہ اگر مثلث کے (۱) تین ضلعے دیے جائیں یا (۲) دو ضلعے اور ان کا درمیانی زاویہ دیا جائے یا (۳) ایک ضلع اور اس کے سروں پر کے زاویے دیے جائیں تو مثلث بنانے کا عمل یگانہ ہوتا ہے یعنی مثلث کے بنانے میں کوئی اشتباہ نہیں ہوتا ہے۔

اقلیدسی علم ہندسہ کی ایک اور کوتاہی یہ ہے کہ اس کی تشکیل میں نسبت و تناسب کے اصول کو ابتداء ہی سے استعمال کرنے کی بجائے بالکل آخر میں استعمال کیا گیا ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ اس زمانے کے ماحول میں نسبت و تناسب کی ضرورت اس قدر عام نہیں تھی جیسا کہ موجودہ زمانے میں ہے۔ یونانی ریاضی دان عددوں کی نسبتوں سے پوری طرح واقف نہ تھے کیوں کہ عددوں کی غیر موزوں تحریر کی وجہ سے وہ تقسیم کا عمل نہایت پیچیدہ طریقے سے گنتارے کی مدد سے کرتے تھے۔ چونکہ ہمارے زمانے میں ان شرح تبدیلی معلوم کرنے کے لیے نسبت و تناسب کا استعمال ہوتا ہے اس لیے ہمیں مثلثوں کی ایک اور نہایت اہم خاصیت سمجھنے میں وہ مشکلیں پیش نہیں آئیں جو اقلیدس کے شاگردوں کو پیش آتی تھیں۔ عملی طریقے سے

آسانی سے تصدیق کی جاسکتی ہے کہ اگر ایک مثلث کے زاویے دوسرے مثلث کے زاویوں کے جُدا جُدا برابر ہوں تو ان مثلثوں کے نظیر کے ضلع (یعنی مساوی زاویوں کے مقابل کے ضلع) متناسب ہوتے ہیں یعنی ان کے طُولوں میں ایک ہی نسبت ہوتی ہے۔ مثلثوں کی اس اہم اور کارآمد خاصیت کا ایک انکشاف اقلیدس سے تقریباً ۲۵۰ سال قبل ایونہ کے ریاضی داں طالیس نے کیا تھا لیکن اقلیدس اور اس کے بعد کے ریاضی دانوں نے عددوں کی نسبتوں کو علم ہندسہ سے خارج کر کے اس مسئلے کے استعمال سے فائدہ حاصل نہیں کیا۔ موجودہ زمانے میں مثلث کے ضلعوں کی نسبتیں ہر وقت استعمال میں آتی ہیں۔ چناں چہ ریل کی پٹریوں کے میلان کو ظاہر کرنے کے لیے سڑک کے بازو کی ایک نسبت درج ہوتی ہے۔ مثلاً اگر یہ درج ہو کہ سڑک کا میلان $\frac{1}{4}$ ہے تو اس کے معنی صرف یہ ہیں کہ اگر سڑک پر فاصلہ (۱۰) اکائی طُول طر کیا جائے تو مقام کی بلندی میں ایک اکائی طُول کا اضافہ ہو گا یا کمی ہوگی۔ علم مثلث اور علم احصا میں زیادہ تر تبدیلی کی شرحوں یعنی نسبتوں ہی سے بحث کی جاتی ہے۔ ریاضی کی ان کارآمد شاخوں کا ذکر چھٹے باب میں کیا جائے گا۔ اس باب میں ہم یہ بتائیں گے کہ تشابہ مثلثوں کی مندرجہ بالا اہم خاصیت کی مدد سے کس طرح فاصلے اور بلندیاں معلوم کی جاسکتی ہیں۔

چوں کہ عمارتوں کی تعمیر میں قائمہ زاویہ کی ضرورت پیش آتی ہے اس لیے قدیم ریاضی دانوں نے بھی دو زاویوں کے مقابلے کے لیے قائمہ زاویہ کو اکائی کے طور پر اختیار کیا۔ یہ عام مشاہدہ ہے کہ شاقول کی ڈوری افقی خط کے ساتھ دو مساوی زاویے بناتی ہے۔ ان زاویوں

میں ہر ایک کو قائمہ زاویہ کہتے ہیں۔ نیز اگر شاقول کی ڈوری اور افقی خط کے نقطہ تقاطع میں سے ان دو خطوں کی مستوی سطح میں کوئی خط کھینچا جائے تو یہ خط شاقول کی ڈوری اور افقی خط کے ساتھ جو زاویے بناتا ہے ان کا مجموعہ ایک قائمہ زاویہ کے برابر ہوتا ہے۔ ایسے دو زاویے جن کا مجموعہ ایک قائمہ زاویہ کے برابر ہو مستقیم زاویے کہلاتے ہیں۔ زاویے کی پیمائش میں سہولت کی خاطر قائمہ زاویہ کو (۹۰) مساوی حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے جن میں سے ہر ایک حصہ ایک درجہ کہلاتا ہے۔ ذیل کی دو شکلوں سے زاویوں کے متعلق دو کارآمد قواعد فوراً حاصل ہوتے ہیں۔

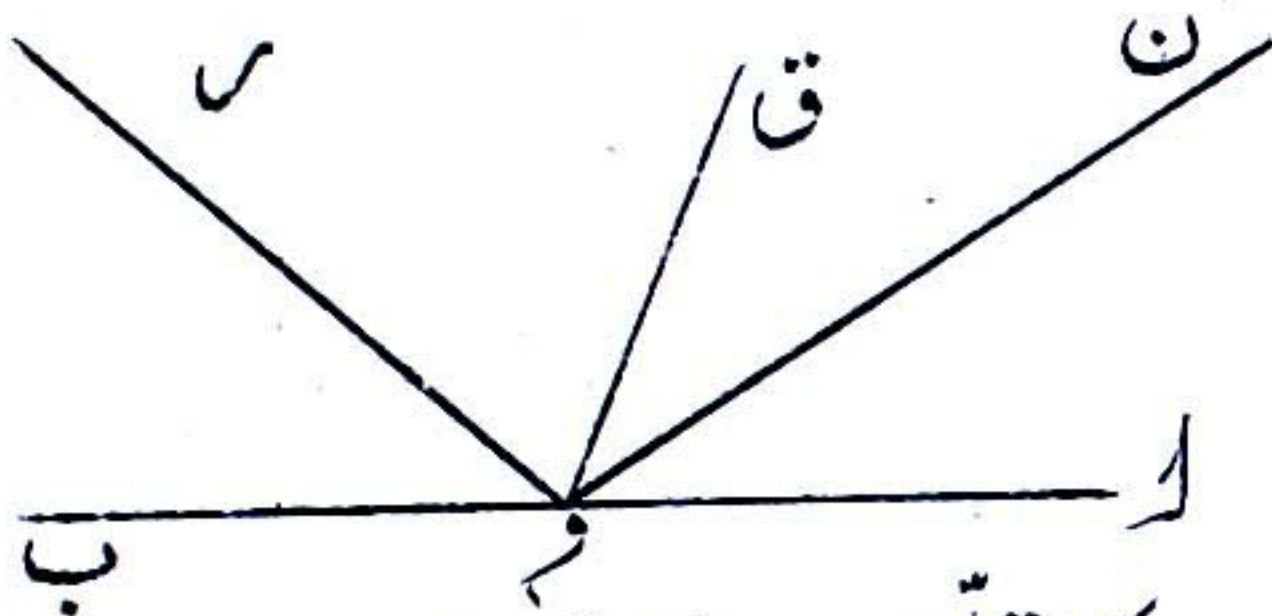


قاعدہ (۱) اگر ایک خط مستقیم 'ب' کے ایک نقطہ 'و' میں سے کوئی خط 'ون' کھینچا جائے تو $\angle و ن + \angle ن ب =$ دو قائمہ زاویے ہوں گے۔

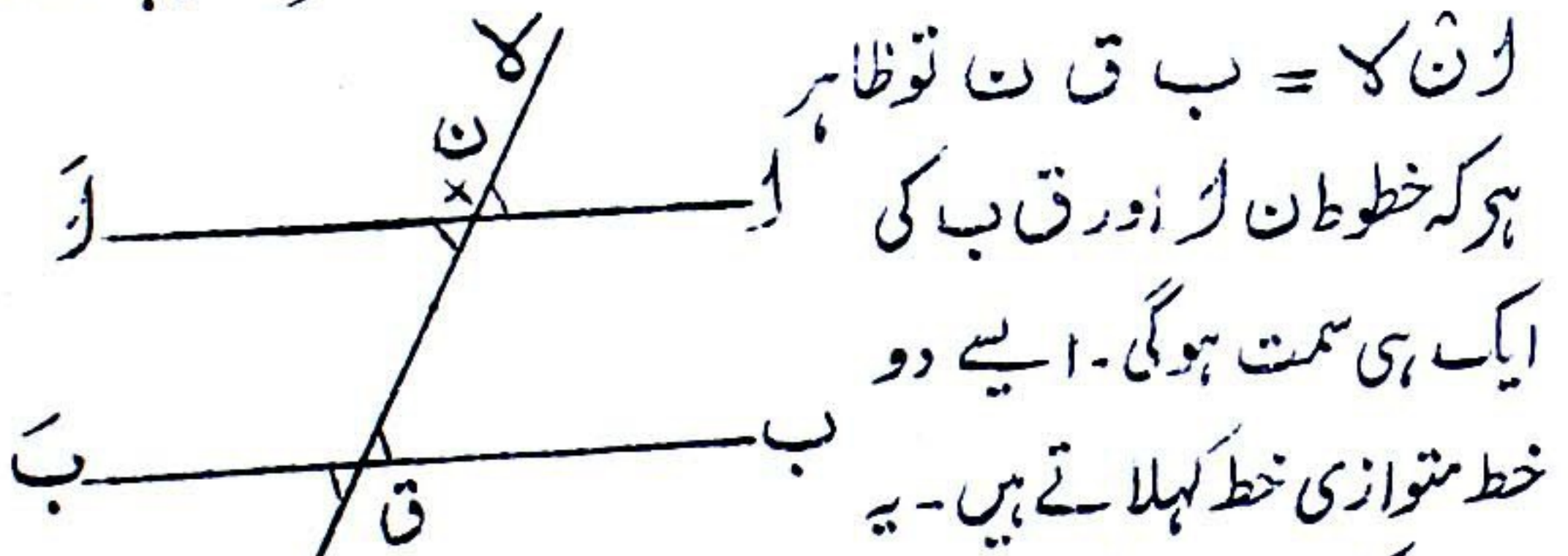
قاعدہ (۲) اگر دو خط مستقیم ایک دوسرے کو قطع کریں تو مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

قاعدہ (۱) سے حسب ذیل نتیجہ فوراً حاصل ہوتا ہے۔

اگر ایک خط مستقیم کے کسی نقطے میں سے اس خط کی ایک ہی جانب کسی خط کھینچے جائیں تو اس طرح سے جو زاویے بنتے ہیں ان کا مجموعہ دو قائمہ زاویوں کے مساوی ہوتا ہے۔ مثلاً ذیل کی شکل میں $\angle و ن + \angle ن ق + \angle ق و =$ دو قائمہ زاویے۔



زاویوں کے متعلق دو اور کارآمد قاعدے متوازی خطوں کی مدد سے حاصل ہوتے ہیں۔ اگر ایک خط مستقیم لاہا پر دو نقطے پ ن اور ق لیے جائیں اور ن اور ق میں سے خطوط ن ل اور ق ب اس طرح کھینچے جائیں کہ



ل ن کا = ب ق ن تو ظاہر

ہو کہ خطوط ن ل اور ق ب کی ایک ہی سمت ہوگی۔ ایسے دو

خط متوازی خط کہلاتے ہیں۔ یہ

دو خط کسی دوری تک خارج کیے جائیں تو بھی ایک

دوسرے کو قطع نہیں کریں گے۔ شکل سے یہ ظاہر ہے کہ ل ن ق = ل ن کا

لیکن ل ن کا = ب ق ن

اس لیے ل ن ق = ب ق ن

ان نتیجوں کے عکس بھی درست ہیں۔ یعنی اگر دو خط ل ل اور ب ب

متوازی ہوں (یعنی ایک ہی مستوی میں ہوں اور ایک دوسرے کو قطع نہ

کریں) اور انھیں ایک خط مستقیم کان ق ما کاٹے تو (۱) متبادل

زاویے مساوی ہوں گے۔

یعنی ل ن ق = ن ق ب اور ل ن ق = ن ق ب

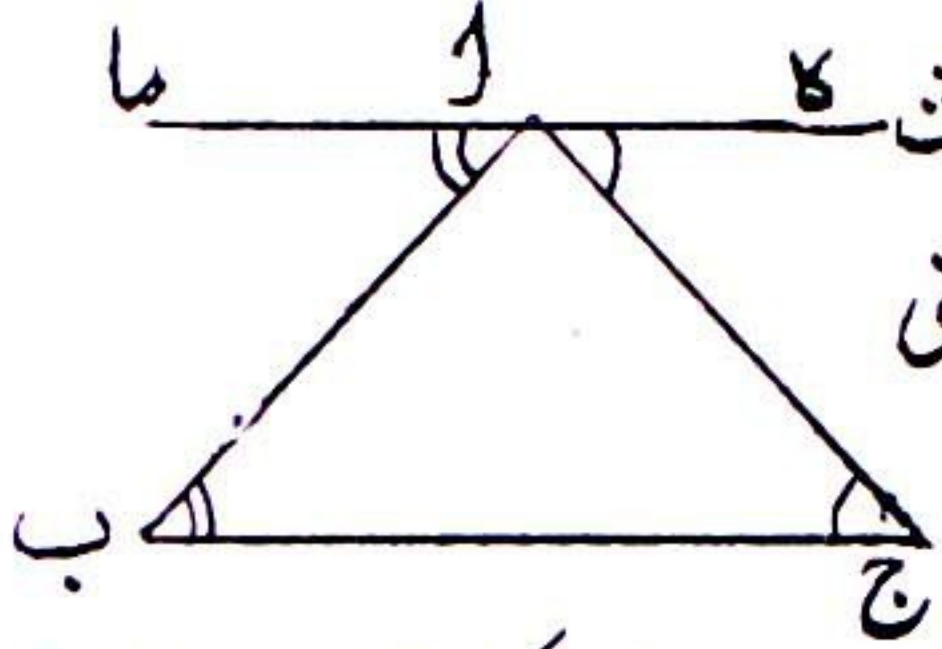
(۲) نظیر کے زاویے مساوی ہوں گے۔

یعنی کان ل = ن ق ب اور کان ل = ن ق ب

اوپر کی شکل میں جو آٹھ زاویے ہیں ان میں سے چار ایک دوسرے کے برابر ہیں اور بقیہ چار زاویے ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔

متوازی خطوں کے ان قاعدوں سے کسی مثلث کے تین زاویوں کے مجموعے کے متعلق ایک کارآمد قاعدہ آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔

مثلث کے زاویوں کا قاعدہ - کسی مثلث کا
 کے تین زاویوں کا مجموعہ دو قائمہ زاویوں یعنی
 (۱۸۰) کے برابر ہوتا ہے۔

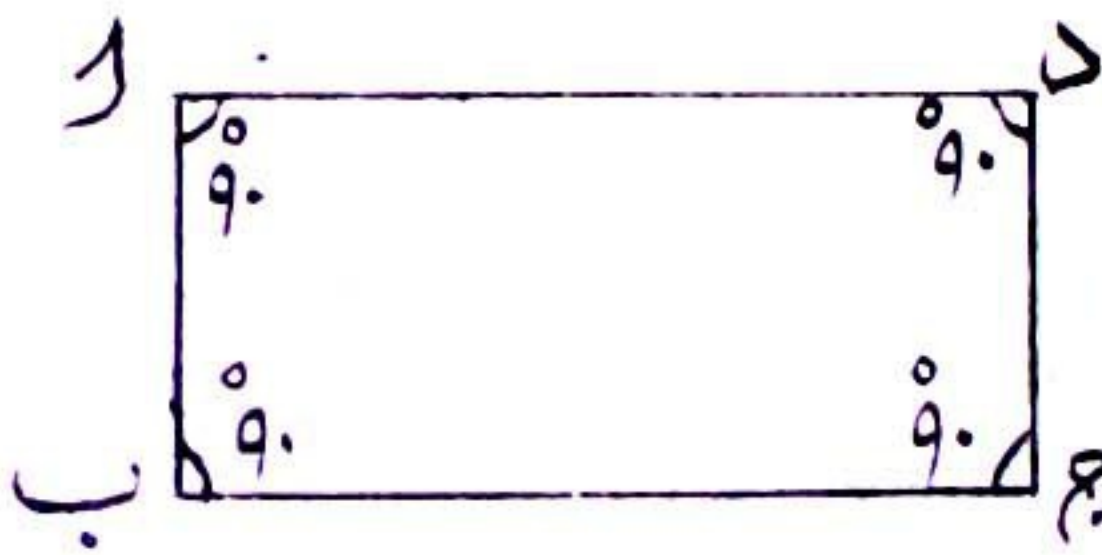


اگر مثلث 'ا ب ج' کے راس 'ا' میں سے 'ب ج' کے متوازی خط
 کا ما کھینچا جائے تو شکل سے اوپر کا قاعدہ فوراً حاصل ہوتا ہے۔

نوٹ - مثلث کے لیے علامت Δ استعمال کی جاتی ہے۔

عمارقوں کی تعمیر میں ایک نہایت کارآمد شکل مستطیل ہے۔ یہ وہ چار

ضلعی شکل ہے جس کا ہر زاویہ قائمہ
 زاویے کے برابر ہے۔ متوازی خطوں کے
 قاعدوں سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ



مستطیل کے مقابل کے ضلع متوازی ہوتے ہیں۔ ساتھ کی شکل میں 'ا ب ج د' اور 'ج د متوازی ہیں اور 'ب ج' اور 'ا د' بھی متوازی ہیں۔

اگر مستطیل 'ا ب ج د' کے راسوں
 'ا' اور 'ج' کو ملایا جائے تو مثلثوں کے قاعدے
 (۳) کی مدد سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ



'ا ب ج' اور 'ا د ج' آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں۔

ی لیے 'ا ب ج' = 'ا د ج' اور 'ب ج' = 'د ج' یعنی مستطیل کے مقابل

کے ضلع مساوی ہوتے ہیں۔

متشابه مثلث۔ اگر $\triangle ABC$ اور $\triangle DEF$ ایسے ہوں کہ ایک مثلث کے تین زاویے دوسرے مثلث کے تین زاویوں کے جُدا جُدا برابر ہوں تو شکل کھینچنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ یہ دونوں مثلث

متشابه (یعنی ایک ہی شکل کے)

ہوتے ہیں۔ ان مثلثوں کے ضلعوں

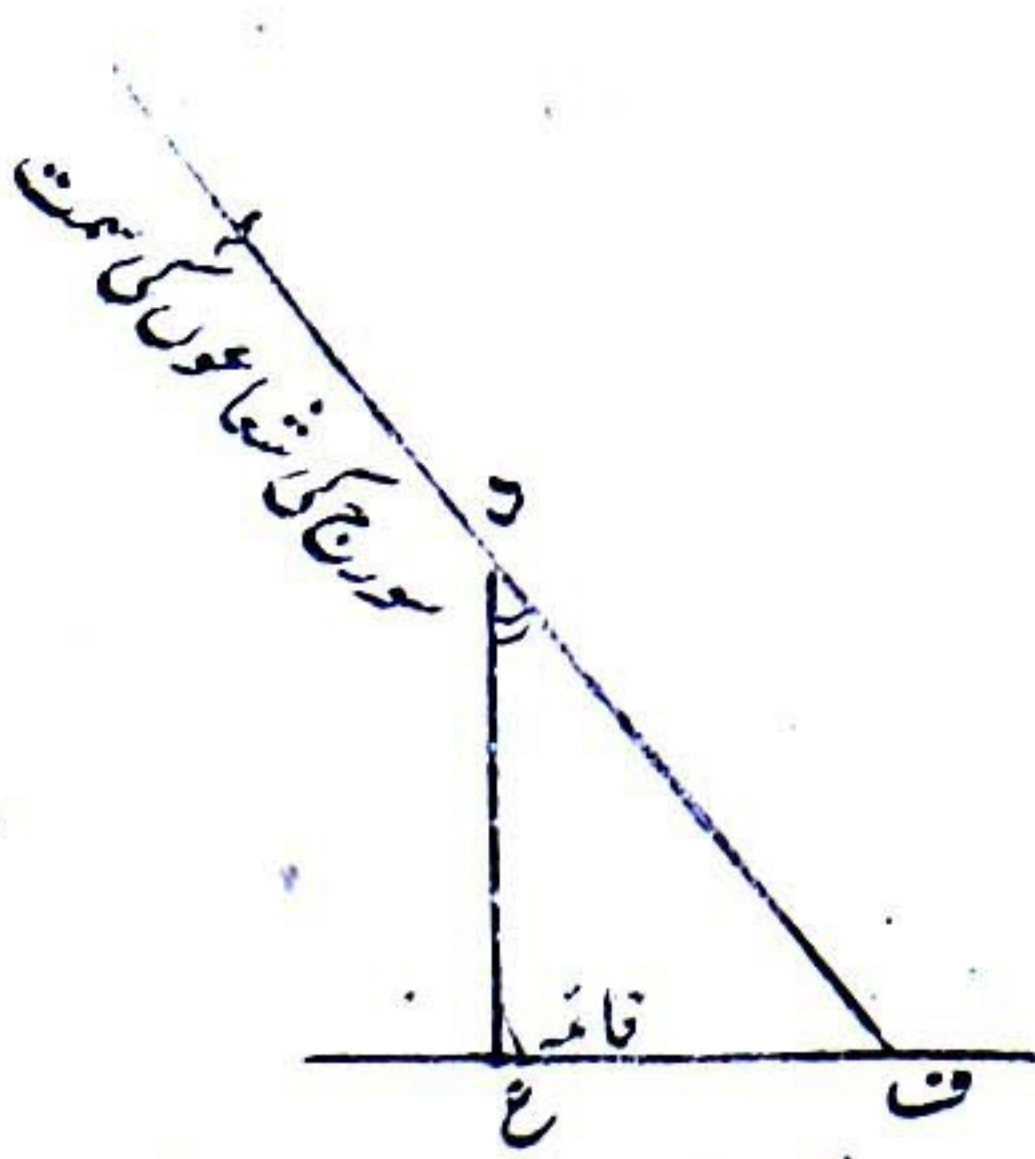
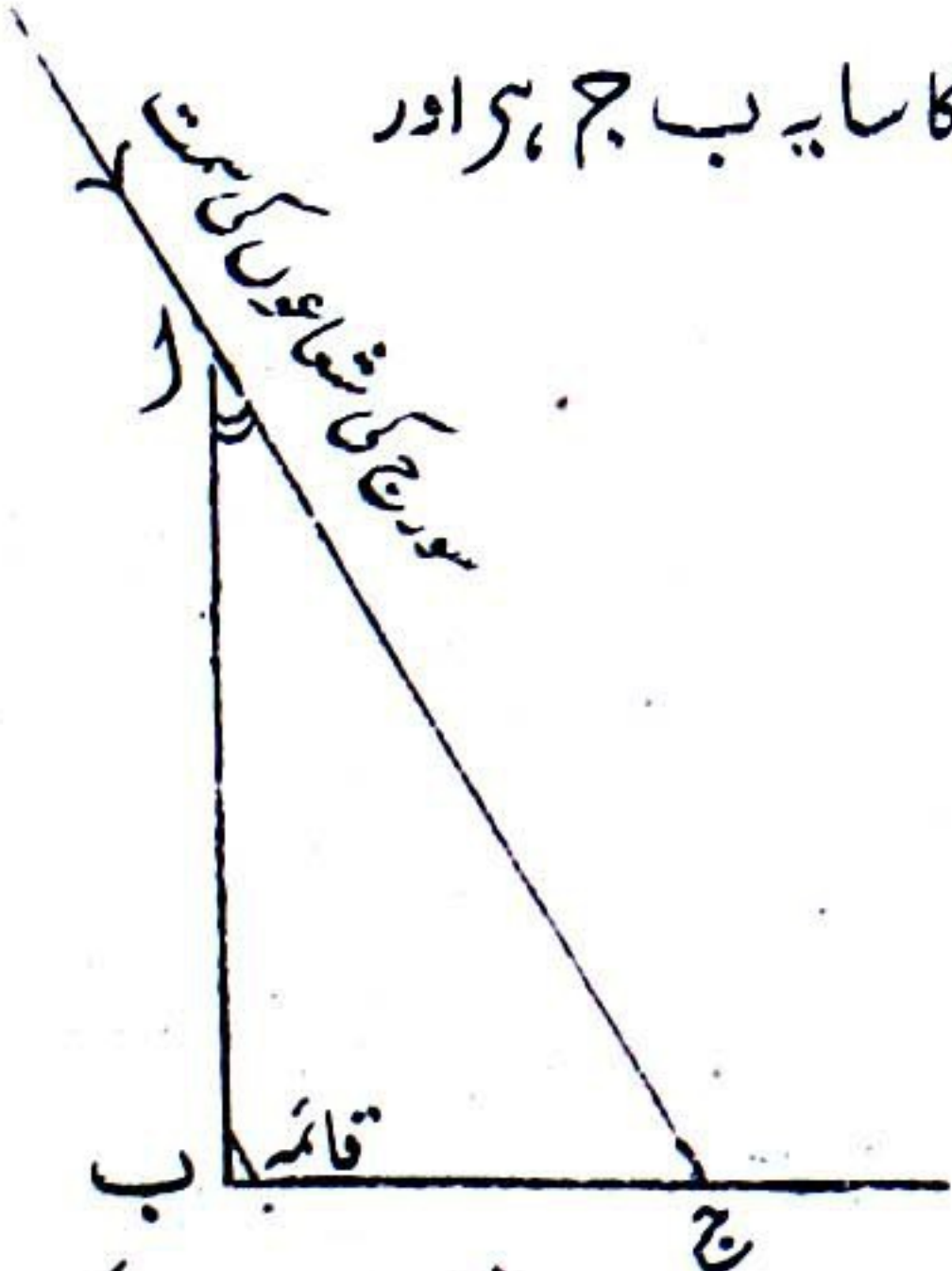
کو ناپ کر تصدیق کی جاسکتی ہے کہ

نظیر کے ضلع متناسب ہوتے ہیں۔

$$\text{یعنی } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{FD}$$

جیسا کہ اوپر بتایا جا چکا ہے۔ متشابه مثلثوں کی اس اہم اور کارآمد خاصیت سے طالیس واقف تھا اور اس نے اہم کی مدد سے مصر کے بڑے ہرم کی بلندی محسوب کی تھی۔ طالیس نے جو طریقہ اختیار کیا اس کی توضیح ذیل کی آسان مثال سے ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ کسی وقت کنار AB کا سایہ BC ہے اور

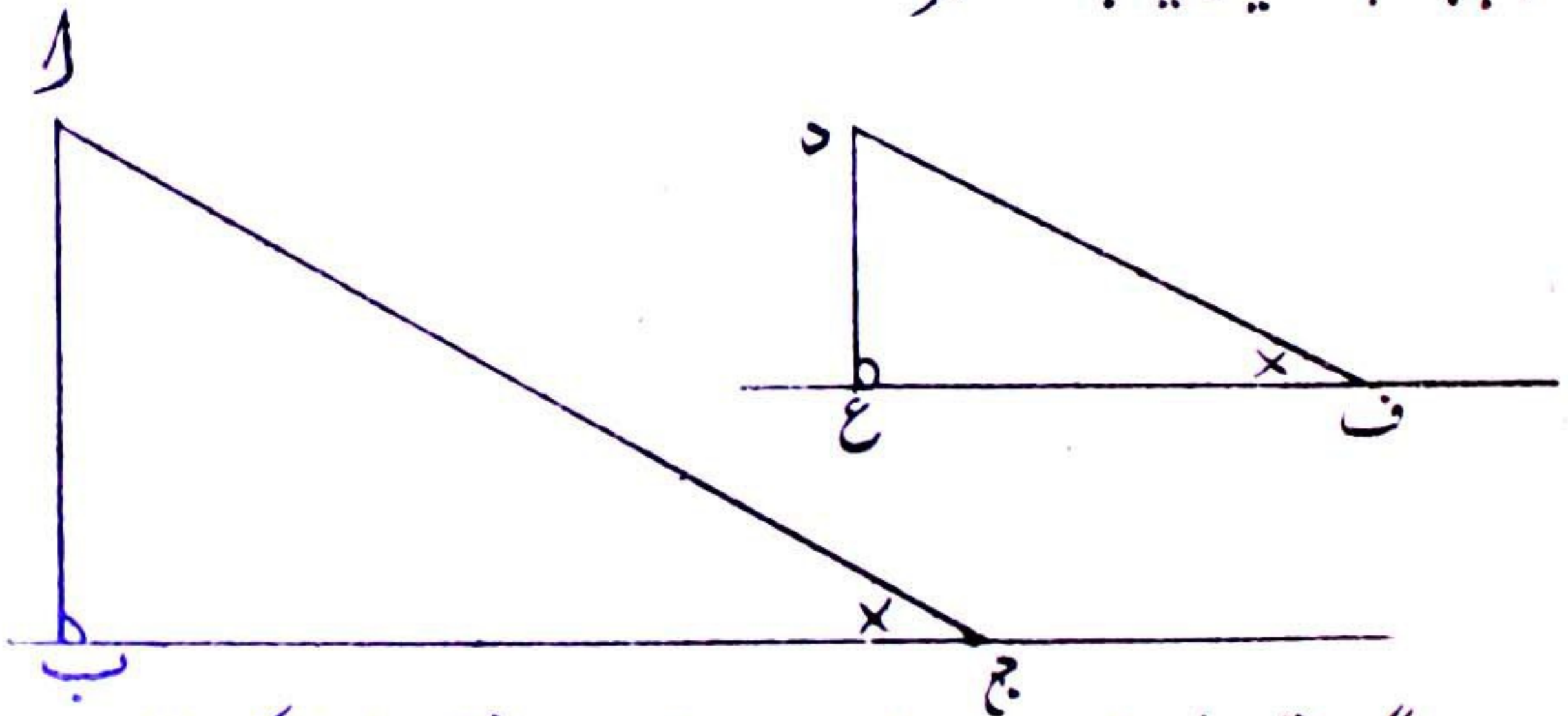


اسی وقت ایک سیدھی سلاخ DE کا سایہ EF ہے۔ شکل سے ظاہر ہے کہ

مثلثات ل ب ج اور د ع ف تشابہ ہیں۔ اس لیے $\frac{ل ب}{د ع} = \frac{ب ج}{ع ف}$ ۔
اب چونکہ ب ج، د ع اور ع ف آسانی سے ناپے جاسکتے ہیں،
اس لیے اوپر کے رشتے میں ان کی قیمتیں درج کر کے مینار ل ب کی بلندی
محسوب کی جاسکتی ہے۔

مثلاً اگر ب ج = ۹۰ فٹ، د ع = ۴ فٹ، ع ف = ۳ فٹ تو
 $\frac{ل ب}{۴} = \frac{۹۰}{۳}$ اس لیے ل ب = $۳ \times \frac{۹۰}{۳} = ۱۲۰$
پس معلوم ہوا کہ مینار ل ب کی بلندی (۱۲۰) فٹ ہے۔

سایے کے طول کی مدد سے بلندیاں معلوم کرنے کا یہ طریقہ ایسے مقاموں
پر جہاں دن میں سورج اچھی طرح چمکتا ہے بہت مفید ثابت ہوتا ہے۔
اگر بادلوں کی وجہ سے سورج چھپا ہوا ہو یا رات کا وقت ہو اور
ہمیں کسی مینار کی بلندی معلوم کرنی ہو تو ذیل کا طریقہ (جو تشابہ مثلثوں
پر مبنی ہے) اختیار کیا جاسکتا ہے۔



اگر افقی سطح پر ایک مینار ل ب واقع ہو تو افقی سطح کے کسی نقطہ ج
پر زاویہ پیمائے (یعنی زاویے ناپنے کا آلہ مثلاً چاندہ) رکھ کر زاویہ ب ج ل
ناپو۔ فرض کرو کہ ب ج = ۲۲۔ نیز طول کے کسی پیمانے کی مدد سے فاصلہ
ب ج ناپو۔ فرض کرو کہ ب ج = ۲۰۰ فٹ اب ایک د ع ف بناؤ

جو Δ ب ج کے متشابه ہو یعنی Δ ع ف = Δ ب ج = قائمہ زاویہ اور
 Δ ع ف = Δ ب ج = 32°

مثلث Δ ع ف میں Δ ع اور Δ ف کے طویل ناپوں۔

چوں کہ Δ ب ج متشابه ہے Δ ع ف کے

اس لیے $\frac{\Delta$ ب ج}{\Delta ع ف} = یعنی $\frac{\Delta$ ب ج}{\Delta ع ف} = $\frac{\Delta$ ب ج}{\Delta ع ف}

چوں کہ Δ ع اور Δ ف کے طویل ناپے گئے ہیں اس لیے $\frac{\Delta$ ع}{\Delta ف}

کی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے۔ فرض کرو کہ Δ ع = ۷۵، اور Δ ف = ۱۲

$$\frac{\Delta$$
 ع}{\Delta ف} = \frac{75}{12}

$$\therefore \frac{\Delta$$
 ب ج}{\Delta ع ف} = \frac{75}{12}

$$\therefore \Delta$$
 ب ج = \frac{75 \times 200}{12} = 1250

پس معلوم ہوا کہ مینار Δ ب کی بلندی ۱۲۵۰ فٹ ہے۔

نوٹ: چھٹے باب میں یہ بتایا جائے گا کہ مثلثی نسبتوں کی جدولوں کی مدد سے

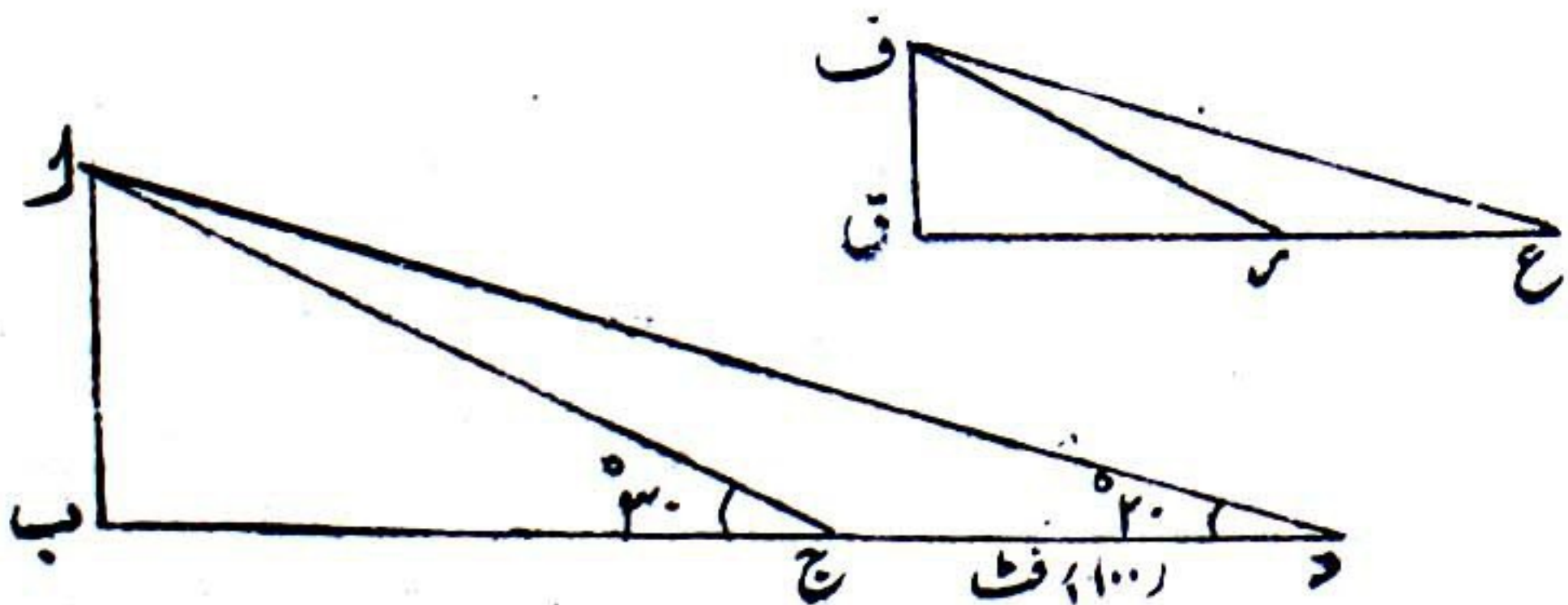
بغیر Δ ع ف کھینچنے کے مینار Δ ب کی بلندی کس طرح محسوب کی جاسکتی ہے۔

اگر مینار کے پائیس ب تک پہنچنا ممکن نہ ہو تو مینار کے پائیس میں سے گزرنے

والے افقی خط پر کے دونوں ج اور Δ پر مینار کی چوٹی Δ کے ارتفاعی زاویے

(یعنی Δ ب ج اور Δ ب ج) اور فاصلہ ج Δ ناپ کر حسب ذیل طریقے سے

مینار کی بلندی محسوب کی جاسکتی ہے۔



فرض کرو کہ ب ج ۱ = ۳۰° ، ب د ۱ = ۲۰° اور ب ج = (۱۰۰) فٹ
ایک ۵ ف م ر ع بناؤ جو ۱۵ ج د کے متشابہ ہو۔

یعنی ف م ر = ۱ د ب = ۲۰°

اور ف م ر ع = ۱ ج د = (۱۸۰ - ۳۰) = ۱۵۰°

ع م کو خارج کر کے اس پر ف سے عمود ف ق نکالو۔

(اس غرض کے لیے یہ کافی ہے کہ چاندہ کی مدد سے م ر ف ق =

۹۰ - ۳۰ = ۶۰° بنایا جائے)

اب شکل سے حاصل ہوتا ہے کہ ۱۵ ج ب ج متشابہ ہے ۵ ف ق م

کے اور ۱۵ ج د متشابہ ہے ۵ ف م ر کے ۔

اس لیے ۱ ب ج = ۱ ف م ر اور ۱ ج د = ۱ ف م ر

∴ ۱ ب ج × ۱ ج د = ۱ ج د × ۱ ف م ر

یعنی ۱ ب ج = ۱ ج د

ف ق اور م ر ع کو ناپ کر ۱ ف م ر کی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے۔

مثلاً اگر ف ق = ۹۵ اور م ر ع = ۱۰ تو ۱ ف م ر = ۹۵ = ۱۰ = ۱۹

اس لیے ۱ ب ج = ۱۹ × ۱ ج د

تب ۱ ب ج = ۱۹

= (۱۹ × ۱۰۰) فٹ

= ۹۵ فٹ

فیتا غورث کا مسئلہ۔ قائم الزاویہ مثلث کی ایک اہم خاصیت

(جس کو فیتا غورث کا مسئلہ کہتے ہیں) متشابہ مثلثوں کی مدد سے آسانی

سے حاصل ہوتی ہے۔

مساوی الاضلاع کا ہر زاویہ = 60° اب فرض کرو کہ ب ج کا وسطی نقطہ د ہے۔
 ل د کو ملاؤ۔ مثلثوں کے قاعدے (۳) سے حاصل ہوتا ہے کہ Δ ل د ب اور
 Δ ل د ج آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں۔ اس لیے \angle ل ب د = \angle ل ج د = 60°
 اور \angle ل د ب = \angle ل د ج = 90° اور ب د = ج د = ل ب = ل ج =
 $\frac{1}{2}$ ل ب یعنی قائم الزاویہ مثلث ل د ب میں ب ل د = 30° اور اس
 زاویے کے مقابل کے ضلع ب د کا طول وتر ل ب کے طول کا نصف ہے۔
 اس لیے فیثاغورث کے مسئلے کی رو سے $(\text{ل ب})^2 = (\text{ل د})^2 + (\text{ب د})^2$

$$\text{یعنی } (\text{ل ب})^2 = (\text{ل د})^2 + (\frac{\text{ل ب}}{2})^2$$

$$\text{یعنی } (\text{ل د})^2 = (\text{ل ب})^2 - \frac{(\text{ل ب})^2}{4} = \frac{3}{4} (\text{ل ب})^2$$

$$\therefore \text{ل د} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ل ب}$$

یعنی اگر قائم الزاویہ مثلث کا ایک عاۓہ زاویہ 30° ہو (اور اس لیے دوسرا
 عاۓہ زاویہ 60° ہو) تو وتر کا طول، 30° کے زاویے کے مقابل کے ضلع کا طول
 اور 60° کے زاویے کے مقابل کے ضلع کا طول $1, \sqrt{3}$ اور $\sqrt{3}$ کے تناسب
 ہوں گے۔

اوپر کے نتیجوں کی مدد سے بغیر شکل کھینچنے کے بلندیوں کے متعلق
 سوال حل کیے جاسکتے ہیں بہ شرطے کہ سوال کا حل ایسے قائم الزاویہ
 مثلثوں پر منحصر ہو جن میں ایک عاۓہ زاویہ 30° یا 60° کا ہو۔
 مثال۔ فرض کرو کہ ہمیں ایک چٹان کی بلندی ل ب معلوم کرنی ہے
 جب کہ چٹان کے پائیں ب تک جانے کی اجازت نہ ہو۔

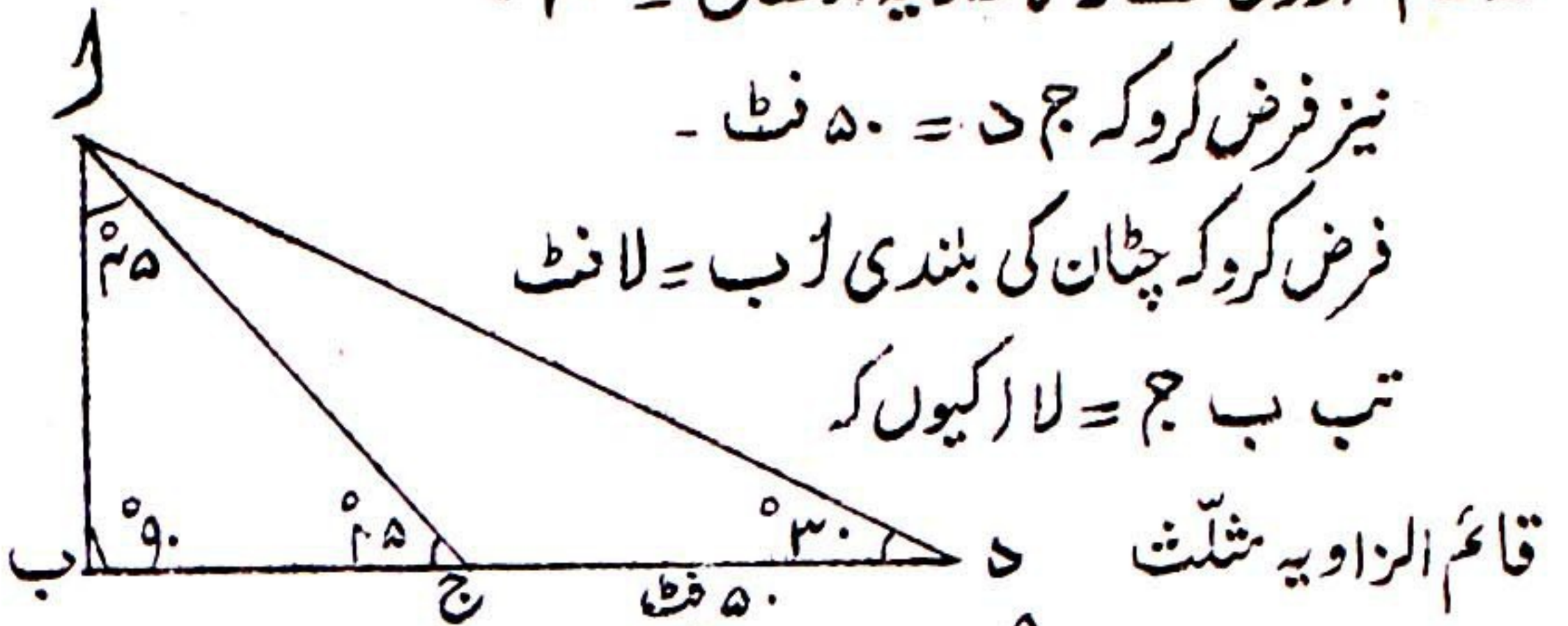
چٹان کے پائیں ب میں سے گزرنے والے افقی خط پر دو نقطے
 ج اور د ایسے معلوم کرو کہ ج سے چٹان کی چوٹی ل کا زاویہ ارتفاع

= ۲۵° اور د سے ل کا زاویہ ارتفاع = ۲۰°۔

نیز فرض کرو کہ ج = ۵ = ۵۰ فٹ۔

فرض کرو کہ چٹان کی بلندی ل ب = لائفٹ

تب ب ج = ل (کیوں کہ



قائم الزاویہ مثلث میں ج میں ب ج ل = ب ل ج = ۲۵°

نیز قائم الزاویہ میں ل ب د میں ل د ب = ۳۰°۔

اس لیے $\frac{ل ب}{ب د} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ یعنی ب د = ل ب ما = ۳ ل لائفٹ

لیکن ب د = ب ج + ج د = (۵۰ + ل) فٹ۔

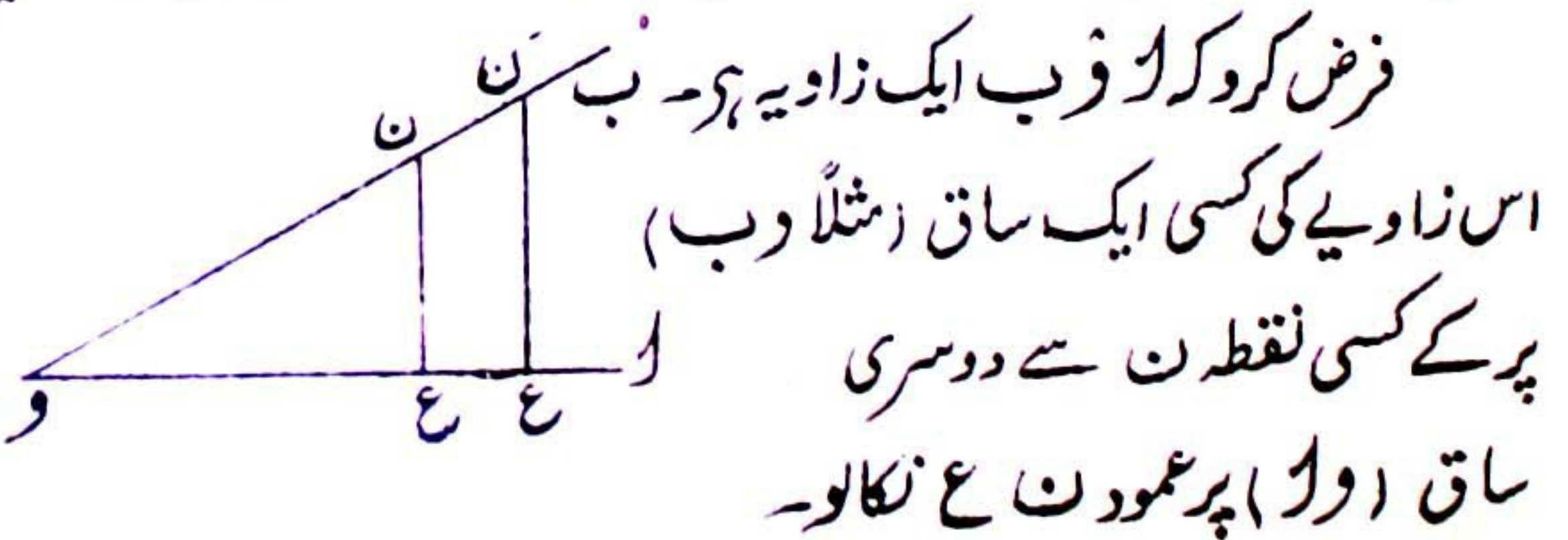
$$\therefore ۵۰ + ل = ل \sqrt{۳}$$

$$\therefore ۵۰ = ل (۱ - \sqrt{۳})$$

$$\therefore ل = \frac{۵۰}{۱ - \sqrt{۳}} = ۶۸ \text{ تقریباً } [۳۷ = ۲, \text{ را تقریباً لینے سے}]$$

پس معلوم ہوا کہ چٹان کی بلندی = ۶۸ فٹ۔

متشابہ مثلثوں کی خاصیت کی مدد سے زاویوں کی مثلثی نسبتوں کی تعریف کی جاتی ہے اور مثلثی نسبتوں کے باہمی رشتے حاصل کیے جاتے ہیں۔



فرض کرو کہ ل و ب ایک زاویہ ہے۔ ب

اس زاویے کی کسی ایک ساق (مثلاً و ب)

پر کے کسی نقطہ ن سے دوسری

ساق (و ل) پر عمود ن ع نکالو۔

تب $\frac{ن ع}{و ن}$ کی قیمت زاویہ ل و ب کی جیب کہلاتی ہے۔

اب یہ بتانا ضروری ہے کہ ل و ب کی جیب نقطہ ن کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔

و ب پر کے کسی دوسرے نقطہ ن سے ولا پر عمود ن سے نکالو تب متشابہ مثلثوں
ع ن و اور ع ن و سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{ع ن}{ع ن} = \frac{ع ن}{ع ن}$$

یعنی زاویہ کی جیب کی قیمت نقطہ ن کے مقام پر منحصر نہیں ہے [اختصار کی
غرض سے زاویہ کی جیب کو علامت جب (زاویہ) سے تعبیر کیا جاتا ہے] اوپر کی شکل میں $\frac{ع ن}{ع ن}$
کو زاویہ زاویہ کی جیب تمام کہتے ہیں اور اس کی علامت جم (زاویہ) سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ متشابہ
مثلثوں کی مدد سے آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ جم (زاویہ) بھی نقطہ ن کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔

نیز $\frac{ع ن}{ع ن}$ کو زاویہ زاویہ کا ماس کہتے ہیں اور اس کو علامت

مس (زاویہ) سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ مس (زاویہ) کی قیمت بھی صرف

زاویہ زاویہ پر منحصر ہوتی ہے نہ کہ نقطہ ن کے مقام پر۔ یہ بھی ظاہر

ہے کہ مس (زاویہ) = $\frac{ع ن}{ع ن}$ = $\frac{ع ن}{ع ن}$ جب (زاویہ) یعنی کسی زاویہ

کا ماس اس زاویہ کی جیب اور جیب تمام کی نسبت کے مساوی ہوتا ہے۔

نیز چونکہ قائم الزاویہ ۹۰ ع و میں

$$ع ن = ۱ و ع ن = ۱$$

$$اس لیے (ع ن) = ۱ + (ع ن) = ۱$$

$$یعنی [جب (زاویہ)] + [جم (زاویہ)] = ۱$$

اس نتیجے کو مختصر طور پر اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$جب (زاویہ) + جم (زاویہ) = ۱$$

پس معلوم ہوا کہ کسی زاویہ کی جیب اور جیب تمام کے مربعوں

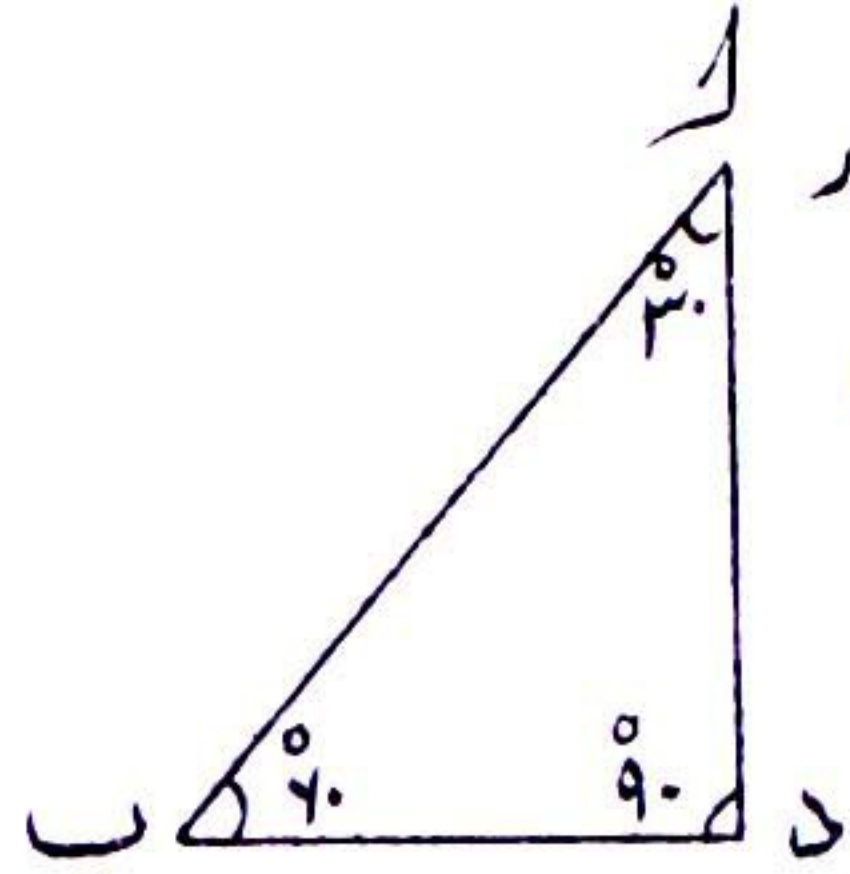
کا مجموعہ ایک کے مساوی ہوتا ہے۔ اس نتیجے کی مدد سے اگر کسی زاویہ

کی جیب معلوم ہو تو جیب تمام معلوم کی جاسکتی ہے اور اگر جیب تمام

معلوم ہو تو جیب معلوم کی جاسکتی ہے۔ مثلاً اگر کسی زاویہ طہ کی جیب $\frac{۳}{۵}$

$$ہو تو جم طہ = ۱ - جب طہ = ۱ - (\frac{۳}{۵}) = \frac{۴}{۵}$$

اس لیے $\sin \theta = \frac{3}{5}$ -
 ساتھ کی شکل سے یہ بھی ظاہر ہوتا ہے کہ
 جب $\theta = 30^\circ$ اور $\sin \theta = \frac{1}{2}$ اور $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ جب $\theta = 60^\circ$ اور $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ اور $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر قائم الزاویہ
 مثلث کا ایک حادہ زاویہ 30° ہو تو وتر کا طول،
 30° کے زاویے کے مقابل کے ضلع کا طول اور
 60° کے زاویے کے مقابل کے ضلع کا طول میں
 $1:2:\sqrt{3}$ اور $2:\sqrt{3}:1$ کے متناسب ہوتے ہیں۔
 اس نتیجے سے حاصل ہوتا ہے کہ

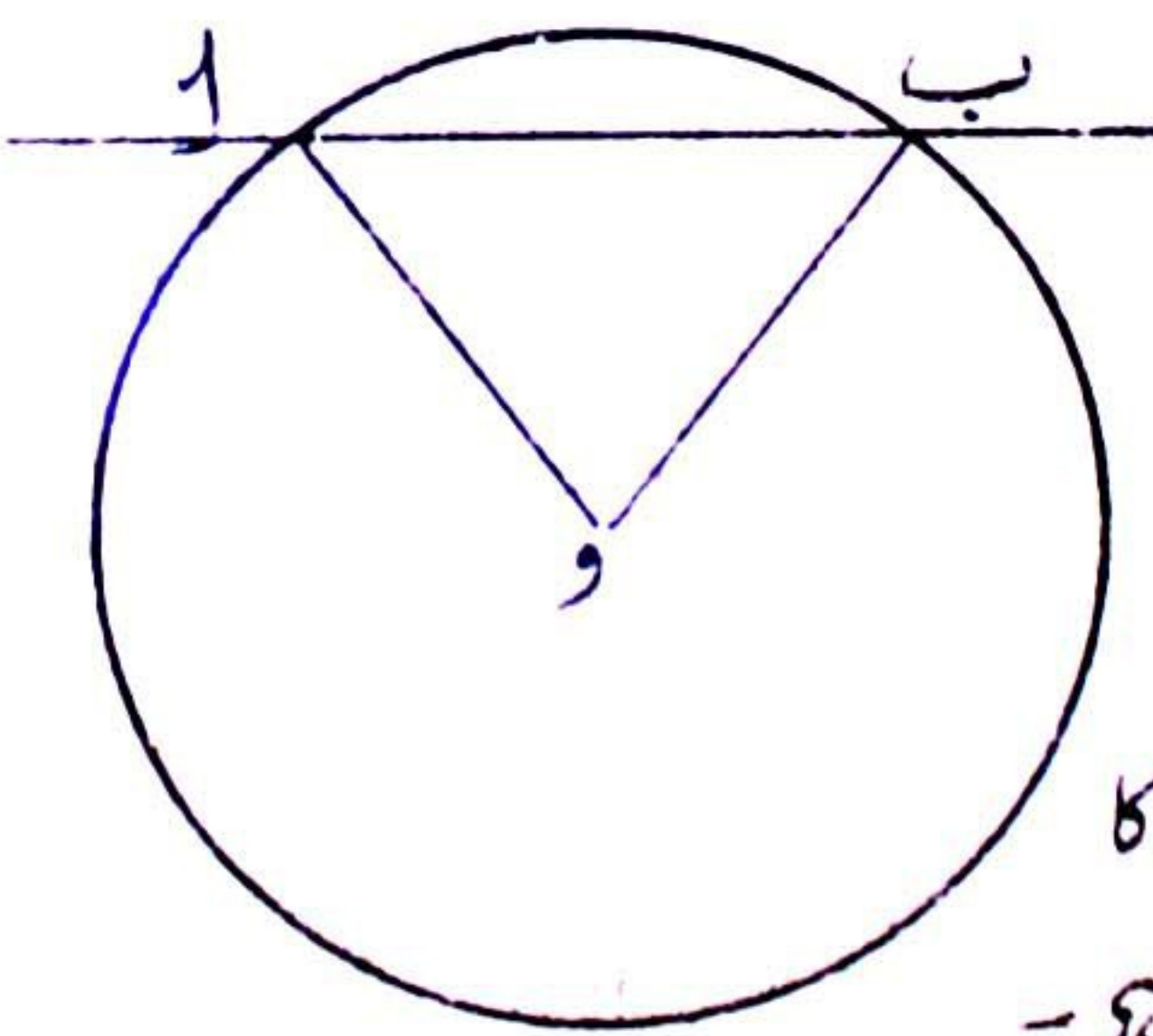


جب $30^\circ = \frac{1}{2}$ ؛ $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ؛ $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ؛
 جب $60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ؛ $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ؛ $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ؛

نوٹ - چھٹے باب میں یہ بتایا جائے گا کہ مثلثی نسبتوں سے پیمائش
 میں کس طرح فائدہ اٹھایا جاسکتا ہے۔

دائرے کے مماس - مماس کی ایک اہم خاصیت -

اگر دائرے کا مرکز و ہو اور دائرے پر دو نقطے ۱ اور ب ہوں تو



$1O = O\text{ب}$ اور $1O = O\text{ب}$

اس لیے مثلث سے ظاہر ہے کہ

$1O = O\text{ب}$ اور $1O = O\text{ب}$

فرض کرو کہ $1O = O\text{ب}$ = لا

چوں کہ مثلث کے تینوں زاویوں کا

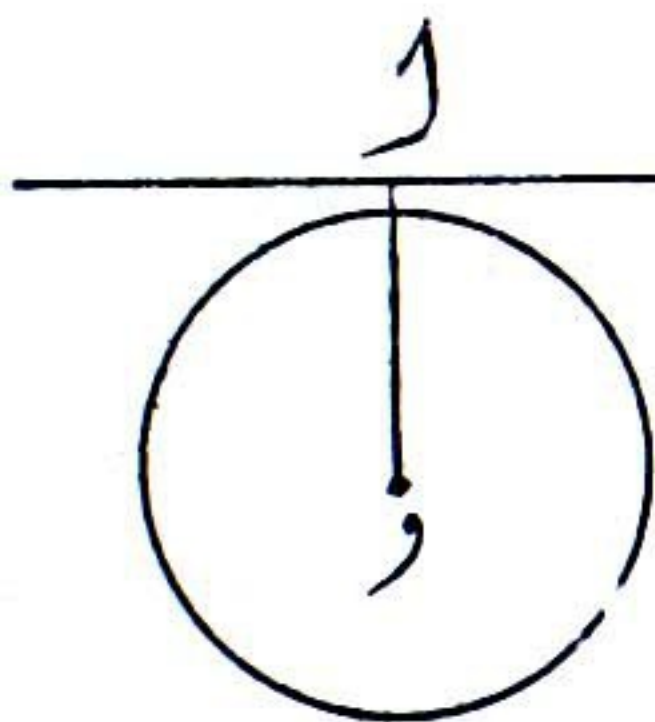
مجموعہ (180°) کے مساوی ہوتا ہے۔

اس لیے $\angle \text{و ب ل} = \angle \text{لا} + \angle \text{لا} = 180^\circ$

اس لیے $\angle \text{لا} = \frac{180^\circ - \angle \text{و ب ل}}{2} = 90^\circ - \frac{\angle \text{و ب ل}}{2}$

اب اگر نقطہ ب نقطہ ل کے بہت قریب آجائے تو ل اور ب میں سے گزرنے والے خط کا انتہائی مقام دائرے کے نقطے ل پر کا محاس کہلاتا ہے۔ اس انتہائی مقام میں $\angle \text{و ب ل} =$ صفر۔ اس لیے ل ب کے انتہائی مقام

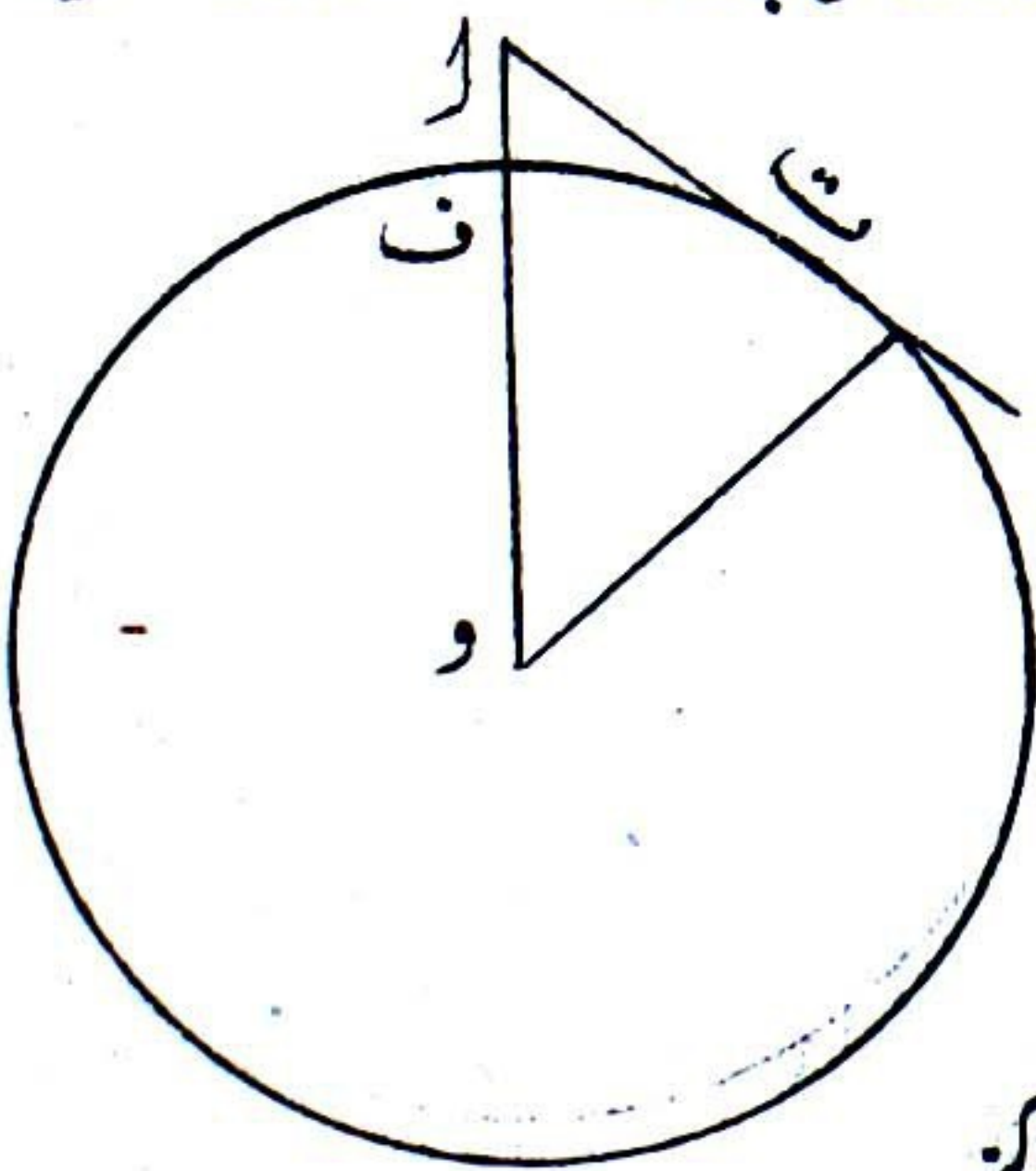
(یعنی ل پر کے محاس) اور ل و کا درمیانی زاویہ



$$90^\circ = \frac{\text{صفر}}{2} - 90^\circ =$$

پس معلوم ہوا کہ دائرے کے کسی نقطے پر کا محاس اس نقطے کو (یعنی نقطہ تماس کو) مرکز سے ملانے والے خط پر عمود دار ہوتا ہے۔

دائرے کے محاس کی اس خاصیت اور فیثاغورث کے مسئلے کی مدد سے ہم افق کی دوری کے متعلق ایک نہایت دل چسپ سوال حل کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ ایک شخص ہم وار سطح پر کھڑا ہوا ہے اور اس کی آنکھ سطح سمندر سے بلندی (ھ) پر ہے۔ یہ شخص زمین کی سطح پر دور سے دور کا جو نقطہ دیکھ سکتا



ہو وہ اس محاس کا نقطہ تماس ہے جو اس کی آنکھ سے کرۂ زمین تک کھینچا جائے۔

فرض کرو کہ آنکھ ل سے کرۂ زمین تک کھینچے ہوئے محاس کا نقطہ تماس ت ہے۔

فرض کرو کہ ل کو زمین کے مرکز

و سے ملانے والا خط کمرہ زمین کو ف پر کاٹتا ہے۔ فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر r ہے۔ قائم الزاویہ θ ورت r میں

$$(r \cos \theta)^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta$$

$$\text{یعنی } (r \cos \theta)^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta$$

$$\text{یعنی } r^2 \cos^2 \theta = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta$$

$$\text{یعنی } (r \cos \theta)^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta$$

$$\text{اس لیے } r \cos \theta = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta}$$

اگر زمین کے نصف قطر r کی قیمت (4000 میل) لی جائے اور سطح سمندر سے

$$\text{آنکھ کی بلندی } h = \frac{1}{8} \text{ میل ہو تو } r \cos \theta = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta}$$

$$= \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta}$$

چوں کہ جذر کی علامت کے اندر کی پہلی رٹم کے مقابلے میں $(\frac{1}{8} \text{ میل})$ چھوٹا ہے

اس لیے $(\frac{1}{8} \text{ میل})$ کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{اس لیے } r \cos \theta = 10.0 \text{ میل تقریباً} = 10 \text{ میل تقریباً}$$

پس معلوم ہوا کہ ایک شخص جس کی آنکھ سطح سمندر سے $(\frac{1}{8} \text{ میل})$ یعنی

(۶۶) فٹ کی بلندی پر ہو زمین کی سطح پر ۱۰ میل تک دیکھ سکتا ہے۔

اس نتیجے کو اس طرح بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ اس شخص کے لیے افق کی

دوری (۱۰) میل ہے۔

اسی طرح سے ہم اس مقام کا فاصلہ معلوم کر سکتے ہیں جس سے

ایک روشنی گھر کی قندیل جس کی بلندی سطح سمندر سے h میل ہو عین

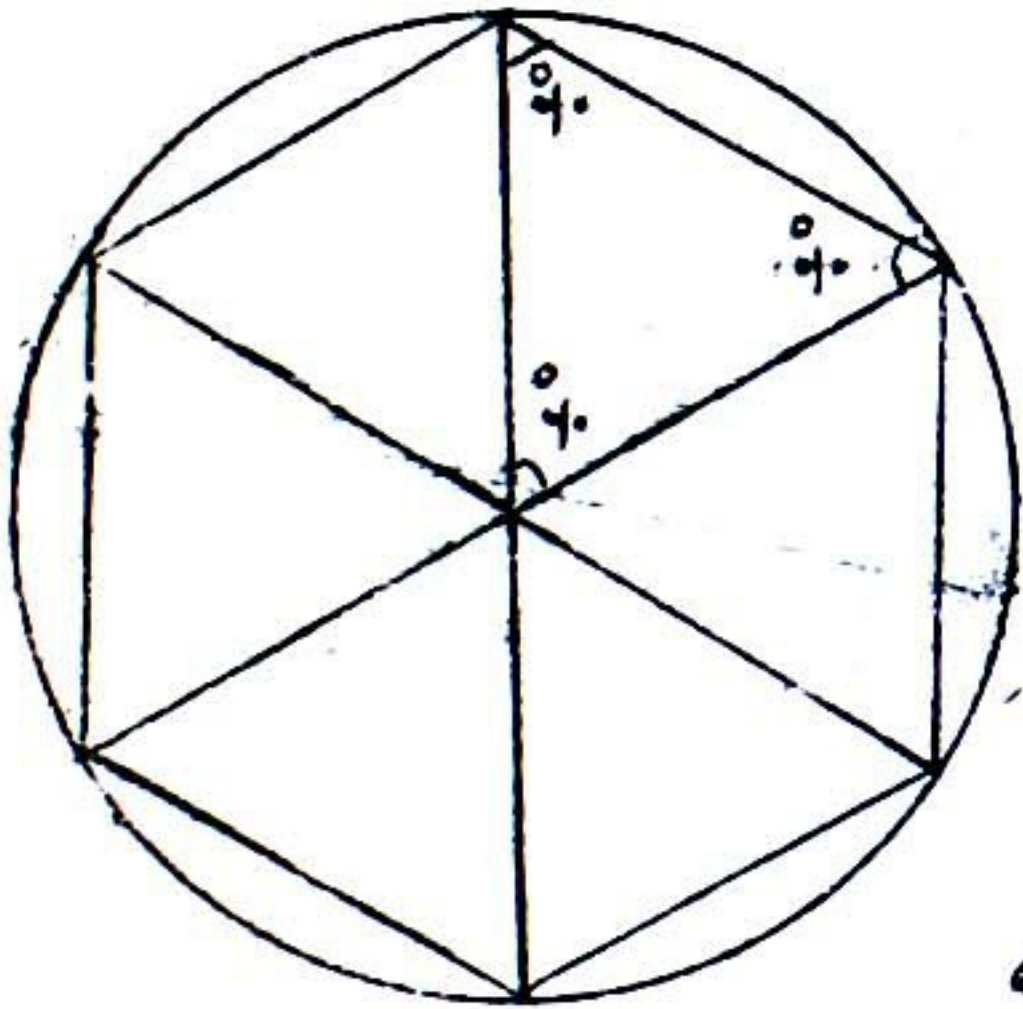
دکھائی دیتی ہے۔ اس صورت میں ہمیں یہ فرض کرنا ہوگا کہ دیکھے والے کی

آنکھ ت پر ہے اور روشنی گھر کی قندیل r پر ہے۔

دائرے کے محیط اور قطر کی نسبت -

یہ قیاس غالباً صحیح ہے کہ سب سے پہلے اہل بابل نے ایک دائرے کے اندر بنے ہوئے منتظم سدس (یعنی چھ ضلع والی شکل جس کے تمام ضلع اور زاویے مساوی ہوں) کی مدد سے دائرے کے محیط اور دائرے کے قطر کی نسبت کی تقریبی قیمت معلوم کی۔ ساتھ کی شکل سے ظاہر ہے کہ

اس منتظم سدس کا ہر ضلع دائرے کے نصف قطر کے مساوی ہے۔

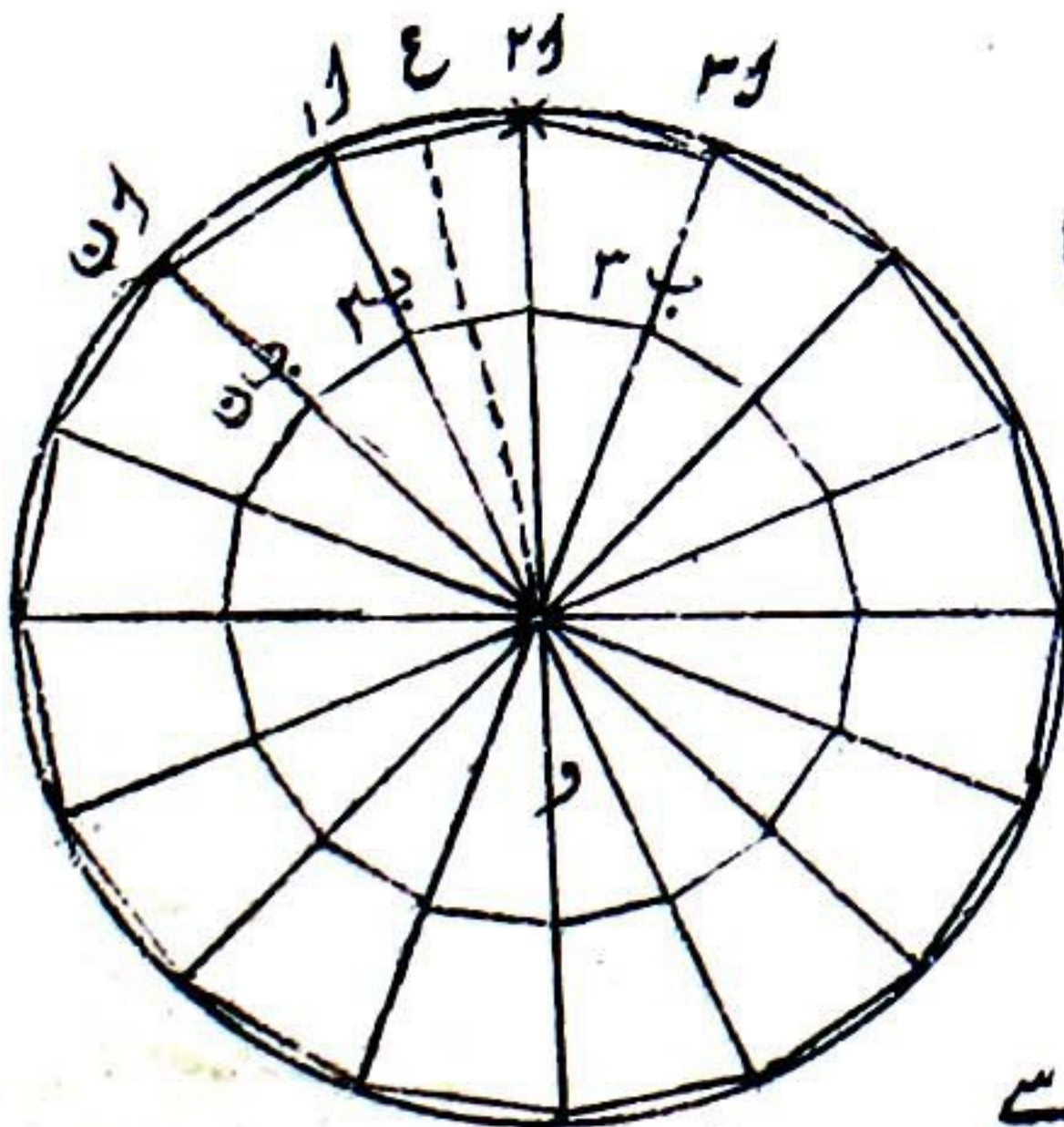


اس لیے منتظم سدس کا محیط (۶س) ہوگا اگر دائرے کے نصف قطر کو

(س) سے تعبیر کیا جائے۔ یہ بھی ظاہر

ہے کہ سدس کا محیط دائرے کے محیط سے

کسی قدر کم ہے۔ پس معلوم ہوا کہ دائرے کا محیط دائرے کے قطر کے ۳ گنے سے کسی قدر بڑا ہوتا ہے۔ اس نتیجے کی بنا پر تقریبی حسابات کے لیے دائرے کا محیط دائرے کے قطر کا ۳ گنا لیا جاسکتا ہے۔ اہل بابل اسی تقریبی نتیجے کو استعمال کرتے تھے۔



دائرے کے محیط کی قیمت کا

اندازہ لگانے سے پہلے یہ بتانا ضروری

ہے کہ کسی دائرے کے محیط کو دائرے

کے قطر کے ساتھ ایک مستقل نسبت

ہوتی ہے۔ اس اہم مسئلے کا ثبوت

متشابه مثلثوں کی مدد سے آسانی سے

(ANAXAGORAS) اور اریستارکس (ARISTARCHUS) نے پیش کیے تھے تو مزید ترقی ممکن تھی لیکن چونکہ علم ہندسہ اُن خوش حال لوگوں کی بے کاری کا ایک ذہنی کھیل بن گیا تھا جنہیں محنتی کاری گروں اور مہم جو ملاحوں کی معاشی کام یا بیوں سے کسی قسم کی دل چسپی نہ تھی اس لیے ترقی کی تمام راہیں بند ہو گئیں۔ جب یونانی ریاضی دانوں کو $\sqrt{2}$ اور π جیسے عددوں سے واسطہ پڑا جو دو صحیح عددوں کی نسبت سے ٹھیک ٹھیک طور پر تعبیر نہیں کیے جاسکتے تو انہوں نے عددوں کے نئے تصور ایجاد کرنے کی بجائے عددوں اور پیمائش کو علم ہندسہ سے خارج کر کے مجرد تکمیل کی آڑ میں پناہ لی۔ اس طرح عملی مساحت کو علم ہندسہ سے نکال دیا گیا۔ چنانچہ اقلیدس کے مقالوں میں طُولوں اور رقبوں کو ظاہر کرنے کے لیے عددوں کی بجائے صرف حرف استعمال کیے گئے ہیں۔ افلاطون کا یہ نظریہ تھا کہ علم ہندسہ کا مطالعہ صرف روحانی تکمیل کا آلہ کار ہے اور اس لیے یہ ہرگز درست نہیں ہے کہ اس علم کو دنیاوی ضرورتوں کے لیے استعمال کیا جائے۔ افلاطون کے اس نظریے کی وجہ سے علم ہندسہ کو عام لوگوں کے لیے زیادہ سے زیادہ مشکل اور ناقابلِ فہم بنایا گیا۔ یونان کے فارغ البال تعلیم یافتہ طبقے کے لیے علم ہندسہ بے کاری کا ایک دماغی کھیل بن گیا تھا اور اُن کا خیال تھا کہ اس کھیل کو دل چسپ بنانے کے لیے اُس کو زیادہ سے زیادہ پیچیدہ بنایا جائے۔ اس مضر رجحان کے خلاف جب اریستارکس (AREHTAS) اور دوسرے چند ریاضی دانوں نے پٹری اور پرکار کے علاوہ اور آلوں کی مدد سے مختلف قسم کے صغنی بنانے کی کوشش کی تو اُن کی یہ گراں قدر

کوششیں مقبول نہیں ہوئیں اور علمِ ہندسہ میں مزید انکشاف کا دروازہ بند ہو گیا۔

یاد رکھنے کی باتیں۔

(۱) مثلث کے تین زاویوں کا مجموعہ 180° کے مساوی ہوتا ہے۔

(۲) دائرے کا مماس نقطہ تماس میں سے گزرنے والے نصف قطر پر عمود دار ہوتا ہے۔

(۳) قائم الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویہ کے مقابل کے ضلع پر کا مربع بقیہ دو ضلعوں پر کے مربعوں کے مجموعے کے مساوی ہوتا ہے اور اس کا عکس بھی درست ہے۔

(۴) متشابہ مثلثوں میں نظیر کے ضلع متناسب ہوتے ہیں۔

(۵) نصف قطر (س) والے دائرے کا محیط $2\pi s$ اور رقبہ πs^2 ہے۔

(۶) جب (۹۰ - ط) = حجم (ط)؛ حجم (۹۰ ط) = جب ط

(۷) جب ط + حجم ط = ا



پانچواں باب

حساب کی ابتدا

جامعہ اسکندریہ کے قیام (۳۲۰ ق-م) کے بعد یونان نے ریاضی کی ترقی میں کوئی خاص حصہ نہیں لیا۔ نہ صرف یونان میں بلکہ تمام یورپی ملکوں میں علم و فن کی جگہ توہم پرستی کا دور دورہ رہا یہاں تک کہ مسلمانوں نے دوبارہ مغرب میں علم کا چراغ روشن کیا۔ پندرھویں صدی میں ریاضی سے اہل یورپ کا تعلق صرف اس قدر تھا کہ تعویذوں کے طور پر طلسمی مربعوں : (MAGICSQUARE) کی کثرت سے استعمال کیا جاتا تھا۔

ایسے ایک طلسمی مربع کی نقل (مرزجہ ہندسوں میں اسے کی شکل میں دی

۱	۱۵	۱۴	۴
۱۲	۶	۷	۹
۸	۱۰	۱۱	۵
۱۳	۳	۲	۱۶

گئی ہے۔ اس مربع میں ہر آڑی اور کھڑی

سطر کے عددوں کا مجموعہ ۳۴ ہے۔ نیز

مربع کے ہر وتر پر کے عددوں کا مجموعہ

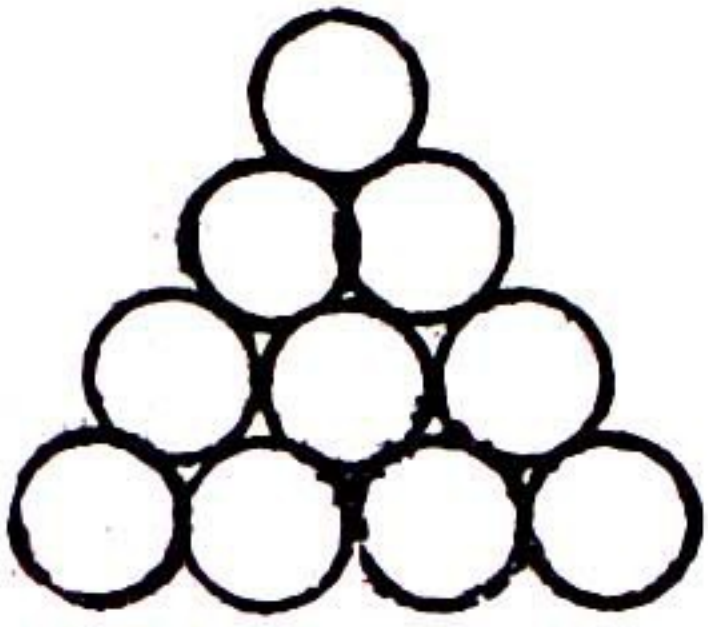
بھی ۳۴ ہے۔ اس مربع میں (۱) سے (۱۶)

تک کے عدد استعمال کیے گئے ہیں۔

ایسے عددی مربعوں کے ذریعے مذہبی پیشوا جسمانی اور نفسیاتی بیماریوں کو دفع کرنے کا دعوا کرتے تھے۔ ایسے عددی مربعے ذہنی کھیل کے طور پر بھی مرتب کیے جاتے تھے۔

ظاہر ہے کہ جب علم و فن صرف خوش حال اور بے کار لوگوں کی ذہنی تفریح کا ذریعہ بن جائے اور اس سے کوئی عملی فائدہ حاصل نہ کیا جائے تو ترقی مسدود ہو جاتی ہے۔ یونان میں جہاں دیمقراطیس جیسے حکیم بھی تھے جو علم کو عام اور کارآمد بنانا چاہتے تھے وہاں نیشا غورث (پانچویں صدی ق۔ م میں) بڑے بڑے مجموعوں کے سامنے حساب اور علم ہندسہ کے درس دیتا تو ان میں عددوں کی روحانی خاصیتوں پر بھی بحث کی جاتی تھی۔ اس سے رفتہ رفتہ یہ خیال عام ہوا کہ عددوں کی یہی خاصیتیں نہایت اہم اور سیکھنے کے قابل ہیں۔ مثلاً عدد (۱) کو تمام عددوں کا مبداء تصور کیا جاتا تھا۔ عدد (۲) سے مشورہ اور رائے کو تعبیر کیا جاتا تھا۔ نیز عدد (۲) پہلا مونث عدد اور عدد (۳) پہلا مذکر عدد کہلاتا تھا۔ عدد (۴) کے ذریعے انصاف کو تعبیر کیا جاتا تھا اور عدد (۵) جو پہلے مونث عدد (۲) اور پہلے مذکر عدد (۳) کے اتحاد سے حاصل ہوتا ہے ازدواج (یا شادی) کو تعبیر کرتا تھا۔ اسی طرح علم ہندسہ میں مکعب سے زمین کو اور بارہ سطحی سے کائنات کو تعبیر کیا جاتا تھا۔ ایسا عدد جس کے تمام اجزائے ضربی کا مجموعہ اسی عدد کے برابر ہو مکمل عدد کہلاتا تھا۔ مثلاً (۶) ایک مکمل عدد ہے کیوں کہ اس کے اجزائے ضربی ۱، ۲، ۳ ہیں جن کا مجموعہ (۶) ہے۔ عدد (۶) پہلا مکمل عدد ہے۔ دوسرا مکمل عدد ۲۸، تیسرا (۲۹۶) اور چوتھا (۸۱۲۸) اور پانچواں (۳۳۶۰۳۳۵۵) ہے۔ چونکہ مکمل عدد بہت ہی کم یا ب ہیں اس لیے قدیم ریاضی داں ان عددوں کو نیک لوگوں سے تشبیہ دیتے تھے۔ (۲۲۰) اور (۲۸۴) جیسے دو عدد جن میں سے ایک کے اجزائے ضربی

کا مجموعہ دوسرے کے برابر ہو اور دوسرے عدد کے اجزائے ضربی کا مجموعہ پہلے عدد کے برابر ہو ایک دوسرے کے "رفیق" کہلاتے تھے۔ ایسے عددوں کی تحقیق میں بھی بہت سا وقت صرف کیا جاتا تھا۔ ابتدائی عددوں کا مجموعہ لینے سے جو عدد حاصل ہوتے ہیں وہ مثلثی عدد کہلاتے ہیں۔ ان عددوں سے ایک مثلث کی شکل میں ترتیب دی ہوئی گولیوں کی تعداد حاصل ہوتی ہے۔


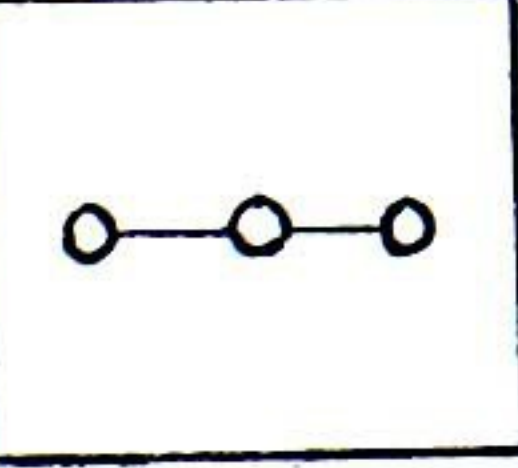
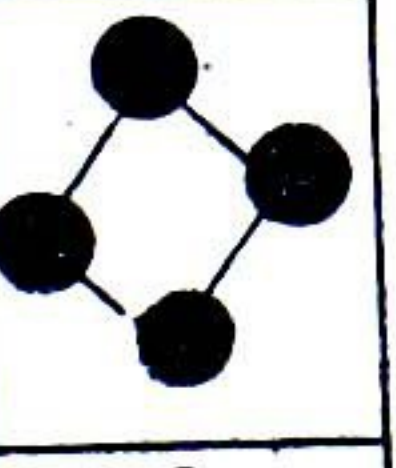
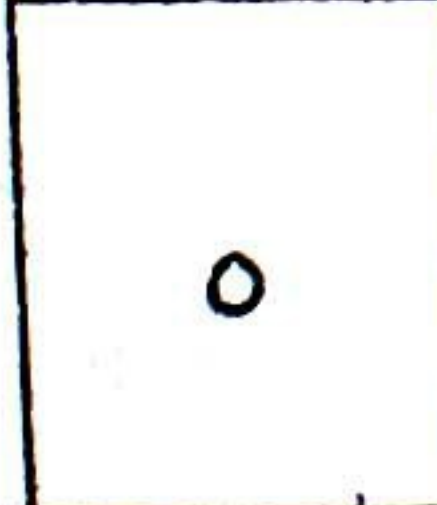
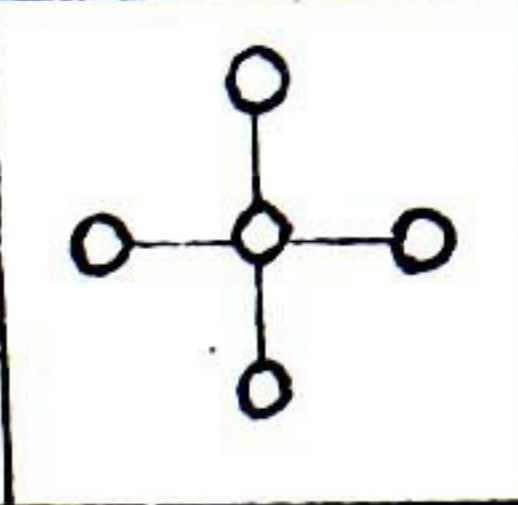

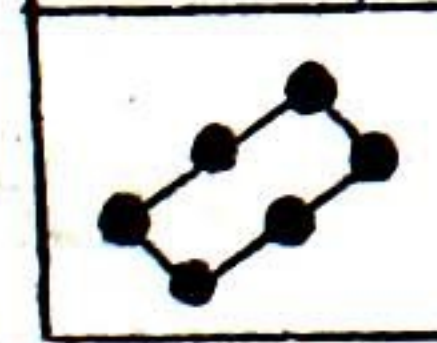
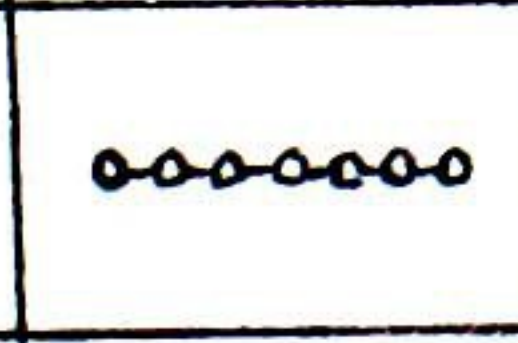
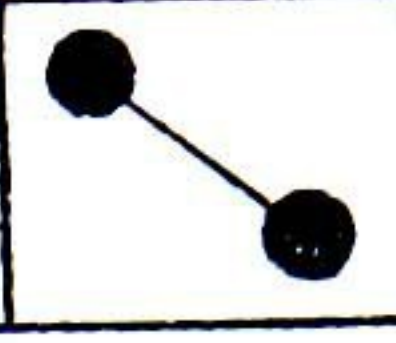


مثلاً چوتھا مثلثی عدد $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ یعنی اگر گولیوں سے ایک ایسا مثلث بنایا جائے جس کے ہر ضلع میں ۴ گولیاں ہوں تو گولیوں کی تعداد (۱۰) ہوگی۔ مثلثی عددوں کو نیک شکون خیال کیا جاتا تھا۔

بہت قدیم زمانے سے طلسمی عددوں کا عقیدہ موجود تھا اور ان تجارتی شاہ راہوں پر پایا جاتا تھا جو سمیری ہندیب کے مرکز سے نکلتی تھیں۔ فینا غورث سے بہت پہلے ہندستانوں اور عبرانیوں کو "مکمل عددوں" اور "رفیق عددوں" کا علم تھا۔ کائنات کی تخلیق کے (۱۶) دن اور ہلالی مہینے کے (۲۸) دن اس قدیم عقیدے کی نشانیاں ہیں۔ شاید یہ قیاس غلط نہیں ہے کہ وہ علم ہندسہ اور عددوں کا علم جو فینا غورث کو حاصل تھا قدیم چینی ماخذوں سے لیا گیا تھا۔ یہ سمجھنے کے لیے کہ انسان نے عددوں کی خاصیتیں کس طرح دریافت کیں ہمیں یونانی ریاضی دانوں سے پانسو سال بلکہ اس سے زیادہ قبل کے زمانے کی تاریخ کی ورق گردانی کرنی پڑے گی۔

عددوں کی قدیم چینی ترقیم کا اصول یہ تھا کہ اس میں عددوں کو خطوں، دائروں اور نقطوں کی سادہ شکلوں کے ذریعے ظاہر کیا جاتا تھا۔ اس سے اس امر پر بھی روشنی پڑتی ہے کہ کس طرح ہندستانوں نے اس طرزِ تحریر سے عددوں کی ترقیم کا ایک معقول طریقہ دریافت کیا۔ ایک چینی کتاب سے، جو فیثاغورث سے تقریباً پانسو سال پہلے لکھی گئی تھی، یہ معلوم ہوتا ہے کہ عدد ایک تا آٹھ کو افقی خطوں کے اجتماعوں سے تعبیر کیا جاتا تھا۔ اس ترقیم کو دیاسلامی ترقیم کہتے ہیں۔ مثلاً عدد دو کو علامت = سے اور عدد تین کو علامت ≡ سے تعبیر کیا جاتا تھا جس سے بعد میں (کسی قدر تبدیلی سے) ہندستانی ترقیم کی علامتیں ۲ اور ۳ حاصل ہوئیں۔ عددوں کی ترقیم کا ایک اہم طریقہ یہ تھا کہ اس میں سیاہ اور سفید دائروں کے ذریعے عددوں کو تعبیر کیا جاتا تھا۔ سفید دائرے نر (یعنی طاق) عددوں کے لیے اور سیاہ دائرے مادہ (یعنی جفت) عددوں کے لیے استعمال کیے جاتے تھے۔ ساتھ کی شکل میں ایک طلسمی

مربع اس ترقیم میں لکھا گیا ہے۔ اس مربع کی ہر آرٹی یا کھڑی سطر یا وتر کے عددوں کا مجموعہ (۱۵) ہے۔ ممکن ہے کہ اسی قسم کے نقشی طلسمی مربعوں سے علم جفر حاصل کیا گیا ہو۔ علم جفر میں عددوں

کو حروف تہجی سے تعبیر کیا جاتا تھا۔ اور اس طرح عددوں کی بجائے جو لفظ بنتے تھے اُن میں سے چند مبارک اور چند نحس خیال کیے جاتے تھے۔ اس قسم کے نقشوں سے تو ہم پرستی کو تقویت حاصل ہوئی لیکن ریاضی کو بہت نقصان پہنچا کیوں کہ کارآمد ریاضی کی طرف لوگوں کی توجہ کم ہو گئی۔

قدیم ریاضی (خاص طور پر چینی ریاضی) میں طاق عددوں کو مذکر اور جفت عددوں کو مونث قرار دینے کی اصلی وجہ غالباً یہ تھی کہ اس زمانے میں انسان کو اپنی اور اپنے گھریلو جانوروں کی نسل کی افزائش سے گہری دل چسپی تھی۔ اس لیے انسان نے فطری طور پر عددوں کو بھی مذکر اور مونث جماعتوں میں تقسیم کیا۔ عددوں کے اس تصور کے ساتھ ساتھ طاق (یعنی مذکر) عددوں میں سے اُن عددوں کا خاص طور پر مطالعہ کیا گیا جن کا کوئی جزو ضربی نہ ہو۔ یہ عدد "مفرد" عدد کہلاتے ہیں مثلاً ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳، ۴۷، ۵۳، ۵۹، ۶۱، ۶۷، ۷۱، ۷۳، ۷۹، ۸۳، ۸۹، ۹۷، ۱۰۱، ۱۰۳، ۱۰۷، ۱۰۹، ۱۱۳، ۱۱۷، ۱۲۱، ۱۲۷، ۱۳۱، ۱۳۷، ۱۴۱، ۱۴۳، ۱۴۷، ۱۵۱، ۱۵۷، ۱۶۱، ۱۶۳، ۱۶۷، ۱۷۱، ۱۷۳، ۱۷۷، ۱۸۱، ۱۸۷، ۱۹۱، ۱۹۳، ۱۹۷، ۱۹۹۔ روزمرہ حساب میں مفرد عدد صرف اس وقت کام آتے ہیں جب کہ اجزائے ضربی کی مدد سے کسی صحیح عدد کا جذر معلوم کرنا ہو۔ لیکن اب جذر نکالنے کے لیے ایسے طریقے دریافت ہو چکے ہیں کہ مفرد عددوں کے استعمال کی زیادہ ضرورت نہیں پڑتی۔

۲ یا ۳ جیسے عددوں کے جذر معلوم کرنے کے سلسلے میں یونانی ریاضی دانوں کو جس مشکل سے دوچار ہونا پڑا اس کا ذکر ہم کر چکے ہیں اور یہ بھی بتا چکے ہیں کہ ان اہم عددوں سے بچنے کے لیے یونانی ریاضی دانوں نے کس طرح علم ہندسہ سے عددوں اور پیمائش کو خارج کر کے

یہ طریقہ استدلال "استقرارِ حسابیہ" کا طریقہ کہلاتا ہے۔
اسی طرح استقرارِ حسابیہ کی مدد سے حسب ذیل نتیجے حاصل کیے
جاسکتے ہیں:-

$$1^2 + 2^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{اور } 1^2 + 2^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

ان سلسلوں کے علاوہ ہندسی سلسلہ بھی بہت اہم اور کارآمد
ہے۔ ہندسی سلسلے میں ہر رقم کو اپنے سے پہلی رقم کے ساتھ ایک
مستقل نسبت ہوتی ہے۔ مثلاً

$$1 + 2s + 4s^2 + 8s^3 + \dots + n s^{n-1}$$

ایک ہندسی سلسلہ ہے۔ اس سلسلے میں n رقمیں ہیں۔ پہلی رقم 1 کو
 s سے ضرب دینے سے دوسری رقم حاصل ہوتی ہے۔ دوسری رقم
کو s سے ضرب دینے سے تیسری رقم حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح
عمل کرنے سے سلسلے کی تمام رقمیں حاصل ہوتی ہیں۔ اس ہندسی
سلسلے کی ہر رقم کو رقم ماقبل سے جو نسبت ہے (یعنی مقدار) وہ نسبت
مشترک کہلاتی ہے۔ ہم اس سلسلے کی n رقموں کا مجموعہ معلوم کریں گے۔

$$\text{فرض کرو کہ } s^n = 1 + 2s + 4s^2 + 8s^3 + \dots + n s^{n-1}$$

$$s^n \times s = s + 2s^2 + 4s^3 + \dots + n s^n$$

$$\text{اس لیے تفریق سے } s^n - 1 = (s-1) s^n = s^n - 1$$

$$\text{اس لیے } s^n = \frac{s^n - 1}{s-1}$$

اس ضابطہ کی مدد سے ایک ہندسی سلسلے کی n رقموں کا مجموعہ حاصل
ہوتا ہے جب کہ رقم اول اور نسبت مشترک معلوم ہو۔

کا حل لانتناہی سلسلہ $1 + 10 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$ کا مجموعہ معلوم کرنے پر منحصر ہے۔ یہ ایک لانتناہی ہندسی سلسلہ ہے جس کا مجموعہ $\frac{1}{9} = \frac{1}{9} = \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$ ہے۔ ہندسی سلسلے کی طرح حسابی سلسلہ بھی دل چسپ ہے۔ حسابی سلسلے کی دو مثالیں حسب ذیل ہیں:-

$$(i) \dots + 14 + 13 + 9 + 5 + 1$$

$$(ii) 1 + (1 + f) + (1 + f + f) + \dots$$

پہلے سلسلے میں دو متصل رقموں کا فرق ۲ ہے اور دوسرے سلسلے میں دو متصل رقموں کا فرق f ہے۔ سلسلہ (ii) حسابی سلسلے کی عام مثال ہے۔ فرض کرو کہ سلسلہ (ii) کی n رقموں کا مجموعہ $M = n$

$$1 + (1 + f) + (1 + f + f) + \dots + (1 + n - 1)f = n$$

$$+ (1 + n - 1)f = n$$

$$1 + \dots + (1 + n - 1)f$$

$$+ (1 + n - 1)f = 2n$$

$$\dots = n$$

$$اس لیے $n = \frac{1}{2}n[2 + (n - 1)f] = \frac{1}{2}n[2 + (n - 1)f]$$$

یعنی حسابی سلسلے کی n رقموں کا مجموعہ حاصل ہوتا ہے اگر پہلی اور آخری رقم کے مجموعے کے نصف کو رقموں کی تعداد سے ضرب دیا جائے۔

$$\dots + 13 + 9 + 5 + 1$$

$$کی (۱۰۰) رقموں کا مجموعہ = \frac{1}{2}(100 + 1) \times 100 = 5050$$

$$100 = (198 + 1) \times 100 = 19900$$

ظاہر ہے کہ اس ضابطہ کے بغیر معمولی طریقے سے مجموعہ معلوم کرنے کے لیے

بہت طویلانی عمل سے جمع کرنا ہوگا۔ اس لیے یہ ضابطہ نہایت کارآمد ہے۔
 پہلے n طبعی عددوں کا مجموعہ بھی حسابی سلسلے کے ضابطہ کی مدد سے
 حاصل ہوتا ہے کیوں کہ طبعی عددوں سے ایک ایسا حسابی سلسلہ حاصل ہوتا
 ہے جس کی رقم اول (1) ہے اور فرق مشترک بھی (1) ہے۔
 اب ذیل کے سلسلے پر غور کرو۔

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$$

اس سلسلے کی رقموں کو الٹانے سے سلسلہ

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$$

حاصل ہوتا ہے جو ایک حسابی سلسلہ ہے۔

ایسا سلسلہ جس کی رقموں کو الٹانے سے حسابی سلسلہ حاصل ہوتا ہے، موسیقی
 سلسلہ کہلاتا ہے۔

قدیم ہنریت دانوں کا یہ خیال تھا کہ ستاروں کے فاصلے موسیقی سلسلے
 میں ہیں یعنی ان کے خیال کے مطابق ستاروں کے فاصلوں کو الٹانے
 سے ایک حسابی سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

ان سلسلوں کے علاوہ کئی اور دل چسپ سلسلے ہیں جن میں سے چند
 سلسلوں کا ذکر آئندہ کیا جائے گا۔

ہم اوپر مثلثی عددوں کا ذکر کر چکے ہیں اور یہ بھی بتا چکے ہیں کہ
 n وان مثلثی عدد $\frac{n(n+1)}{2}$ ہے۔ اب ہم اجتماعوں اور مثلثی عددوں کا تعلق
 ظاہر کریں گے۔

فرض کرو کہ ایک شخص کے تین دوست A ، B ، C ہیں اور وہ اپنے
 دوستوں میں سے دو دو کو اپنے ہاں ایک ایک دن دعوت پر بلانا چاہتا ہے۔

یہ شخص ایک دن ل اور ب کو، دوسرے دن ب اور ج کو اور تیسرے دن ج اور ل کو دعوت پر بلا سکتا ہے۔ یعنی تین دوستوں میں سے دو کو منتخب کرنے کے طریقوں کی تعداد = $\frac{3 \times 2}{2} = 3$ دوسرا مثلثی عدد۔ اسی طرح آسانی سے بتایا جاسکتا ہے کہ ن مختلف چیزوں میں سے دو چیزوں کو منتخب کرنے کے طریقوں کی تعداد = $\frac{n(n-1)}{2}$ (ن-۱) وان مثلثی عدد مثلاً ایک جماعت کے ۳۵ طلبہ میں سے ۲ طلبہ کو منتخب کرنے کے طریقوں کی تعداد = $\frac{35 \times 34}{2} = 595$ وان مثلثی عدد =

ن مختلف چیزوں میں سے س، س، س چیزیں منتخب کرنے کے طریقوں کی تعداد کو علامت J_n سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ پس اوپر کے نتیجے کے مطابق $J_n = \frac{n(n-1)}{2}$ وان مثلثی عدد ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

$$J_n = \frac{n(n-1)(1-n) - (2-n)(1-n) - \dots - (1+m-n)}{1 \times 2 - \dots - 1 \times 2 \times 1}$$

مثلاً $J_4 = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 4$

اوپر کی مثالوں میں منتخب کی ہوئی چیزوں کی ترتیب کو ملحوظ نہیں رکھا جاتا۔ مثلاً ل اور ب وہی ہے جو ب اور ل ہے۔ لیکن اگر انہیں ایک صف میں ترتیب دینا ہو یا یکے بعد دیگرے ایک کمرے میں داخل کرنا ہو تو ل، ب اور ج، مختلف ترتیبیں ہوں گی۔ پس ۳ چیزوں میں سے دو چیزوں کو ترتیب دینے کے طریقوں کی تعداد = ۶ کیوں کہ ہر اجتماع سے دو ترتیبیں حاصل ہوتی ہیں۔ اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ن مختلف چیزوں میں سے س، س، س چیزوں کی ترتیبوں کی تعداد = $n(n-1)(n-2)$ (ن-۲) وان مثلثی عدد میں س، س، س کی ترتیبوں کی تعداد کو علامت

نتر سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ نیز پہلے ن طبعی عددوں کے حاصل ضرب کو
یعنی $(1 \times 2 \times 3 \dots \times n)$ کو علامت $n!$ سے تعبیر کیا جاتا ہے
اور اس کو پڑھتے ہیں ضربی ن۔ پس اس ترقیم کے مطابق

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \dots \times n$$

قدیم ریاضی دانوں کو مثلثی عددوں کے علاوہ مُدّسی عددوں سے
بھی بہت دل چسپی تھی۔ مثلاً تیسرے مُدّسی عدد سے مراد ایسے مُدّس
میں گولیوں کی تعداد ہے جس کے ہر ضلع میں ۳ گولیاں ہوں۔ ساتھ کی
شکل سے معلوم ہوتا ہے کہ تیسرا مُدّسی عدد ۱۹ ہے۔

اس طرح شکلیں بنا کر کسی مُدّسی عدد کی قیمت
معلوم کی جاسکتی ہے۔



اگر ن ویں مثلثی عدد کو نشان
سے اور ن ویں مُدّسی عدد کو س ن سے
تعبیر کیا جائے تو حاصل ہوتا ہے کہ

$$س ن = ۶ (ن - ۱) + ۱$$

مذکورہ، موٹھ، مکمل، رفیق، مثلثی اور مُدّسی عددوں سے قدیم
ریاضی دانوں کو عددوں کی مفروضہ طلسمی اور روحانی خاصیتوں کی وجہ سے
دل چسپی تھی نہ کہ ان عددوں کی عملی ضرورت کے لحاظ سے۔ لیکن یہ عددوں
سلسلے، روزمرہ حساب میں اور خاص طور پر مثلثی عدد توریث کے مسئلوں
پر بحث کرنے کے لیے جدید حیاتیات میں بہت کارآمد ثابت ہوئے ہیں۔
اس لیے ہمارے لیے ان عددوں اور سلسلوں سے واقف ہونا ضروری
اور مفید ہے۔

یاد رکھنے کی باتیں۔

$$(1) \quad \frac{n(n+1)}{2} = n + 1 + 2 + 3 + \dots$$

$$(2) \quad \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = n^2 + n + 1 + 2 + 3 + \dots$$

$$(3) \quad \frac{n^2(n+1)}{2} = n^3 + n^2 + n + 1 + 2 + 3 + \dots$$

$$(4) \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = n^3 - 3n^2 + 2n - 1 + \dots$$

اور اگر n چھوٹا ہو (۱) سے تو لامتناہی سلسلے کا مجموعہ $= \frac{1}{1-n}$

$$(5) \quad \frac{1}{1-n} = 1 + n + n^2 + n^3 + \dots$$

$$\frac{n}{1-n} = [1 + n + n^2 + \dots]$$

$$(6) \quad n \text{ وان مثلثی عدد} = \frac{n(n+1)}{2}$$



پچھٹا باب

دُنیا کا حجم۔ علمِ مثلث سے کیا کام لیا جاسکتا ہے؟

سکندر اعظم نے ۳۳۲ ق۔م میں مصر کو فتح کر کے یادگار کے طور پر بحیرہ روم کے کنارے پر شہر اسکندریہ آباد کیا جس کی شہرت رفتہ رفتہ اتنی بڑھی کہ قدیم دُنیا کے تمام علوم مثلاً ریاضی، ہنیت، طب، مشین سازی وغیرہ اس میں کھنچ کر آگئے اور ترقی کرنے لگے۔ جہاز رانی میں بھی یہ لوگ سب سے پیش پیش تھے۔ سکندر کی وفات (۳۲۳ ق۔م) کے بعد اس کے مشہور جرنیل بطلی موس نے (جو حکیم بطلی موس سے جدا شخص تھا) یادگار کے طور پر انسانی تاریخ میں سب سے پہلے منظم دارالعلوم کی بنا ڈالی جس کے ساتھ ایک عجائب خانہ، کتب خانہ اور جامعہ تھے، اس کے تین سو سال بعد جو لیس سیزر کی فاتح فوجوں نے اس عظیم الشان مخزنِ علوم کو جلا ڈالا۔ رومیوں کی حکومت کے زمانے میں بھی اسکندریہ مہذب دُنیا کا علمی مرکز بنا رہا۔ لیکن تیسری صدی عیسوی میں عیسائی مذہبی اقتدار کے شروع ہوتے ہی یہ شمعِ علم خاموش ہو گئی۔ سینٹ سیرل کے مذہبی پیشواؤں نے اسکندریہ کے دوسرے کتب خانے کو جس میں علوم و فنون کا بیش بہا ذخیرہ موجود تھا جلا کر خاک کر دیا۔ ان کی دلیل یہ تھی کہ بائبل خدا کا کلام ہے اور اس کے علاوہ اور کچھ پڑھنا شیطان کی شاگردی ہے۔ تیسری صدی عیسوی سے

عربوں کی فتح مصر تک یعنی ساتویں صدی عیسوی تک اسکندریہ کا دور تاریک رہا۔ یہ خیال رکھنا ضروری ہے کہ اسکندریہ کا تمدن برخلاف قدیم یونانی و رومی تمدن کے ایک بین المللی تمدن تھا۔

عربوں کی فتح مصر سے اسکندریہ کا روشن دور شروع ہوتا ہے۔ عربوں نے عددوں کے مشرقی طرزِ تحریر کو یونانی ریاضیات سے ملا کر نئی علمی ترقیوں کا دروازہ کھول دیا۔ اسکندریہ کا پہلا دور علمِ مثلث کی ترقی کے لیے نمایاں ہے۔ اس دور میں علمِ ہندسہ اور علمِ مساحت میں ارتباط قائم کیا گیا۔ گنتی میں بڑے بڑے عدد استعمال ہونے لگے۔ اس ترقی کا اصل راز یہ تھا کہ ریاضی کا تعلق پہلے پہل عملی دنیا سے قائم ہونے لگا۔

جامعہ اسکندریہ کے ابتدائی دور میں ارس طارکوس (۳۱۰ تا ۲۵۰ ق۔ م) اور ارشمیدس (۲۸۷ تا ۲۱۲ ق۔ م) خاص طور پر قابلِ ذکر ہیں۔ ارس طارکوس نے سب سے پہلے زمین سے چاند اور سورج کے اضافی فاصلے محسوب کیے۔ ارشمیدس سب سے پہلا شخص تھا جس نے دائرے کے محیط اور اس کے قطر کی نسبت کی قیمت کسی مطلوبہ درجہ صحت تک معلوم کرنے کا طریقہ حاصل کیا۔ وہ مکانیکی ایجادوں کے لیے بھی بہت مشہور ہے جن میں بیرم اور تیرنے والے جسموں کا کلیہ خاص طور پر قابلِ ذکر ہیں۔ وہ افلاطون کی طرح روحانی گورکھ دھندوں اور غالص ذہنی مشغلوں میں گم نہیں ہوا تھا۔ اس نے بیرم کے لصاب سے قوت کے فاصلوں میں رشتہ معلوم کیا اور آلہ جبرِ ثقیل ایجاد کیا۔ کثافت اضافی کے قاعدے کی مدد سے اس نے قیمتی دھاتوں میں کھوٹ معلوم کرنے کا طریقہ نکالا۔ π کی قیمت کی مدد سے پتیوں والی

مشینیں بنائیں اور دندانوں دار پٹیوں کے ذریعے جہاز کو پانی میں اتارنے کا طریقہ بتایا۔ اس نے ایک ایسا پمپ ایجاد کیا جس میں پیچ کے ذریعے پانی خارج کیا جاتا تھا۔ یہ تمام ایجادیں ریاضی اور عملی ضرورتوں کے ارتباط سے وجود میں آئیں۔ تقریباً سنہ ۱۰۸۰ ق۔م میں اسکندریہ کے ایک باشندے ہیرو (HERO) نامی نے ایک کتاب لکھی جس میں تقریباً ایک سو ایجادوں کا ذکر ہے۔ جس میں قابل ذکر آلہ ارتفاع والسمت، ڈھرا پمپ اور بھاپ انجن کا نمونہ ہیں۔ اس وقت کا تمدن اپنی ترقی میں سائنس کو عملی طور پر استعمال کر رہا تھا اور ایجادوں کی مانگ روز افزوں تھی۔

اسکندریہ کا یہ علمی دور ہر لحاظ سے عملی دنیا سے متعلق تھا۔ چنانچہ ہیارکوس نے (۱۰۸۰) ثابت ستاروں کی ایک فہرست مرتب کی۔ ارشمیدس نے کرۂ سماوی کی حرکت اور ستاروں کے مقام کی ظاہری تبدیلی کو واضح کرنے کے لیے ایک نمونہ تیار کیا جس میں پیچے کے ذریعے حرکت حاصل کی گئی تھی۔ ممکن ہو کہ اس نے زاویوں کی جدولیں بھی جہاز رانی کے متعلق عملی مسئلے حل کرنے کے لیے مرتب اور استعمال کی ہوں۔ اسکندریہ کے رومی حکومت میں داخل ہونے سے قبل ہی زمین سے چاند اور سورج کے فاصلے، اور زمین، چاند اور سورج کے محیط تقریباً معلوم کیے جا چکے تھے۔ چنانچہ زمین کے محیط کی محسوب شدہ قیمت اور موجودہ صحیح قیمت میں صرف پچاس میل کا فرق نکلتا ہے۔ شہر صور (TYRE) کے باشندے میرنیس (MARINUS) نے تقریباً سنہ ۱۵۰ء میں ارضی طوائف بلد و عرض بلد کے لحاظ سے زمین کے نقشے مرتب کیے۔ علم ہنیت کی اس ترقی نے زمین کی مساحت اور جہاز رانی میں بہت مدد دی۔ بطلموس

کی مشہور کتاب الجسطی دراصل ہبارکوس اور اس کے ہم عصروں کی تحقیقات پر مبنی ہے۔

چوتھے باب میں یہ بتایا گیا ہے کہ کسی چٹان کے پائیں تک پہنچنے کے بغیر علم ہندسہ کی مدد سے چٹان کی بلندی کس طرح ناپی جاسکتی ہے۔ بالکل اسی طرح اصطرلاب (یعنی آلہ زاویہ پیمائش) کی مدد سے زمین کے دو مختلف مقاموں سے چاند یا سیارے کے ارتفاع معلوم کر کے زمین سے اُس فلکی جرم کا فاصلہ محسوب کیا جاسکتا ہے۔ اراطوس تینس (ERATOS) نے سب سے پہلے زمین کی مساحت کر کے علم ہندسہ اور جغرافیہ میں تعلق قائم کیا۔ اس کے طریقے کی انتہائی سادگی اس بات سے ظاہر ہوتی ہے کہ اُس نے ذیل کے صرف چار اصولوں سے کام کیا۔

- (۱) بہت دور سے آنے والی شعاعیں تقریباً متوازی ہوتی ہیں۔
- (۲) دو متوازی خطوں کو قطع کرنے والا خط مساوی نظیر کے زاویے بناتا ہے۔
- (۳) جب کوئی فلکی جرم اس پر ہو (یعنی عین سر پر ہو) تو اس کو مشاہدہ کرنے والے سے ملانے والا خط زمین کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔
- (۴) دو پیر کے وقت مشاہدہ کرنے والے میں سے گزرنے والے خط کے ایک نہ ایک نقطے پر سورج عین سمت الراس میں ہوتا ہے۔

پوسیدونیس (POSEIDONIUS) نے ستارہ کینوپس (CANOPUS) کے

مشاہدے سے زمین کے محیط اور نصف قطر کی قیمت معلوم کی اصول کے لحاظ سے اس کا طریقہ وہی ہے جو عرب ہیئت دانوں نے قطب ستارے کے ارتفاع کی مدد سے زمین کا محیط معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا۔ علم ہندسہ کو عملی ضرورتوں کے لیے استعمال کر کے انسان نے یہ معلوم کیا کہ

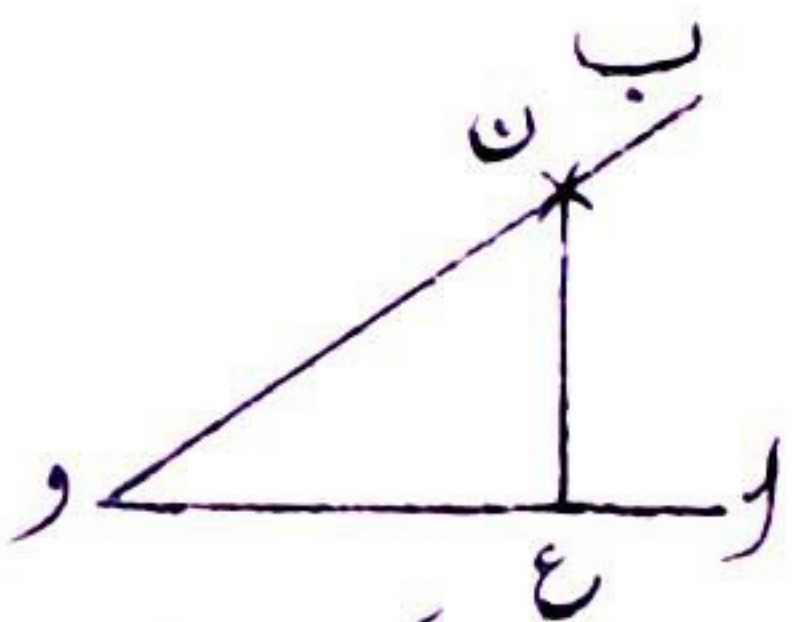
دنیا کا بہت سا حصہ ابھی دریافت طلب ہے۔

جب کوپرنیکس اور کیپلر (KEPLER) نے سیاروں کی حرکت کے متعلق قاعدے معلوم کیے اور علمی دنیا پھر اس طارکوں اور فیتا غورث کے نظریوں کے طرف متوجہ ہوئی تو ان نظریوں کی دل فریبی کی وجہ سے اس بطلی موسیٰ ہنیت کے عملی فائدے نظر انداز کر دیے گئے جو مسلمانوں کے اخراج کے بعد اُنڈس کی درس گاہوں میں یہودی ہنیت داں حاصل کرتے تھے۔ زمین کے محیط کی مساحت علم ہندسہ کے سادہ استعمال پر مبنی ہے۔ اگر ہم زمین پر ایک ہی طویل بلد پر کے دو مقاموں کا فاصلہ معلوم کریں اور ان کے عرض بلد کا فرق بھی معلوم کریں تو زمین کا محیط فوراً حاصل ہوتا ہے کیوں کہ زمین کے محیط کو ان دو مقاموں کے درمیانی فاصلے سے وہی نسبت ہے جو ۳۶۰ درجے کو ان دو مقاموں کے عرض بلد کے فرق سے ہے۔ اگر ہم زمین سے چاند کا فاصلہ معلوم کرنا چاہیں تو ہم زمین پر کے دو مقاموں کا درمیانی فاصلہ معلوم کرتے ہیں اور زاویہ پیمائی مدد سے وہ زاویے معلوم کرتے ہیں جو چاند کو ان مقاموں سے ملانے والے خط ان دو مقاموں میں سے گزرنے والے خط کے ساتھ بناتے ہیں۔ ان زاویوں کی مدد سے چاند کے فاصلے اور زمین پر کے دو مقاموں کے فاصلے کی نسبت حاصل ہوتی ہے جس سے چاند کا فاصلہ فوراً نکلتا ہے۔ تقریباً اسی طریقے سے سورج کا فاصلہ بھی معلوم کیا جاسکتا ہے لیکن سورج کی بہت بڑی دُوری کی وجہ سے زاویوں کی صحیح پیمائش میں کئی عملی مشکلیں پیدا ہوتی ہیں۔ اگر مثلث کا ایک زاویہ قائمہ زاویہ ہو جائے تو عمل میں اور بھی آسانی ہوتی ہے۔ اسکندریہ کے ہنیت دانوں نے اس عملی ضرورت

کے لیے قائمہ زاویہ والے مثلث کے ضلعوں کی نسبتوں کی جدولیں مرتب کیں۔ انھوں نے یونانی علم ہندسہ سے ایک نیا علم یعنی علم مثلث ایجاد کیا۔ فلکی جرموں کے فاصلے معلوم کرنے کے طریقے پر بحث کرنے سے پہلے ہم علم مثلث کے جدولوں کی کسی قدر تشریح کریں گے۔

کسی زاویے کی جیب معلوم کرنا

فرض کرو کہ \angle و ب ایک عادیہ زاویہ ہو جس کی جیب کی قیمت عملی طور پر معلوم کرنا ہو۔ خط و ب پر نقطہ ن اس طرح لو کہ \angle و ن = ایک ایکائی طول مثلاً ایک فٹ نقطہ ن سے و ب پر عمود ن ع نکالو اور اس کا طول ناپو۔ تب $\frac{ن ع}{و ن}$ کی قیمت کو زاویہ \angle و ب کی جیب کہتے ہیں۔ ظاہر ہو کہ و ن اور ن ع کو کافی صحت کے ساتھ



ناپنے سے جیب کی قیمت بھی کافی صحت کے ساتھ اس عملی طریقے سے حاصل کی جاسکتی ہے۔ اس طریقے

سے مختلف عادیہ زاویوں کے جیب معلوم کر کے ان کی جدول مرتب کی جاسکتی ہے۔ یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ قائمہ الزاویہ مثلث \angle و ن ع میں ضلع \angle و ن ہرگز بڑا نہیں ہو سکتا و تر و ن سے۔ اس لیے زاویہ \angle و ن کی جیب یعنی $\frac{ن ع}{و ن}$ کی قیمت کسی صورت میں ایک سے بڑی نہیں ہو سکتی۔ جیسے جیسے زاویہ \angle و ن قائمہ زاویہ کے قریب آتا جاتا ہے۔ \angle و ن تقریباً مساوی ہوتا جاتا ہے و ن کے، اس لیے اگر زاویہ \angle و ن مساوی ہو جائے قائمہ زاویہ کے تو اس کی جیب ایک کے

مساوی ہو جائے گی۔ اس نتیجے کو ہم اس طرح لکھتے ہیں جب $90^\circ = 1$ اگر زاویہ \angle و β گھٹ کر صفر کے بہت قریب آجائے تو \sin کا طول بہت چھوٹا ہوتا ہے۔ اس لیے $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ کی قیمت تقریباً صفر کے مساوی ہوتی ہے۔ اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ جب (صفر) = صفر۔ اگر کسی زاویہ \angle و α کی جیب مساوی ہو کر کے تو ہم لکھتے ہیں۔ جب $(\angle \alpha) = 1$ اوپر کے بیان میں ہم نے آسانی کی خاطر $\sin = 1$ کا ہی طول لیا ہے۔ اگر اس کی بجائے \sin کی کوئی قیمت لی جائے یعنی خط و β پر نقطہ \sin کہیں بھی لیا جائے اور \sin سے \angle پر عمود \sin نکال کر حسب بالاطریقہ سے جب $(\angle \alpha)$ کی قیمت معلوم کی جائے تو بھی وہی قیمت حاصل ہوگی جو پہلے حاصل ہوئی ہے۔

اب اسی شکل کی مدد سے اور دو کارآمد مثلثی نسبتوں کی تشریح کی جائے گی۔ نسبت $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ کو زاویہ \angle و β کی جیب التمام کہتے ہیں اور اس کو علامت جم $(\angle \beta)$ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ اگر دو زاویے ایسے ہوں کہ ان کا مجموعہ ایک قائمہ زاویہ یعنی 90° کے مساوی ہو تو ایک زاویے کی جیب دوسرے زاویے کی جیب التمام کے مساوی ہوتی ہے۔ مثلاً جب $50^\circ = \text{جم } 40^\circ$ اور جب $40^\circ = \text{جم } 50^\circ$

اس نتیجے سے یہ قاعدہ حاصل ہوتا ہے کہ اگر ہم صفر درجے سے لے کر 90° تک مناسب وقفوں سے زاویوں کی جیب معلوم کریں تو اسی جدول کی مدد سے انھی زاویوں کی جیب التمام لکھ دی جاسکتی ہے۔ اوپر کی شکل میں، نسبت $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ کو زاویہ \angle و β کا مماس کہتے

ہیں اور اس کو علامت مس (اؤب) سے تعبیر کرتے ہیں۔ شکل سے ظاہر ہے کہ مس (اؤب) = $\frac{ع ن}{و ع} = \frac{ع ن}{و ع} = \frac{ع ن}{و ع}$ جب اؤب پس حماس کی قیمت جیب اور جیب التمام کی جدولوں کی مدد سے سادہ تقسیم کے ذریعے حاصل کی جاسکتی ہے یا شکل کی مدد سے ع ن اور و ع کو ناپ کر محسوب کی جاسکتی ہے۔

ذیل کی جدول میں ۵، ۵ درجوں کے وقفے سے صفر سے ۴۵ تک کے زاویوں کی جیب، جیب التمام اور حماس کی تقریبی قیمتیں دی گئی ہیں۔

زاویہ	صفر	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵
جیب	۰	۰.۰۸۷	۰.۱۷۴	۰.۲۵۹	۰.۳۴۲	۰.۴۲۳	۰.۵۰۰	۰.۵۶۳	۰.۶۲۲	۰.۶۰۷
التمام جیب	۱	۰.۹۹۶	۰.۹۸۵	۰.۹۶۶	۰.۹۴۰	۰.۹۰۶	۰.۸۶۶	۰.۸۱۹	۰.۷۶۶	۰.۷۰۷
حماس	۰	۰.۰۸۸	۰.۱۷۶	۰.۲۶۸	۰.۳۶۴	۰.۴۶۶	۰.۵۷۷	۰.۶۸۰	۰.۷۸۲	۱

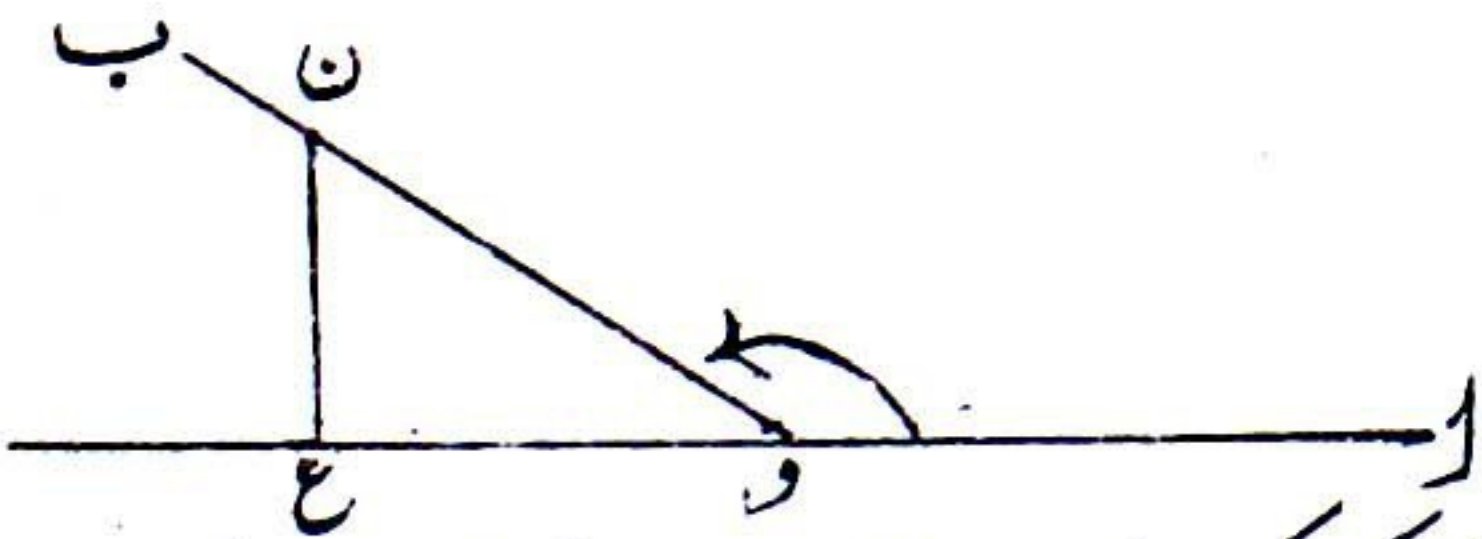
اس جدول کی مدد سے ہم ۴۵ سے ۹۰ تک کے زاویوں کی جیب، جیب التمام اور حماس کی قیمتیں بھی محسوب کر سکتے ہیں۔ مثلاً اگر ہمیں جب ۶۰ معلوم کرنا ہو تو ہم جانتے ہیں کہ جب (۶۰) = جم (۹۰ - ۶۰) = جم ۳۰ = ۰.۵۰۰ = ۰.۸۶۶ اور جیب اور جیب التمام کی قیمتوں کی مدد سے کسی حادثہ زاویہ کے حماس کی قیمت محسوب کی جاسکتی ہے۔ مثلاً مس ۴۰ = جم ۴۰ = جم ۲۰ = $\frac{۰.۶۲۲}{۰.۷۰۷} = \frac{۰.۹۴۰}{۰.۹۰۶} = ۲.۷۳۸$ تقریباً

اگر اسی طرح سے ہم مس (۸۵) کی قیمت معلوم کرنا چاہیں تو حاصل ہوگا
 مس ۸۵ = جم ۵ = $\frac{۰.۹۹۷}{۰.۰۸۷} = ۱۱.۳۳$
 اب جیسے جیسے زاویہ قریب آتا ہے قائمہ زاویہ کے اس زاویے کی

جیب التمام بہت چھوٹی ہوتی جاتی ہے۔ اس لیے 90° کے قریب کے زاویے کا حماس بہت بڑا عدد ہوتا ہے۔ اس نتیجے کو ہم یوں بھی بیان کرتے ہیں کہ $90^\circ =$ لامتناہی۔ اس کا مطلب صرف یہ ہے کہ زاویے کو 90° کے کافی قریب لینے سے اس زاویے کے حماس کو جتنا بڑا چاہیں بنایا جاسکتا ہے۔ لامتناہی کے لیے علامت ∞ استعمال کی جاتی ہے۔

ہم نے اختصار کی خاطر 5 ، 5 درجوں کے وقفوں سے جدول مرتب کی ہے۔ عملی کام کے لیے جو جدولیں کام آتی ہیں ان میں 6 منٹ یعنی $1/4$ درجے کے وقفے سے زاویوں کی مثلثی نسبتیں درج ہوتی ہیں جو عملی ضرورتوں کے لیے بہت کافی ہیں کیوں کہ معمولی آلات سے اس سے زیادہ صحت کے ساتھ زاویے ناپے نہیں جاسکتے۔ زیادہ صحیح عمل کے لیے اس سے زیادہ صحیح جدولیں مرتب کی گئی ہیں۔ البتہ ان جدولوں کو مرتب کرنے کے لیے علم ہندسہ کے عملی طریقے کار آمد نہیں ہونے کیوں کہ عملی پیمائش میں ہمیشہ خطا ہوتی ہے۔ اس لیے احصا کے نظری طریقے استعمال کیے جاتے ہیں۔

اگر زاویہ منفرجہ ہو یعنی ایک قائمہ زاویہ سے بڑا ہو تو اس کی مثلثی نسبتوں کی قیمتوں کا یقین حسب ذیل طریقے سے کیا جاتا ہے:-



فرض کرو کہ دیا ہوا منفرجہ زاویہ \angle و ب ہے۔ ہم یہ خیال کر سکتے ہیں کہ ایک گھومنے والا خط ابتدائی مقام و سے شروع کر کے مخالف سمت ساعت میں گھوم کر مقام و ب پر پہنچا ہے اور اسی طرح سے

منفرجہ زاویہ ل و ب مرسم ہوا ہے۔ خط و ب کے کسی نقطے ن سے ل و
 محدودہ (یعنی خارج شدہ) پر عمود ن ع نکالو۔ جبر و مقابله کی قراداد
 (دیکھو ساتواں باب) کے مطابق اگر و ل کو مثبت مانا جائے تو و ع کو
 منفی ماننا ہوگا۔ نیز ع ن مثبت ہوگا۔

اس لیے جب ل و ب = $\frac{ع ن}{و ن}$ = ایک مثبت مقدار

اور جم (ل و ب) = $\frac{و ع}{و ن}$ = ایک منفی مقدار

پس معلوم ہوا کہ منفرجہ زاویے کی جیب مثبت ہوتی ہے اور جیب التمام
 منفی۔ نیز شکل سے یہ بھی آسانی سے حاصل ہوتا ہے کہ

جب (۱۸۰ - ط) = جب ط

اور جم (۱۸۰ - ط) = جم ط

جہاں ط کوئی حادہ زاویہ ہے۔

ان ضابطوں کی مدد سے کسی منفرجہ زاویے کی جیب یا جیب التمام کی
 قیمت حادہ زاویے کی جیب یا جیب التمام کی رقوم میں حاصل کی جاسکتی

ہے۔ مثلاً جم (۱۲۰) = جم (۱۸۰ - ۶۰) = جم ۶۰ = $\frac{۱}{۲}$

اور جب (۱۵۰) = جب (۱۸۰ - ۳۰) = جب ۳۰ = $\frac{۱}{۲}$

عملی فائدہ۔ ہم ان جدولوں کے ذریعے نہ صرف صحت سے نقشے تیار کر سکتے

ہیں بلکہ زمین کی پیمائش بھی بڑی صحت سے کر سکتے ہیں۔ باب چہارم میں

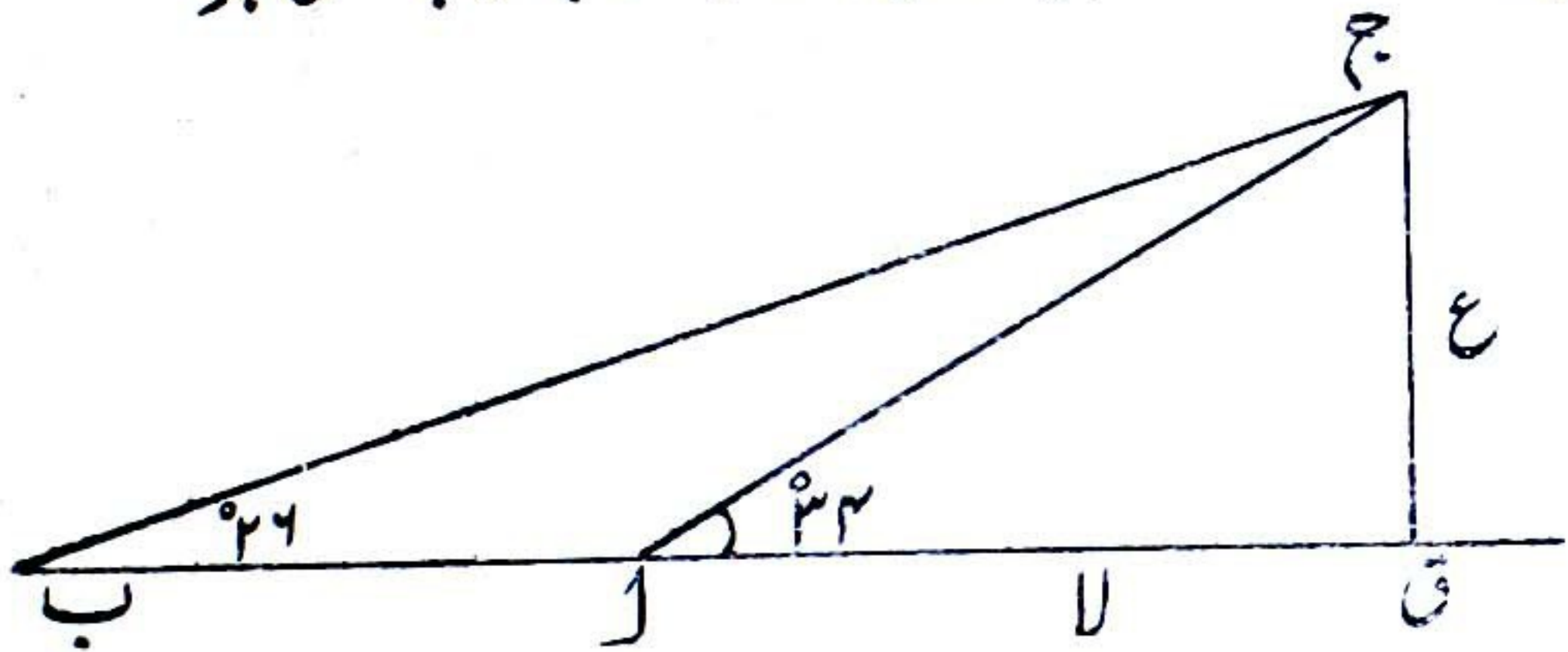
چٹان کی بلندی معلوم کرنے کا جو قاعدہ ہم نے بتلایا تھا اُس میں دو تین

باتیں فرض کر لی گئی ہیں۔ یعنی یہ کہ ہم چٹان کے پائین میں سے گزرنے

والے خط پر ادھر ادھر گھوم کر یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ کس مقام سے

چٹان کا ارتفاع ۳۰ یا ۲۵ ہے۔ اس کے برخلاف اوپر کی جدول کی

دو سے دو مقاموں ل اور جب سے چٹان کے ارتفاعی زاویے ناپ کر
ذیل کے قاعدے سے چٹان کی بلندی محسوب کی جاسکتی ہے۔



ل اور ب مشاہدے کے دو مقام ہیں جو ایک چٹان کے پائیں میں سے
گزرنے والے خط پر لیے گئے ہیں اور ان مقاموں کا درمیانی فاصلہ ہے۔

ل اور ب سے چٹان کی چوٹی کے ارتفاعی زاویے ۳۲ اور ۲۶ ہیں۔ نیز
فرض کرو کہ ل سے چٹان کے پائیں کا فاصلہ لا ہے اور چٹان کی بلندی ع

$$\text{ہے۔ تب } \frac{ع}{لا} = \text{مس } ۳۲^\circ = ۰.۶۷۴۳ \text{ (جدول سے) } \therefore لا = \frac{ع}{۰.۶۷۴۳}$$

$$\text{نیز } \frac{ع}{لا+ف} = \text{مس } ۲۶^\circ = ۰.۴۳۸۱ \text{ (جدول سے) } \therefore ع = ۰.۴۳۸۱(لا+ف)$$

$$\therefore ع = ۰.۴۳۸۱ \left(\frac{ع}{۰.۶۷۴۳} + ف \right)$$

اب اگر فاصلہ ف ناپ کر معلوم کیا جائے۔ مثلاً اگر ف = ۶۳ گز

$$\text{تو } ع = ۰.۴۳۸۱ \left(\frac{ع}{۰.۶۷۴۳} + ۶۳ \right)$$

اس کو حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ ع = ۱۱۳ گز تقریباً

اس مثال سے یہ واضح ہوتا ہے کہ کسی مثلث کا ایک ضلع اور دو

زاویے معلوم ہوں تو ارتفاع معلوم کیا جاسکتا ہے اور اس کی رو سے

بقیہ دو ضلعوں کے طویل محسوب کیے جاسکتے ہیں۔ چٹان چ اوپر کی شکل

میں $\frac{ع}{لا} = \text{مس } ۲۶^\circ$ چوں کہ ج ق یعنی ع معلوم ہو گیا ہے اور

جب 27° جدول سے معلوم ہو سکتا ہے اس لیے ج ب کا طویل محسوب کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح ج ل، کا طویل بھی محسوب کیا جاسکتا ہے۔

اس طرح اگر مثلث کے تینوں ضلع معلوم ہوں تو ضابطہ

$$\text{جھ ل} = \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ل}^2}{2 \text{ب ج}}$$

اور اس طرح کے دو اور ضابطوں کی مدد سے مثلث کے زاویے ل، ب، ج محسوب کیے جاسکتے ہیں۔

نیز انھی ضابطوں کی مدد سے اگر مثلث کے دو ضلع اور ان کا

درمیانی زاویہ معلوم ہو تو تیسرا ضلع محسوب کیا جاسکتا ہے۔ چنانچہ

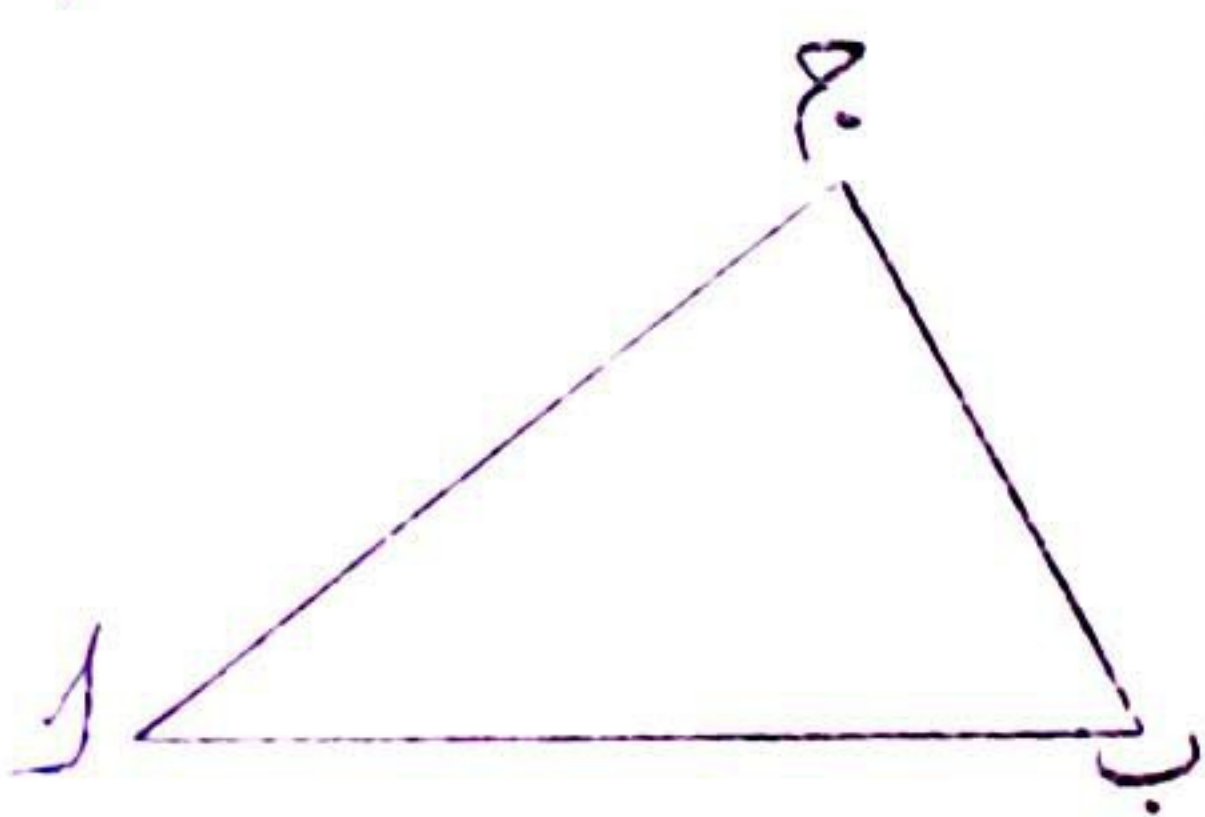
$$\text{ل}^2 = \text{ب}^2 + \text{ج}^2 - 2 \text{ب ج} \cos \text{ل}$$

اس کی مدد سے ضلع ل محسوب کیا جاسکتا ہے جب کہ ب، ج اور زاویہ ل معلوم ہوں۔

کسی خطہ زمین کا نقشہ بنانا۔

پہلے دو مقاموں ل اور ب کا درمیانی فاصلہ نہایت صحت سے

ناپ لیا جاتا ہے۔ پھر اصطراب (یعنی زاویہ پیمائے) کی مدد سے مقام ل پر



فاصلہ ب ج کے مقابل زاویہ

ناپ لیا جاتا ہے جہاں ج کوئی

اور معین مقام مثلاً درخت ہے۔

پھر مقام ب پر فاصلہ ل ج

کے مقابل زاویہ ناپ لیا جاتا ہے اس طرح اس مثلث کا ایک ضلع اور

دو زاویے معلوم ہوتے ہیں۔ اس لیے جدول سے ضلع ل ج، ب ج

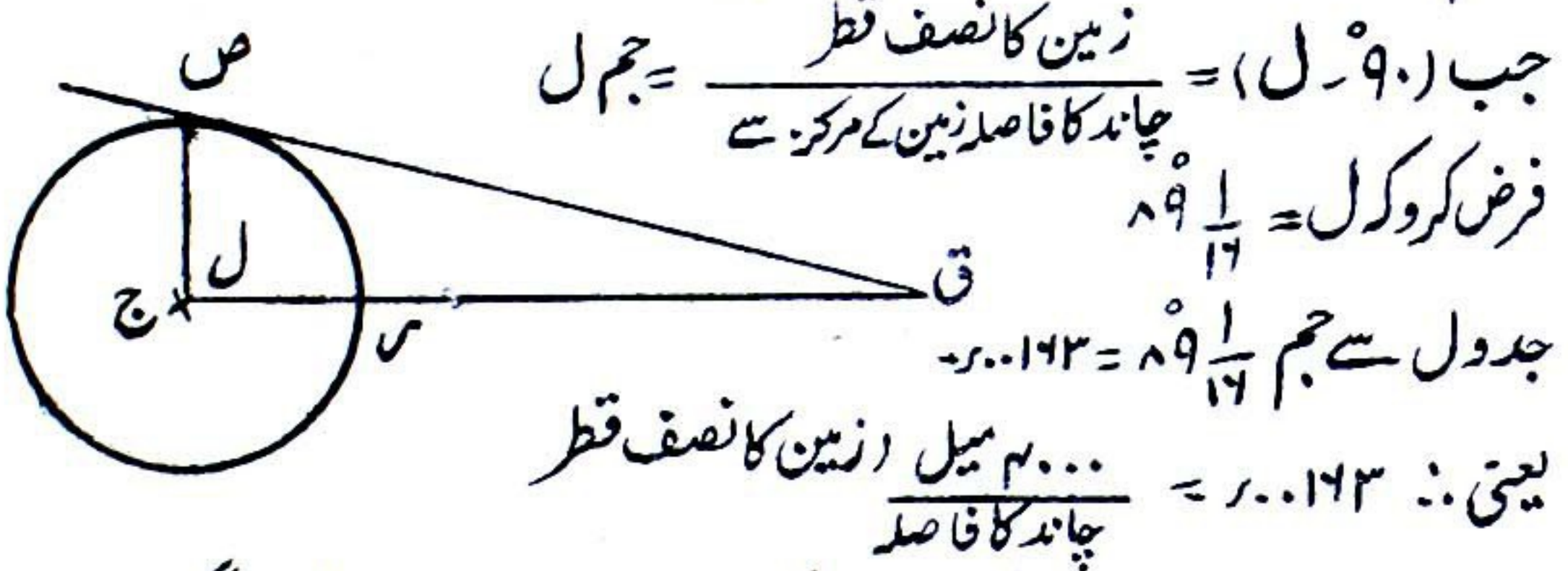
معلوم ہو سکتے ہیں۔ اس طرح دیے ہوئے کھیت یا خطہ زمین کو مختلف

موزوں مثلثوں میں تقسیم کر کے ہر ایک کی جدا جدا مساحت آسانی سے

کی جاسکتی ہے اور کھیت کا نقشہ تیار ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ دور صد گاہیں میں اور ص ایسی ہیں
چاند کا فاصلہ زمین سے | کہ ان کے عرض بلد مساوی ہیں اور چاند کسی

خاص آن پر ایک مقام ص کے افق پر اور دوسرے مقام س کے راس پر
ہے۔ اور فرض کرو کہ ان مقاموں کے طویل بلد کا فرق ل ہے۔ زمین کے
مرکز کو ج سے اور چاند کو ق سے تعبیر کیا گیا ہے۔ اس طرح ہمیں ایک
قائم الزاویہ مثلث ج ق ص ملتا ہے۔



∴ چاند کا فاصلہ زمین کے مرکز سے = 225000 میل (تقریباً)

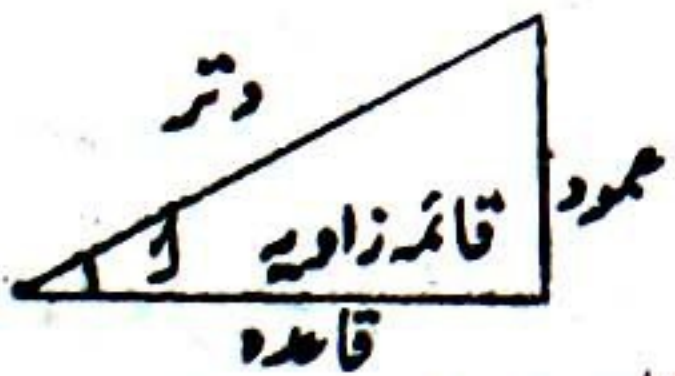
چاند کا فاصلہ معلوم ہونے کے بعد ہم اس کا محیط اور نصف قطر بھی معلوم
کر سکتے ہیں۔ اس کے لیے ماہ کامل کے محیط پر دو متقابل داغوں (چاند کے
دھبوں) کا مشاہدہ کی آنکھ پر بنے والا زاویہ ناپا جاتا ہے۔ اگر یہ زاویہ ل ہو
تو۔ جب $\frac{1}{2} = \frac{\text{چاند کا نصف قطر}}{\text{زمین سے چاند کا فاصلہ}}$ مشاہدے سے معلوم ہوتا ہے کہ

1 = نصف درجہ، نیز جب $\frac{1}{2} = 0.022$ (جدول سے)

$$\frac{\text{چاند کا نصف قطر}}{225000} =$$

∴ چاند کا نصف قطر = 1081 میل

ہم ایک اور کارآمد قاعدہ لکھتے ہیں۔



کسی مثلث قائمہ الزاویہ میں

$$(\text{عمود})^2 + (\text{قاعدہ})^2 = (\text{وتر})^2 \text{ یا } (\text{وتر})^2 = (\text{قاعدہ})^2 + (\text{عمود})^2$$

یا جب $1 = 1 + \text{جم } 1 = 1$

مثلاً اگر زاویہ $1 = 20^\circ$ ، جب $1 = 20^\circ$ اس لیے اوپر کے قاعدے کی رو سے

$$1 = 1 + \text{جم } 1 + \text{جم } 2 = 20^\circ = \frac{20}{360}$$

اہل بابل کی طرح یہودی بھی π کی قیمت ۳ کے مساوی

π کی قیمت خیال کرتے تھے۔ لیکن جب اسکندریہ کے ریاضی دانوں،

بالخصوص ارشمیدس اور ہیرون نے نازک میکانکی آلے ایجاد کیے تو انھیں

اندازہ ہوا کہ π کی قیمت کے لیے اس سے بہتر تخمینہ کی شدید ضرورت ہے۔

ارشمیدس نے π کی قیمت معلوم کرنے کے لیے جو طریقہ اختیار کیا اس سے

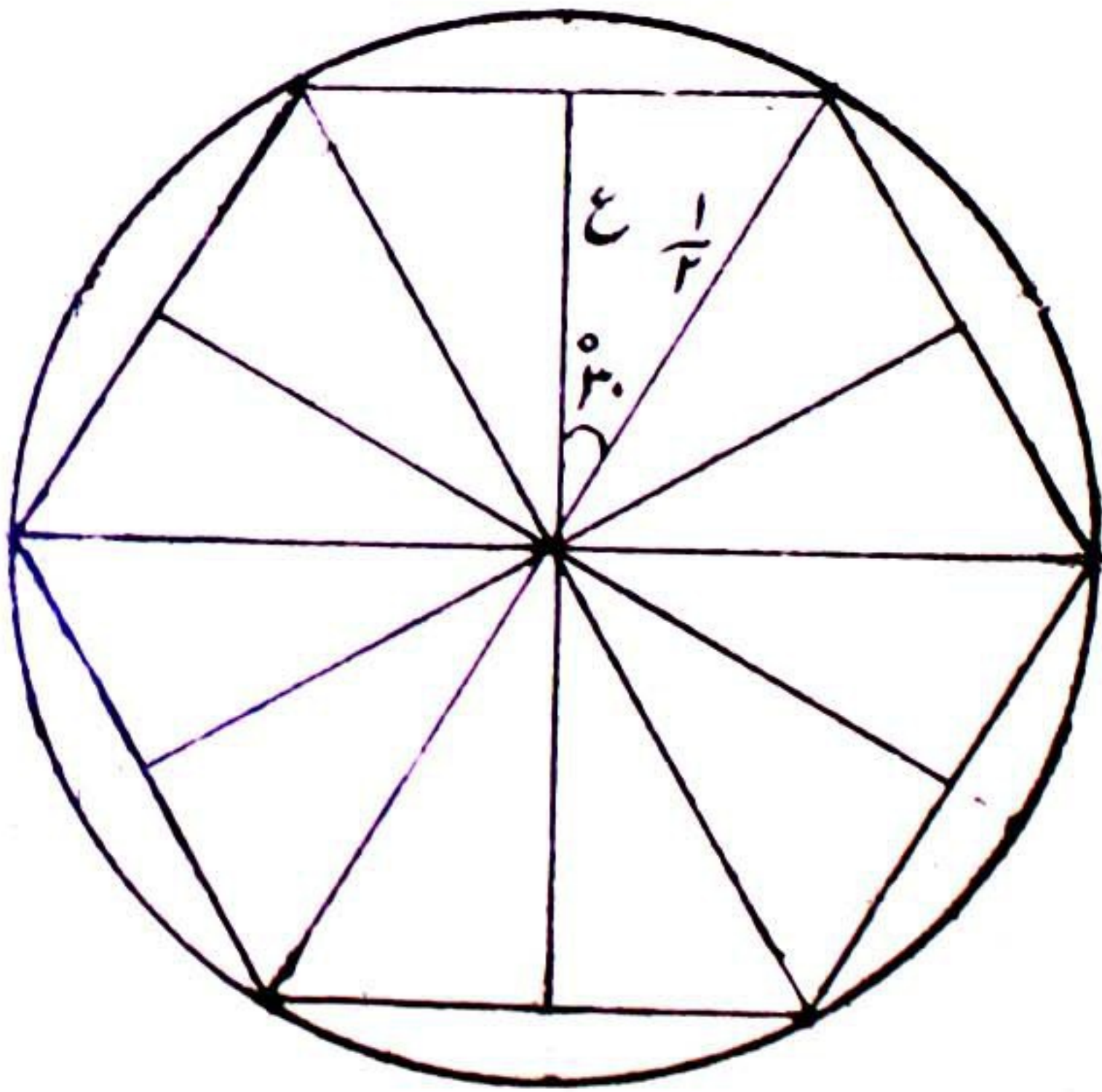
پتا چلتا ہے کہ ہبارکوس سے پہلے اس نے مثلثی جدولیں تیار کر لی تھیں اور

انھی سے کام لیا۔ کیوں کہ جب، اور مس، کی قیمت معلوم کرنے کے بعد ہم

π کی قیمت کسی درجہ صحت تک محسوب کر سکتے ہیں۔ ہم بتا چکے ہیں کہ کسی

دائرے میں محیط اور قطر کی نسبت مستقل ہوتی ہے اور یہ ظاہر ہے کہ اگر کسی

دائرے کے اندر اور باہر کثیر ضلعی شکلیں بنائی جائیں تو دائرے کا محیط ان



دونوں محیطوں کے درمیان ہوگا۔ فرض کرو کہ کثیر ضلعی کے ضلعوں کی تعداد n ہے اور دائرے کا محیط = m اور قطر = $5 = a$ تو نصف قطر = $\frac{1}{2}a$ ، اور $\pi = 3.14$ ہم ان کثیر ضلعی شکلوں میں سے ہر ایک کو $2n$ قائم الزاویہ مثلثوں میں تقسیم کرتے ہیں جن میں سے ہر ایک کا مرکزی زاویہ θ کے برابر ہے تو زاویہ $\theta = \frac{360^\circ}{2n}$ اس لیے بیرونی کثیر ضلعی کا محیط $m = 2n \times c$ جہاں $c = \frac{1}{2}m$ مثلاً اگر $n = 6$ ، تو

$$\left. \begin{aligned} m &= 6 = \left(\frac{360^\circ}{12}\right) \\ &= 6 = 30^\circ \\ &= 3.14 \end{aligned} \right\}$$

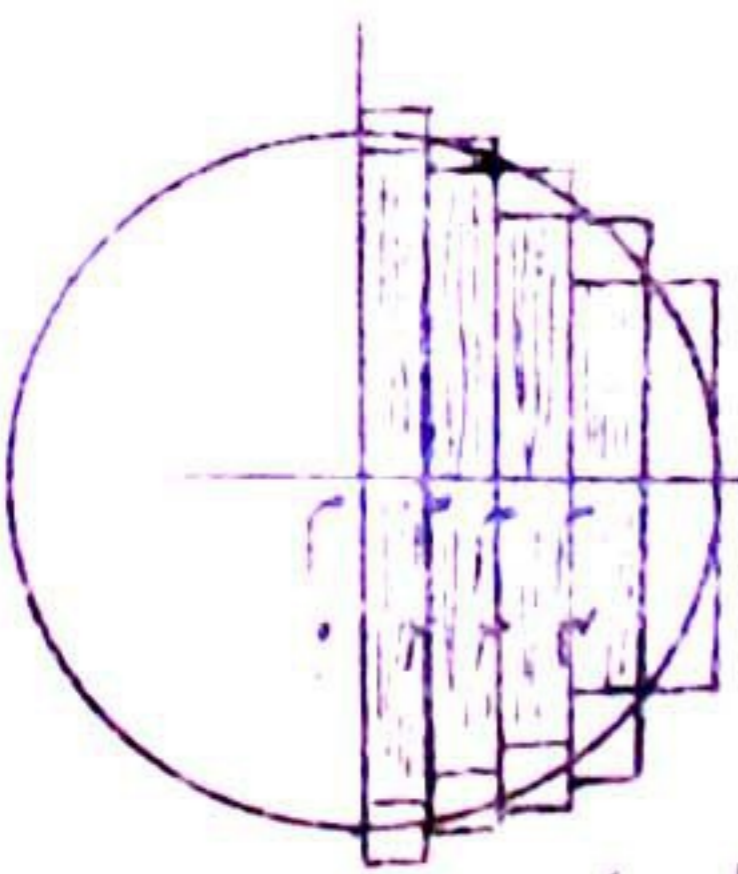
اسی طرح داخلی کثیر ضلعی کا محیط (m) = n جب $\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$ اور اگر $n = 6$ ، $m = 6 = 30^\circ$ جب $6 = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ گویا π کی قیمت ۳ اور ۳.۱۴ کے بین بین ہے یعنی اوسطاً 3.14 ± 0.14 کے بین بین ہے۔ جیسے جیسے ضلعوں کی تعداد بڑھے گی فرق کم ہوتا جائے گا اور ہم جب اور m کی جدول سے π کی قیمت آسانی کے ساتھ معلوم کر سکتے ہیں۔

ارشمیدس نے π کی قیمت $\frac{1}{2} \times 3$ اور $\frac{1}{2} \times 3$ کے درمیان لی۔ اہمیس (AHMES) کے مخطوط (PAPYRUS) مورخ ۱۵۰۰ ق۔ م تقریباً، میں π کی قیمت ۳.۱۶ یا ۳.۱۷ بتلائی گئی ہے۔ چینی تقویم ساز اور انجنیر بھی اس قیمت کو استعمال کرتے تھے۔ قریباً ۶۰۰ میں ایک چینی انجنیر آرسانی سوچکشی نے (جس نے ایک موٹر بوٹ بھی بنائی اور اس میں بحری کمپاس بھی لگایا) π کی قیمت کا تخمینہ حیرت انگیز طور پر صحیح لگایا ہے۔ یعنی ۳.۱۴۱۵۹۲۶ اور

۱۵۹۲ء کے درمیان وہ قاعدہ تو ابھی تک نہیں معلوم ہو سکا جس کی مدد سے اس نے اتنی صحیح قیمت اخذ کی تھی لیکن معلوم ہوا ہے کہ اس زمانے میں جاپانی بھی ان قاعدوں کو استعمال کر رہے تھے جنہیں یورپ نے بعد میں تقریباً ۱۶۰۰ء سے استعمال کرنا شروع کیا۔ اور جب جاپانی جو چینیوں کے شاگرد تھے یہ طریقے جانتے تھے تو اغلب یہ کہ چینی بھی بہت پیشتر سے یہ قاعدہ جانتے ہوں گے۔ ممکن ہے کہ جب اورمس، والے ارشمیدس کے قاعدے چینیوں کو ارشمیدس کے زمانے میں یا اس سے پیشتر بھی معلوم ہوں۔ اس طرح جاپانیوں نے بھی π کی قیمت نہایت صحت کے ساتھ معلوم کر لی تھی۔ انھوں نے دائرے کو نہایت باریک مستطیلوں میں تقسیم کیا اور یہ قاعدہ استعمال کیا کہ دائرے کا رقبہ = $\pi \times r^2$ ۔ جہاں r = نصف قطر۔ اس طرح اگر اکائی نصف قطر والا دائرہ ہو تو دائرے کا رقبہ = π ۔

π کی قیمت معلوم کرنے کا جاپانی طریقہ

اگر کسی ترقیبی کاغذ پر ہم دائرہ بنائیں تو وہ دو قسم کے مستطیلی ٹکڑوں میں تقسیم ہو جائے گا۔ اب فرض کرو کہ ہم ایک نصف دائرے میں باہر کی طرف پانچ مستطیلیں بناتے ہیں۔ اور اندر چار مستطیلیں ساتھ کے



خاکے سے ظاہر ہے کہ پانچویں مستطیل اندر کیوں نہیں

بن سکتی اگر دائرے کا نصف قطر = r ، تو ہر

مستطیل کا عرض = $\frac{1}{5}r$ ، فرض کرو کہ

دائرے کا مرکز مبدا ہے اور مستطیل کا عرض و طول

m اور l ہیں۔ اس لیے مربع دائرے کی بیرونی مستطیلوں کا

$$\text{رقبہ} = \frac{1}{5}m + \frac{1}{5}m + \frac{1}{5}m + \frac{1}{5}m + \frac{1}{5}m = \frac{1}{5}(m + m + m + m + m)$$

∴ پورے دائرے میں ایسی بنائی ہوئی مستطیلوں کا رقبہ =

$$\frac{1}{5} (10 + 11 + 12 + 13 + 14)$$

اور اس طرح اندرونی مستطیلوں کا رقبہ = $\frac{1}{5} (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$

فیثاغورث کے مسئلے سے m, m, m, \dots کی قیمتیں معلوم ہو سکتی ہیں۔

اس طرح عمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ بیرونی مستطیلوں کا رقبہ = 2.22 تقریباً

اور اندرونی مستطیلوں کا رقبہ = 2.62 تقریباً

چوں کہ دائرے کا نصف قطر اکائی ہے، اس لیے دائرے کا رقبہ π ہے

اور اس لیے π کی قیمت 2.62 اور 2.22 کے بین بین ہے۔

اسی طرح n کی بڑی قیمت لینے سے π کی قیمت زیادہ صحت کے ساتھ حاصل

کی جا سکتی ہے۔

قدیم زمانے میں زاویے کی اکائی درجہ تھی۔ بعد ازاں زاویہ

قائمہ کو اکائی تصور کیا گیا۔ پھر آلات کی ساخت میں جب

نیم قطری

مزید کسی موزوں اکائی کی ضرورت ہوئی تو نیم قطری اکائی تجویز کی گئی۔

اگر کسی دائرے کے نصف قطر کے طول کے برابر ایک قوس لی جائے

اور اس قوس کے سروں کو مرکز سے ملا دیا جائے تو مرکز پر بننے والا

زاویہ نیم قطری کہلاتا ہے۔ اگر ہم نصف دائرے کے قوس کو سیدھا کریں

تو اس کا طول نصف قطر کا π گنا ہوگا۔ گویا اگر π نصف قطر ہو تو دائرے

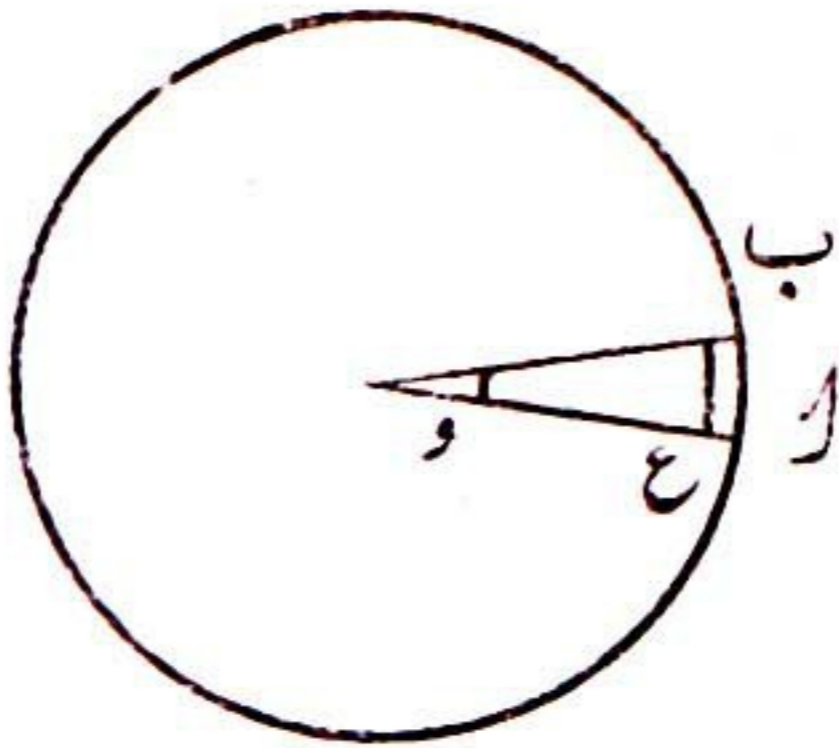
کا محیط 2π ہوگا اور اس لیے نصف محیط π ہے اس لیے دو

قائمہ زاویے = π نیم قطری۔

شکل کی مدد سے یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ چھوٹے زاویے

کا حیب کا قیمت اس زاویے کے نیم قطری ناپ کے تقریباً مساوی

ہوتی ہے۔



کیوں کہ جب $ا و ب = \frac{ع ب}{و}$ جہاں $ب$ باع عمود ہے $و ا$ پر۔

اور $ا و ب$ کا نیم قطری ناپ = $\frac{\text{قوس } ا ب}{و}$

چوں کہ $ع ب$ تقریباً مساوی ہے قوس $ا ب$ کے

اس لیے جب $ا و ب = ا و ب$ کا نیم قطری ناپ -

اگر جدول سے ہم ۵ کی جیب معلوم کریں تو ہمیں ۵ کا نیم قطری ناپ

حاصل ہوگا۔ اس سے سادہ تناسب کی مدد سے ۲۰ کا نیم قطری ناپ

یعنی ۲ کی قیمت حاصل ہوگی۔ اس طرح اگر جدولیں صحیح ہوں تو اس

سے ہم ۲۲ کی قیمت پانچ درجے اعشاریہ تک نکال سکتے ہیں۔ اس طرح

حاصل ہوتا ہے کہ $۲۲ = ۱۲۱۵۹$ ۔ اس وقت تک ۲۲ کی قیمت اعشاریہ

کے (۰.۰۰) مقام تک معلوم کی جا چکی ہے۔ لیکن عملاً اس کاوش کی زیادہ

ضرورت نہیں۔ کیوں کہ اگر ۲۲ کی قیمت اعشاریہ کے دس مقام تک بھی

صحیح معلوم ہو تو ہمیں زمین کا محیط انچوں کی کسروں تک معلوم ہو سکتا

ہے اور اعشاریہ کے ۳۰ مقام تک یہ قیمت لینے سے تمام مری کا بنائے

کا محیط خوردبین سے بھی زیادہ صحت سے محسوس کیا جا سکتا ہے۔ اچھے

ہوائی جہازوں کی ساخت کے لیے ۲۲ کی قیمت اعشاریہ کے ۴ مقام تک

لینا کافی ہے۔

اسکندریہ کا علم ہنیت | اجرام فلکی کی پیمائش کے لیے اسکندریہ کے ہنیت دانوں نے آبی گھڑیوں سے مدد لی۔ لیکن یہ

گھڑیاں جہاز رانی کے حسابوں میں کام نہ آ سکتی تھیں۔ چنانچہ جہاز رانی کے حسابوں کے لیے انھیں نہایت مشکل طریقے اختیار کرنے پڑتے تھے۔ جیسا کہ ہم بتا چکے ہیں ہیارکوس اور اس کے بعد ارس طارکوس نے اجرام فلکی کے فاصلے معلوم کرنے کی کوششیں کیں۔ ارس طارکوس نے ایک نہایت طولانی ہندسی طریقے سے یہ اندازہ لگایا کہ زمین سے آفتاب کا فاصلہ، زمین سے چاند کے فاصلے کے ۱۸ گنے سے زیادہ اور ۲۰ گنے سے کم ہے۔ اس اندازے کے مطابق زمین سے سورج کا فاصلہ ۴۵ لاکھ میل سے کچھ ہی زیادہ نکلتا ہے۔ اس کے اندازے کے مطابق سورج کا قطر زمین کے قطر کا تقریباً ۶ گنا ہے اور چاند کا قطر زمین کے قطر کا $\frac{1}{10}$ ہے۔ جدید پیمائشوں کے مطابق سورج کا فاصلہ ۹۳ لاکھ میل ہے اور ارس طارکوس کے اندازے میں غلطی کی اصل وجہ یہ تھی کہ اس زمانے میں حساس اور صحیح آلات پیمائش موجود نہیں تھے۔

اپولونیس نے (جو علم ہندسہ کا ماہر تھا) فلکی پیمائشوں میں علم ہندسہ سے کام لیا۔ نیز سیاروں کی ظاہری حرکت کی توجیہ ہم مرکز دوائر کی مدد سے کی تھی۔ ہیارکوس نے اپولونیس کے نظریوں کی مدد سے استفادہ کر کے اختلافات سنظر کا نظریہ پیش کیا۔ اس کے اندازے کے مطابق سورج کا فاصلہ، چاند کے فاصلے کا تقریباً ۲۰ گنا ہے۔ دو صدی بعد بطلموس نے انھی مسئلوں پر غور کیا۔ مگر اس کو اپنے پیش رووں سے کچھ زیادہ کامیابی

حاصل نہیں ہوئی۔ چنانچہ اس کے اندازے کے مطابق سورج کا فاصلہ زمین کے نصف قطر کا ۱۲۱۰ گنا نکلتا ہے، جو ہمارے کوس کے تخمینے سے بھی کم ہے۔ اس نے زمین کا محیط اور زمین سے چاند کا فاصلہ بھی محسوب کیا۔ بطلی موس کو یہ بھی معلوم تھا کہ چاند کا ظاہری نصف قطر تقریباً $\frac{1}{4}$ ہے (یعنی چاند کے قطر کے مقابلے میں) شاید کی آنکھ پر $\frac{1}{4}$ کا زاویہ بنتا ہے) اس نے اپنے پیش روؤں کی ہستی تحقیقات کو منظم طور پر اپنی شہرہ آفاق کتاب "المجسطی" (۱۵۰ء) میں پیش کیا، اس کتاب سے عربوں نے اپنی ہستی تحقیقات میں بڑی مدد لی اور انھیں کے توسط سے اس کتاب کے عربی ترجمے یورپ میں پہنچے جن کی مدد سے پندرہویں صدی کے بحری سیاحوں نے نقشے بنانا اور سمندر پر جہاز کا مقام متعین کرنا سیکھا۔ نیز انھیں یہ بھی معلوم ہوا کہ دنیا کا ایک بہت بڑا حصہ ابھی دریافت طلب ہے۔

جہازرانوں کو سمندر پر اپنا مقام متعین کرنے کے لیے اور مشین سازوں کو اچھی مشینیں بنانے کے لیے حسابی عملوں میں کافی جہارت کی ضرورت ہوتی ہے۔ اس قسم کے کارآمد حسابوں سے یونانی ریاضی دان نا آشنا تھے۔ حساب کو عملی ضرورتوں کے لیے استعمال کرنے کا سہرا اسکندریہ والوں کے سر ہے۔ ابتداء ہی میں ایشیاء کے عملی کام میں حساب کی اہمیت کو محسوس کر کے π کی قیمت ایک سلسلے کی شکل میں حاصل کی۔ وہ پہلا ریاضی دان تھا جس نے گھٹتی ہوئی رتبوں والا متدق سلسلہ دریافت کیا۔ اس نے حسب ذیل شکل کے لائنناہی ہندسی سلسلے کا مجموعہ معلوم کیا۔

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \dots$$

فرض کرو کہ اس سلسلے کا مجموعہ = ص

$$\dots + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \text{ص یعنی ص}$$

$$\dots + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\text{ص}}{2}$$

تفریق سے حاصل ہوتا ہے ص - $\frac{\text{ص}}{2} = 1$ ، یعنی $\frac{1}{2} \text{ ص} = 1$

$$\text{یعنی ص} = 2$$

پس معلوم ہوا کہ اوپر کے لاتنا ہی سلسلے کا مجموعہ ۲ ہے۔

یہ خیال رہے کہ رقموں کی تعداد جیسے جیسے بڑھتی جاتی ہے ویسے ان رقموں

کا مجموعہ ۲ کے قریب آتا جاتا ہے لیکن کبھی بھی ٹھیک ۲ کے مساوی نہیں

ہوتا۔ اسی مفہوم کو اس طرح بھی ادا کیا جاتا ہے کہ رقموں کی تعداد کافی

زیادہ لینے سے ان کے مجموعے کو ۲ کے جتنا قریب چاہیں لایا جاسکتا ہے۔

اوپر کی مثال میں ایک ایسا لاتنا ہی سلسلہ لیا گیا جس کی ہر رقم اپنی

رقم ماقبل سے کم ہے۔ یہ خیال نہ کیا جائے کہ ہر ایسا لاتنا ہی سلسلہ متدرج

ہوتا ہے۔ مثلاً سلسلہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$

میں ہر رقم اپنی رقم ماقبل سے چھوٹی ہے۔ لیکن یہ سلسلہ متدرج نہیں ہے۔

کیوں کہ $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) < 2 \times \frac{1}{2} = 1$ ، $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) < 2 \times (\frac{1}{2}) = 1$

اس لیے دیے ہوئے سلسلے کا مجموعہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

اور چون کہ بائیں جانب میں جتنی دفعہ چاہیں $\frac{1}{2}$ لکھ سکتے ہیں اس لیے

رقموں کی کافی تعداد لینے سے دیے ہوئے سلسلے کا مجموعہ کسی دیے ہوئے

بڑے سے بڑے عدد سے بھی بڑا بنایا جاسکتا ہے۔ پس ثابت ہوا کہ دیا

ہوا سلسلہ مستدرج نہیں ہے یعنی رقموں کی کافی تعداد لینے سے ان کے

مجموعے کو کسی محدود عدد کے بے حد قریب نہیں لایا جاسکتا یعنی سلسلے

کی نرقموں کا مجموعہ کسی محدود انتہا کی طرف مائل نہیں ہوتا جب کہ ن بے حد بڑا ہوتا جاتا ہے۔

جیسا کہ ہم اوپر بتا چکے ہیں، اسکندریہ کے تمدن کے پہلے دور میں ہنیت اور میکانیات کے سلسلے میں فن پیمائش نے بیش بہا ترقی کی۔ انھیں ایسے بڑے بڑے عددوں پر حساب لگانے کی ضرورت پیش آئی جس کے لیے ان کی عددوں کی مروجہ ترقیم قطعی ناموزوں تھی۔ اس لیے اسکندریہ کے تمدن کے دوسرے دور میں اس بات کی بہت کوشش کی گئی کہ بڑے بڑے اعداد پر جلد جلد حساب لگانے کا ایک سادہ اور موزوں طریقہ ایجاد کیا جائے۔ اس سلسلے میں علم ہندسہ اور حساب میں ربط پیدا کیا گیا اور ہندسی شکلوں کی مدد سے نئے نئے گزکالے گئے۔ دایونیتس (۴۷۰ء) نے جبر و مقابلمہ کی بنیاد ڈالی جس کو تقریباً ڈیڑھ سو سال بعد ہندی ریاضی دانوں نے فروغ دیا۔ اس نے عددوں کی ضرب میں علامتوں کا قانون بیان کیا۔ یعنی دو مثبت یا دو منفی مقداروں کا حاصل ضرب مثبت ہوتا ہے اور دو مختلف علامت عددوں کا حاصل ضرب منفی ہوتا ہے۔ مثلاً $(-۳) \times (-۲) = ۶$ اور $(-۳) \times ۲ = -۶$

اسکندریہ کے ریاضی دان تھیان (THYAN) نے گنتارے کی مدد کے بغیر عددوں کو ضرب دیا۔ نیز اس نے زاویوں کی مثلثی نسبتوں کی تیاری کے ضمن میں عددوں کے جذر معلوم کرنے کا حسب ذیل طریقہ بھی ایجاد کیا۔

فرض کرو کہ ہمیں $\sqrt{۲}$ معلوم کرنا ہے $\sqrt{۲} = \frac{۲}{۱}$

$\sqrt{۲} = \frac{۲}{۱} = \frac{۲}{۱} = \frac{۲}{۱} = \frac{۲}{۱}$ اور چونکہ $۱۳ = ۱۹۶$ اور $۱۵ = ۲۲۵$

∴ $\sqrt{200}$ ، ۱۴ سے بڑا اور ۱۵ سے چھوٹا ہے

∴ $\sqrt{21}$ بڑا ہے $\frac{12}{11}$ سے اور چھوٹا ہے $\frac{15}{11}$ سے

اب فرض کرو کہ $\sqrt{21} = \frac{12}{11} + (فرلا)$ ، یعنی $\sqrt{21} = ۱۴ + (فرلا)$

جہاں (فرلا) ایک چھوٹی دریاقت طلب مقدار ہے

$$(۱۴ + فرلا)^2 = 21 \quad \text{یعنی} \quad 2(۱۴ + فرلا) + (فرلا)^2 = 21$$

$$۲۸ + ۲(فرلا) + (فرلا)^2 = 21$$

اگر (فرلا) جو بہت چھوٹی ہے نظر انداز کر دی جائے تو حاصل ہوتا ہے

$$۲۸ = 21 \quad \text{تقریباً} \quad ۰.۱۴$$

$$۱۴ + ۰.۱۴ = ۱۴.۱۴ \quad \text{∴} \quad \sqrt{21} \approx ۱۴.۱۴$$

$$۱۴.۱۴ \approx \sqrt{21}$$

$\sqrt{21}$ کی تقریبی قیمت ۱۴.۱۴ نے کراسی طریقے کو دوبارہ استعمال کرنے سے

$\sqrt{21}$ کی قیمت کا اور بہتر تقریب معلوم کیا جاسکتا ہے۔

اس طریقے سے کسی عدد کا جو کامل مربع نہ ہو کسی مطلوبہ درجہ صحت

تک جذر معلوم کیا جاسکتا ہے۔

یہ طریقہ نہایت طویلانی ہے۔ کسی عدد کا جذر معلوم کرنے کے لیے تھیوں

کا یہ طریقہ تفرقی احصا کے ایک اہم تصور کی طرف ہماری رہنمائی کرتا ہے۔

..... ارشمیدس نے π کی قیمت معلوم کرنے کے لیے جو طریقہ

اختیار کیا وہ دراصل تکمیلی احصا کا ایک بنیادی تصور ہے۔ طویل بلد اور

عرض بلد کے حوالے سے ہمارے کوس نے جو ارضی نقشے بنائے تھے اور

اپولونیس نے جن منحنی شکلوں پر تحقیقات کی تھی ان میں ہندسہ تخیلی کا

اساسی تصور موجود ہے۔ دایو فنتیں نے جبر و مقابلہ کی بنیاد ڈالی سوتھوں

اور سترھویں صدی عیسوی کی تمام اہم تحقیقات دراصل اسکندریہ کے انھی ریاضی دانوں کی مرہونِ منت ہیں۔ یہ کہنا درست نہیں کہ سلطنتِ روم کے زوال کی وجہ سے اسکندریہ کا علمی دور ختم ہو گیا بلکہ زیادہ صحیح تو جیہہ یہ ہے کہ اپنے ماحول کے لحاظ سے اسکندریہ کا تمدن اپنی انتہا پر پہنچ چکا تھا اور مزید ترقی ناممکن تھی تا وقتے کہ عددوں کی ترقیم اور حسابی طریقوں میں مزید ترقی نہ کی جائے۔ ہندی تمدن کی نمایاں خصوصیت یہ ہے کہ انھوں نے صفر (عدم محض) کو ایجاد کر کے مزید ترقی کی شاہ راہیں کھول دیں۔

یاد رکھنے کی باتیں

- (۱) جب $\cdot = \cdot$ س $\cdot = \cdot$ جم $\cdot = \cdot$ ا
- (۲) جب $\cdot = \cdot$ جم $\cdot = \cdot$ جم $\cdot = \cdot$ جب $\cdot = \cdot$ (۹۰-۹۰)
- (۳) $\cdot = \cdot$ کے معنی اس لیے
- (۴) $\cdot = \cdot$ کے معنی چوں کہ

ساتواں باب

جبر و مقابلہ کی ابتدا اور صفر کی ایجاد

ایسے زمانے میں جب کہ باوجود ہر قسم کی ترقی کے حساب دانوں نے سوائے ایک بھونڈے گنتی کے طریقے اور گنتارے کی ضرب کے اور کچھ نہ سیکھا تھا ہندستان میں پہلی صدی عیسوی میں صفر کی ایجاد اور عدد کی مقامی قیمت کا تعین یقیناً ایک عظیم الشان واقعہ ہے (۱۰۰ ق۔ م) میں چین میں گنتی کے لیے تصویری طریقہ رائج تھا لیکن وہ بھی حسابی عمل کے لیے سوزوں نہیں تھا۔ صفر کی ایجاد سے پیش تر ۲ کو علامت = کی بجائے ۳ سے اور ۳ کو = کی بجائے ۳ سے تعبیر کرتے تھے۔ عرب ریاضی دان ان عددوں کو ۱۱ اور ۱۱ سے تعبیر کرتے تھے جو بعد میں ۲ اور ۳ بن گئے۔ ہندستان میں یہ طرزِ تحریر ۱۰۰ ق۔ م اور ۱۵۰ ق۔ م کے درمیان رائج ہوا۔ انھوں نے صفر کے لیے سنکرت کالفظ سُنیا (خالی) اختیار کیا جسے عربوں نے صفر اور اہل یورپ نے (GYPHER) اور پھر (ZERO) میں تبدیل کر لیا۔ عدم محض (لاشتر) کے لیے صفر کو عربوں نے ہی بعد میں استعمال کیا۔ لاپلاس کے بیان کے مطابق مقامی قیمت کا یہ طریقہ نہایت اہم تھا اور اسے علم حساب میں ممتاز ترین درجہ حاصل ہے۔ جبر و مقابلہ کی ابتدا بھی اسی زمانے میں ہندستان میں ہوئی۔ ہندستان کی پرانی کتابوں

(لیلاوتی وغیرہ) سے معلوم ہوتا ہے کہ ہندستانی ریاضی داں اس وقت حاصل لگان، سود اور قرض وغیرہ کے مسائل حل کرنے میں مصروف تھے۔ صفر کی ایجاد نے انسانی ذہن کو گنتا کی قید سے آزاد کر دیا۔ اور بہت ہی سادہ طریقوں سے ایسے سوال حل کیے گئے جنہیں پہلے والیونٹنس (DIOPHANTUS) اور تھیون (THEON) نے نہایت ہی پیچیدہ طریقوں سے حل کیا تھا۔ جبر و مقابله میں اہل ہند اور عربوں کے لیے سب سے پہلا محرک گنتی اور شمار کے آسان قاعدوں کی تلاش تھی اور اس میں الخوارزمی نے اس قدر ترقی کی کہ جب تیرھویں صدی میں جبر و مقابله اور علم حساب اسپین سے یورپ آئے تو اسی کے نام پر ان علوم کا نام الخوارزم رکھا گیا جو بعد میں الگارتھم اور پھر لوکارتم ہو گیا۔ دوسرا محرک گرداوری اور پیمائش کی روز افزوں ضرورتیں تھیں اور تیسرا محرک سلسلوں کا مطالعہ تھا۔

ہندستان کی سب سے پہلی ریاضی کی معلومہ کتاب لیلاوتی مصنف آریہ بھٹہ (۶۲۶ء) ہے۔ اس میں حساب کے چار بنیادی قاعدے درج ہیں۔ نیز والیونٹنس کی علامتوں کے قاعدے کو استعمال کیا گیا ہے۔ اس کے علاوہ جیب (SINE) کی جدولیں بھی $\frac{3}{4}$ کے وقفے سے دی گئی ہیں۔ اور π کی قیمت ۳.۱۴۱۶ بتلائی گئی ہے۔ مختصر یہ کہ یہ ہندی ریاضی داں ریاضی کو اس مقام سے شروع کرتے ہیں جہاں اسکندریہ کے ریاضی دانوں نے ختم کیا تھا۔ چھٹی صدی عیسوی میں ہندستان کا دوسرا مشہور ریاضی داں برہماگپت (۵۹۸ء - ۶۶۰ء) حسابی سلسلوں اور مساواتوں کے حل سے بحث کرتا ہے۔ ان دونوں ریاضی دانوں نے یہ قاعدہ بیان کیا ہے کہ اگر

۱ کوئی مقدار ہو تو $1 \times 1 = 1$ ، $1 + 1 = 2$ ، $1 - 1 = 0$ ، نیز یہ ریاضی داں
 مسلسل اور غیر مسلسل کسروں کا استعمال بڑی کثرت سے کرتے ہیں۔ بارہویں
 صدی عیسوی میں ہندستان کے ایک اور ریاضی داں بھاسکر اچاریہ نے
 کسر میں شمار کنندہ اور نسب نما کو افر اور نیچے (بغیر درمیانی لکیر کے)
 لکھنے کا طریقہ رائج کیا۔ مثلاً $\frac{1}{2}$ کی بجائے وہ صرف $\frac{1}{2}$ لکھتا تھا۔
 آٹھویں صدی کے آخر میں بغداد علم و فن کا مرکز بن گیا اور خلفائے
 عباسیہ نے مصری، یونانی، عیسائی اور یہودی علما کو گراں قدر تنخواہ پر
 مامور کر کے ان زبانوں سے عربی میں مختلف علوم کی مشہور کتابوں کے ترجمے
 کروائے۔ تھوڑے ہی عرصے میں بطلی موس، ارشمیدس، اقلیدس اور افلاطون
 اور دیگر علما کی تصنیفوں کے ترجمے کیے گئے اور وہاں سے مسلمانوں کے
 ذریعے اسپین پہنچے جہاں نویں اور دسویں صدی میں علم کی شمع روشن
 ہوئی۔ عربوں میں تقویم سازی، ہنیت داں علما کے سپرد تھی۔ الخوارزمی،
 عمر خیام، الکرمی، جابر، اور البطامی کی تصنیفوں کے ترجموں ہی پر بعد کی
 صدیوں میں مغربی علوم و فنون کی بنیاد رکھی گئی۔ ہندستانی ریاضی اور
 عربی علوم و فنون یورپ میں دو طرف سے پہنچے۔ پہلے تو اسپین کی جامعات
 کے توسط سے اور دوسرے بحیرہ روم میں صقلیہ (سسیلی) کی تجارت کے ذریعے۔
 چنانچہ سسیلی کا ایک سیک، جس پر ۱۱۳۲ء درج ہے، یورپ میں عربی ہندسوں
 کے استعمال کی پہلی مثال ہے۔ تقویم کے محافظ ہونے کی حیثیت سے عیدائی
 راہبوں کو ریاضی سے زیادہ دل چسپی تھی۔ چنانچہ ایک عیسائی ادی لارڈ
 (ADELARD) نے جو شہر باتھ (BATH) کا باشندہ تھا۔ اپنے آپ کو
 مسلمان ظاہر کر کے (تقریباً ۱۱۲۰ء میں) جامعہ قرطیبہ میں تعلیم پائی اور

الگورتھم - حساب کے نئے طریقوں (جنہیں یورپ میں ایک عرصے تک الگورتھم سے موسوم کیا گیا) کی تشریح سے پہلے یہ بیان کر دینا مفید ہو گا کہ عددوں کی ترقیم کا عربی طریقہ اس قدر آسان تھا کہ اس نے انسان کے ذہن کو گنتارے کی قید سے آزاد کر دیا۔ عدد دو ہزار تین سو بتیس کو رومی ترقیم میں علامت (M M C C C X X X I I) سے تعبیر کیا جاتا تھا لیکن عربی ترقیم میں اس کو (۲۳۳۲) سے ظاہر کیا جاتا ہے جو رومی طریقہ ترقیم سے بہت آسان ہے۔ گویا اس عدد کو ہم نئے گنتارے کے چوتھے کالم (عمودی لڑی) کے دو دانوں، تیسرے کالم کے تین دانوں اور پہلے کالم کے دو دانوں سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ نیز عام طور پر عدد ۱۰ کو گنتارے کے (۱۰) دین کالم کے ایک دانے سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ اس طریقے سے ۱۰ کا مفہوم واضح ہوتا ہے جو اقلیدس کے ہندسی طریقوں میں موجود نہیں تھا۔ عددوں کی ہندسی تعبیر کے مطابق ۱۰ کو دس اکائی طویل والے خط سے، ۱۰ کو اس مربع کے رقبے سے جس کے ہر ضلع کا طویل ۱۰ اکائی ہے اور ۱۰ کو اس مکعب کے حجم سے جس کے ہر ضلع کا طویل ۱۰ اکائی ہے تعبیر کیا جاسکتا ہے لیکن ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰ وغیرہ کی کوئی ہندسی تعبیر پیش نہیں کی جاسکتی۔ اکائی سے چھوٹے عددوں کے لیے بھی مندرجہ بالا ترقیم کی توسیع کی جاسکتی ہے۔ ۱۰ سے، ۱۰ کو ۱۰ سے ۱۰ کو ۱۰ سے اور ۱۰ کو ۱۰ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ عددوں کی اس ترقیم میں اساس دس اختیار کیا گیا ہے یعنی گنتارے کے ہر کالم کا ایک دانہ کالم مابقی کے ایک دانے سے دس گنا قیمت رکھتا ہے۔ اساس دس کے انتخاب کی وجہ یہ معلوم ہوتی ہے کہ سب سے پہلے انسان نے اپنی

دس انگلیوں کی مدد سے گنتی سیکھی۔ اگر ہم دس کی بجائے عدد ۵ کو اساس کے طور پر اختیار کریں تو عددوں کی ایک نئی ترقیم حاصل ہوگی۔ اس ترقیم میں علامت ۲۳ سے ۳ اکائی اور چار پانچے تعبیر ہوں گے یعنی عدد تینس تعبیر ہوگا۔ لیکن ہمارے لیے دس کی اساس عددوں کی ترقیم میں زیادہ کار آمد ہے۔

انگریزی میں علم حساب پر سب سے پہلی کتاب ”گنتی کا فن“ (۱۳۰۰ء) تقریباً لکھی گئی۔ جس میں جمع، ضرب، تفریق وغیرہ کے قاعدے بیان کیے گئے ہیں۔ عددوں کی عربی ترقیم کے مطابق دو عددوں کا حاصل ضرب معلوم کرنے کے لیے ضروری ہے کہ ہمیں 10×10 تک پہاڑے اچھی طرح یاد ہوں۔ عربوں نے سب سے پہلے یہ پہاڑے تیار کیے۔ چودھویں صدی عیسوی میں حساب کا فن جرمنی میں اس قدر اہم سمجھا جاتا تھا کہ وہاں حساب کے فن دانوں کی ایک انجمن قائم کی گئی۔ عددوں کی تقسیم کا عربی طریقہ یورپ میں سب سے پہلے کیلنڈری (CALENDRI) نے ۱۲۵۱ء میں اختیار کیا۔ حساب کے ان طریقوں کے رواج کے ساتھ ساتھ یورپ نے گنتارے کا استعمال بہ تدریج ترک کیا۔ اور مشرق سے ہی فن طباعت اور کاغذ سازی سیکھ کر اشاعتِ علم میں سہولتیں بہم پہنچائیں۔

عددوں کی اس نئی عشری ترقیم نے حساب کے پرانے پیچیدہ طریقے دُور کر دیے۔ ہندستان میں کسروں پر جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کے عمل کرنے کے لیے مکمل قاعدے مرتب اور مروج ہوئے۔ ۱۲۵۱ء میں ہاویر نے کسروں کی تقسیم کا قاعدہ بالکل وہی بتلایا ہے جو آج کل رائج ہے۔ عددوں کی ترقیم اور اساسی اعمال کی اس سہولت کی

بنا پر ہندستانیوں نے علم حساب کو بہت ترقی دی۔ ایسے حسابی عمل جنہیں قدیم یونانی ریاضی داں شکل اور طولانی طریقوں سے کر سکتے تھے۔ ان نئے قاعدوں کی مدد سے نہایت آسانی سے کیے جانے لگے۔ اس حسابی ترقی کے ساتھ ساتھ جبر و مقابلہ کو بھی ترقی ہوئی۔ ہندستانیوں اور عربوں نے علم مثلث کی جدولوں میں (جو اسکندریہ میں مرتب کی گئی تھیں) کئی مفید تبدیلیاں کیں۔ ان جدولوں کی تیاری کے سلسلے میں عددوں کا جذر معلوم کرنے کے کارآمد طریقوں کی ضرورت پیش آئی۔ کسی عدد کا جذر معلوم کرنے کے لیے عربوں نے جو طریقہ معلوم کیا تھا وہ ذیل کی مثال سے واضح ہوتا ہے۔

۲۱ = $\frac{200}{10}$ = $\frac{2000}{100}$ ۔ اب ہمیں معلوم ہے کہ $2000 = 44^2$ اور $225 = 15^2$ اس لیے 200 بڑا ہے 12 سے اور چھوٹا ہے 15 سے اس لیے 21 کی قیمت $\frac{12}{10}$ سے بڑی ہے اور $\frac{15}{10}$ سے چھوٹی ہے۔ اس طرح بہتر تقریب کے لیے ہم لکھ سکتے ہیں۔ $21 = \frac{2000}{100}$ اور حسبِ بلاطریقے سے معلوم ہوتا ہے کہ 21 بڑا ہے $\frac{12}{10}$ سے اور چھوٹا ہے $\frac{122}{100}$ سے۔ اس طریقے کو جاری رکھنے سے 21 کی قیمت کسی مطلوبہ درجہ صحت تک معلوم کی جاسکتی ہے۔ یورپ میں عددوں کے جذروں کی جدولیں سب سے پہلے اڈم ریس نے ۱۵۲۲ء میں شائع کیں۔ الکاشی سمرقندی نے تقریباً ۱۵۲۷ء میں π کے لیے قیمت 3.14159 حاصل کی۔ یورپ میں علامت اعشاریہ کے لیے نقطے کا استعمال ۱۴۹۲ء میں پیٹلازی (FELAZZI) نے رائج کیا۔ کسروں کی اس نئی ترقیم سے جمع، تفریق، ضرب، اور تقسیم میں بہت سہولت پیدا ہو گئی کیوں کہ اعشاریہ کی علامت

کے مقام کو ملحوظ رکھنے سے یہ عمل وہی ہو جاتے ہیں جو صحیح عددوں کے لیے استعمال کیے جاتے ہیں۔

اسکندر یہ کے ریاضی دانوں کو علم ہنیت اور مکانیات مساواتیں کے سوالوں کے حل میں حساب کے فن پر توجہ کی خاص ضرورت ہوئی۔ ابتدا میں ہندی ریاضی دانوں نے تجارتی علم حساب کو فروغ دیا۔ ہمارے مدارس میں جو علم الحساب پڑھایا جاتا ہے وہ کچھ تو ان قواعد کی مشق ہے جو ہندوستانیوں اور عربوں نے دریافت کیے تھے اور کچھ مجرد عددوں اور ان کی جبری خاصیتوں سے تعلق ہے۔ مجرد عددوں اور ہندسوں اور ریاضی کے عمل کی مختصر نویسی کے استعمال کے سادہ اور سیدھے قاعدے آہستہ آہستہ ترقی کرتے ہوئے موجودہ شکل میں آئے ہیں۔ ڈایوفنٹیس غالباً پہلا شخص تھا جس نے ان کے استعمال کی کوشش کی۔ صدیوں تک ریاضی داں ہر سوال کو ایک نئے قاعدے کی مدد سے حل کرتے رہے اور انھیں مختلف عام قاعدوں کے تحت لانے کی کوشش نہیں کی گئی۔ عربوں نے سب سے پہلے استقرائی منطق اور استقرائے حسابیہ کا مفید اور مدلل طریقہ، ایجاد و اختیار کیا۔ اب "جبر و مقابلہ" کی اصطلاح عام حسابی قاعدوں کے اس مجموعے کے لیے استعمال کی جاتی ہے جن کے ذریعے سوالات حل کیے جائیں خواہ وہ تفصیلی یا تشریحی جبر و مقابلہ ہو جس میں مختلف مختصر اشارے استعمال کیے گئے ہوں یا رمزی جبر و مقابلہ ہو۔ عربوں نے سب سے پہلے مساواتوں کا استعمال کیا۔ مغرب میں ڈیکارٹ نے سب سے پہلے دوسرے درجے کی مساوات کو اس شکل میں لکھا۔ $۳لا - ۵لا + ۶ =$ صحیح عددوں کے لیے یونانی اپنے سائے

حروف تہجی استعمال کر چکے تھے اس لیے وہ تشریحی جبر و مقابلہ سے بڑھ کر
 رمزیت تک نہیں پہنچ سکے۔ عددوں کی ہندستانی ترتیم نے اس وقت کو
 تو رفع کر دیا لیکن علامتوں کی یکسانیت عرصے تک حاصل نہ ہو سکی۔ یورپ
 میں عربوں کی پہلی مستعملہ علامت $+$ کی ہر اور بعد ازاں جمع اور تفریق
 کے لیے $-$ اور \times استعمال کیے گئے۔ ۱۶۸۹ء میں پہلی یورپی مطبوعہ کتاب
 ”تجارتی حساب“ مصنف ایڈمن (WIE DMAN) میں یہ علامتیں استعمال
 کی گئیں اور سو سال بعد ریکارڈ (RECORD) نے ایک تجارتی حساب
 کی کتاب شائع کی جس میں $=$ بھی استعمال کیے گئے۔ بعد ازاں ان
 علامتوں کا عام رواج ہو گیا۔

ریاضی کی ترقی کی اہم ترین منزلوں میں سے ایک منزل تشریحی
 جبر و مقابلہ سے رمزیت جبر و مقابلہ کی طرف اقدام ہے۔ اگر ایک مرتبہ
 کوئی سوال کسی مساوات کی شکل میں اور معلومہ رموز اور علامتوں کی
 زقوئم میں پیش کیا جائے تو مقررہ قاعدوں کے تحت آسانی سے حل کیا
 جاسکتا ہے۔ مگر اصل مرحلہ اسے عام زبان سے نکال کر ریاضی کی رمزیت
 زبان کا جامہ پہنانا اور تمام شرطوں کے ساتھ معلومہ اصولوں کے تحت
 مساوات کی صورت میں بیان کرنا ہے۔ اس کے لیے حسب ذیل شرطیں
 ضروری ہیں :-

- (۱) کونسا جزو کس کے ساتھ جمع، تفریق، ضرب، تقسیم کیا جائے۔
- (۲) جملوں کو مختصر کرنے کے بعد حاصل کو جبری شکل میں پیش کرنا۔
- (۳) آخری بیان ذیل کی صورت میں پیش ہونا چاہیے: مثلاً جو کمیت
 م ہم معلوم کرنا چاہتے ہیں وہ = فلاں عدد (۴) عدد جو ایک ہی

نوعیت کی مقداروں کے لیے استعمال ہوں وہ سب ایک ہی اکائیوں میں ہونے چاہئیں۔ مثلاً رقمی سوالوں میں سب روپوں یا پونڈوں میں، فاصلے کے سوالوں میں سب میلوں یا میٹروں میں اور (۵) حاصل شدہ جواب کی بنائی ہوئی جبری مساوات سے تصدیق۔

ان اصولوں کی وضاحت کے لیے ہم ذیل میں چند مثالیں پیش کریں گے۔

(۱) ایک بینک میں کسی شخص کے چالو کھاتے کی رقم اس کے معین کھاتے

(FIXED DEPOSIT) کی رقم کی چوتھائی ہے۔ اگر کل رقم ۵۵۰

روپی ہو تو ہر کھاتے میں کتنی کتنی رقم ہے۔

فرض کرو کہ چالو کھاتے میں روپی ہیں اور معین کھاتے میں م

روپی ہیں پہلی شرط سے حاصل ہوتا ہے کہ م = ۴ج

چوں کہ کل رقم ۵۵۰ روپی ہے اس لیے ج + م = ۵۵۰

پہلی شرط کی رو سے یہ رشتہ ہو جاتا ہے کہ ج + ۴ج = ۵۵۰ یعنی

۵ج = ۵۵۰ ∴ ج = ۱۱۰

پس حاصل ہوا کہ اس شخص کے چالو کھاتے میں ۱۱۰ روپی ہیں اور

معین کھاتے میں ۴۴۰ روپی ہیں۔

ظاہر ہے کہ یہ جواب سوال کی شرطوں کو پورا کرتا ہے۔

(۲) ایک ریل گاڑی لندن سے ایڈنبرا کو ٹھیک ایک بجے ۵ میل

فی گھنٹے کی رفتار سے روانہ ہوتی ہے، دوسری ریل گاڑی ایڈنبرا

سے لندن کی طرف ٹھیک ۴ بجے ۲۵ میل فی گھنٹے کی رفتار سے

روانہ ہوتی ہے اگر لندن اور ایڈنبرا کا درمیانی فاصلہ (۱۰۰ میل

ہو تو معلوم کرو کہ یہ ریل گاڑیاں ایک دوسرے سے کب اور

کہاں ملیں گی۔

لندن سے روانہ ہونے والی ریل گاڑی ایک بجے نکلتی ہے اور ایڈنبرا سے دوسری گاڑی چار بجے نکلتی ہے یعنی پہلی گاڑی کے ٹھیک ۳ گھنٹے بعد نکلتی ہے۔ ان تین گھنٹوں میں پہلی ریل گاڑی جس کی رفتار ۵۰ میل فی گھنٹہ ہے۔ ۵۰×۳ یعنی ۱۵۰ میل طر کرتی ہے۔ اس لیے اب ان دو ریل گاڑیوں میں صرف (۲۰۰ - ۱۵۰) یعنی ۲۵۰ میل کا فاصلہ ہے۔ فرض کرو کہ یہ دو ریل گاڑیاں چار بجے کے لاگھنٹے بعد ایک دوسرے سے ملتی ہیں۔ ان لاگھنٹوں میں پہلی ریل گاڑی ۵۰ لا میل طر کرتی ہے اور دوسری ریل گاڑی ۲۵ لا میل طر کرتی ہے اور چونکہ دونوں ریل گاڑیاں مل جاتی ہیں، اس لیے

$$۲۵۰ = ۵۰ + ۲۵۰$$

$$۲۵۰ = ۷۵$$

$$\therefore \frac{۱۰}{۳} = \frac{۲۵۰}{۷۵} = ۳$$

پس معلوم ہوا کہ چار بجے کے ۳ گھنٹے بعد یعنی ۳ گھنٹے ۲۰ منٹ یعنی ۷ بج کر ۲۰ منٹ پر یہ دونوں گاڑیاں ایک دوسرے سے ملتی ہیں۔ $\frac{۱۰}{۳}$ گھنٹوں میں دوسری ریل گاڑی ۲۵ $\times \frac{۱۰}{۳}$ میل یعنی $\frac{۸۳}{۳}$ میل طر کرتی ہے۔ پس معلوم ہوا کہ یہ دونوں ریل گاڑیاں ایک دوسرے سے ایڈنبرا سے $\frac{۸۳}{۳}$ میل کے فاصلے پر ۷ بج کر ۲۰ منٹ پر ملتی ہیں۔

(۳) بتاؤ کہ تین رپڑی سیر والے ۵ سیرگھی میں $\frac{۱}{۲}$ رپڑی سیر والا کتنا گھی ملایا جائے تاکہ اس آمیزہ کی قیمت $\frac{۱}{۲}$ رپڑی سیر ہو۔

فرض کرو کہ گھی کی مطلوبہ مقدار لا سیر ہو۔
 تب لا سیر گھی کی قیمت بہ حساب $\frac{1}{2}$ روپیہ فی سیر = $\frac{9}{4}$ لا روپیہ
 $\frac{3}{4}$ روپیہ سیر والے ۵ سیر گھی کی قیمت = ۱۵ روپیہ
 گھی کے آمیزہ کی مقدار = (لا + ۵) سیر اور اس آمیزہ کی قیمت
 = $(\frac{9}{4} لا + ۱۵)$ روپیہ آمیزہ کی قیمت $\frac{1}{4}$ روپیہ فی سیر ہو۔
 اس لیے آمیزہ کی قیمت = $\frac{5}{4} (لا + ۱۵)$ روپیہ
 اس لیے $\frac{9}{4} لا + ۱۵ = \frac{5}{4} لا + \frac{75}{4}$
 اس لیے $۱۵ - \frac{75}{4} = \frac{5}{4} لا - \frac{9}{4} لا$
 یعنی $\frac{5}{4} = \frac{1}{4} لا$
 $\therefore لا = \frac{5}{1} \times \frac{4}{4} = ۱۰$

پس معلوم ہوا کہ $\frac{3}{4}$ روپیہ سیر والے ۵ سیر گھی میں $\frac{1}{2}$ روپیہ سیر والا ۱۰ سیر
 گھی ملانے سے ایسا آمیزہ حاصل ہوگا جس کی قیمت $\frac{1}{4}$ روپیہ فی سیر ہو۔
 (۲) پہلے باب کے اس سوال پر غور کرو جو اکیلیز اور کچھوے کی دوڑ
 کے متعلق دیا گیا تھا۔

اکیلیز کی رفتار کچھوے کی رفتار کی دس گنی ہے اور جب دوڑ
 شروع ہوتی ہے تو کچھوے اکیلیز سے ۱۰۰ گز آگے ہے۔ ہمیں وہ مقام معلوم
 کرنا ہے جہاں اکیلیز کچھوے کو پکڑتا ہے۔

فرض کرو کہ کچھوے کی رفتار (س) گز فی منٹ ہے تب اکیلیز
 کی رفتار (۱۰س) گز فی منٹ ہوگی۔ فرض کرو کہ دوڑ شروع ہونے
 کے (ت) منٹ بعد اکیلیز کچھوے کو پکڑتا ہے۔ (۱۰س + ۱۰۰) منٹ
 میں اکیلیز فاصلہ (۱۰س × ت) گز طے کرے گا۔ اور کچھوے فاصلہ

(۳) گز طر کرے گا چوں کہ دوڑ کی ابتدا میں کچھوا اکیلیز سے
(۱۰۰ گز آگے تھا اس لیے اکیلیز کا طر شدہ فاصلہ = (۱۰۰ + س) گز

$$۱۰۰ = ۱۰۰ + س، \text{ یعنی } ۹ = س = ۱۰۰$$

$$\therefore س = ۱۰۰ = \frac{۱۰۰}{۹} = ۱۱ \frac{۱}{۹}$$

پس اکیلیز کچھوے کو پکڑتا ہے جب کہ کچھوے کا طر شدہ فاصلہ $(۱۱ \frac{۱}{۹})$ گز ہے اور اکیلیز کا طر شدہ فاصلہ $(۱۰۰ + ۱۱ \frac{۱}{۹})$ یعنی $(۱۱۱ \frac{۱}{۹})$ گز ہے۔
نوٹ۔ جب تک س کی قیمت معلوم نہ ہو ت کی قیمت معلوم نہیں ہو سکتی۔ لیکن اس سوال میں ت کے معلوم کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔
(۵) دو پونڈ مکھن اور تین پونڈ شکر کی قیمت ۲ روپیہ ۱۵ آنے ہے۔

تین پونڈ مکھن اور دو پونڈ شکر کی قیمت ۳ روپیہ ۱۰ آنے ہے۔ ایک پونڈ مکھن کی قیمت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ایک پونڈ مکھن کی قیمت = لا آنے

اور ایک پونڈ شکر کی قیمت = ما آنے

چوں کہ قیمت روپوں اور آنوں میں دی گئی ہے اس لیے قیمت کو ایک

ہی اکائی مثلاً آنوں میں لانا ہوگا۔ چنانچہ ۲ روپیہ ۱۵ آنے =

$$۳۷ = ۳۰ + ۷، \text{ یعنی } ۳۷ = ۳۰ + ۷$$

سوال کے بموجب $۳۷ = ۳ + ۳۴$ (۱)

$$۵۸ = ۳ + ۵۵ \text{ (۲)}$$

مساوات (۱) کو ۳ سے اور مساوات (۲) کو ۲ سے ضرب دینے سے

$$۱۳۱ = ۹ + ۱۰۲$$

$$۱۱۶ = ۶ + ۱۱۰$$

تفریق سے $۵ = ما$ ، $۲۵ = ما$ ، $\therefore ما = ۵$

پس معلوم ہوا کہ ایک پونڈ شکر کی قیمت ۵ آنے ہے۔
ما کی اس قیمت کو مساوات (۱) میں درج کرنے سے

$$۲۲ + لا (۵) = ۲۷ ، ۲۷ = لا ۲ - ۱۵ = ۳۲$$

$$\therefore لا = ۱۶$$

یعنی ایک پونڈ مکھن کی قیمت ۱۶ آنے یعنی ایک روپیہ ہے۔

(۶) میری اور میرے باپ کی موجودہ عمروں کا مجموعہ (۱۰۰) سال ہے۔

جب میری عمر میرے باپ کی موجودہ عمر کے مساوی ہوگی تو میری

عمر میرے بیٹے کی موجودہ عمر سے ۵ گنا ہو جائے گی، اور اس

وقت میرے بیٹے کی عمر میری موجودہ عمر سے (۸) سال زیادہ

ہوگی۔ ہماری موجودہ عمریں علاحدہ علاحدہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ میری موجودہ عمر لا سال ہے

چوں کہ میری اور میرے باپ کی موجودہ عمروں کا مجموعہ (۱۰۰) سال

ہے اس لیے میرے باپ کی موجودہ عمر = (۱۰۰ - لا) سال

\therefore میرے باپ کی اور میری عمروں کا فرق = (۱۰۰ - لا) - (لا) سال

= (۱۰۰ - لا) سال یعنی (۱۰۰ - لا) سال بعد میری عمر وہی ہوگی

جو میرے باپ کی موجودہ عمر ہے یعنی (۱۰۰ - لا) سال ہوگی۔

فرض کرو کہ میرے بیٹے کی موجودہ عمر ما سال ہے

(۱۰۰ - لا) سال بعد میرے بیٹے کی عمر (ما + ۱۰۰ - لا) سال

ہوگی اور اس وقت میرے بیٹے کی عمر میری موجودہ عمر سے ۸ سال

زیادہ ہوگی۔ یعنی ما + ۱۰۰ - لا = لا + ۸ (۱)

نیز اس وقت میری عمر میرے بیٹے کی موجودہ عمر سے ۵ گنا ہوگی۔ یعنی

$$(۲) \quad ۱۰۰ - ۵ = ۵۵$$

مساواتوں (۱) اور (۲) کو ذیل کی شکلوں میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$۵۵ + ۱۰۰ = ۱۵۵, \quad ۸ = ۱۵۵ - ۱۰۰$$

$$(۳) \quad ۹۲ = ۵۵ - ۸$$

$$(۴) \quad ۱۰۰ = ۵۵ + ۴۵$$

مساوات (۴) کو ۳ سے ضرب دے کر مساوات (۳) میں سے تفریق کرنے سے

$$\left[\begin{array}{l} ۹۲ = ۵۵ - ۸ \\ ۳۰۰ = ۱۵۵ + ۱۴۵ \end{array} \right. \quad \text{یعنی } ۳۰۰ - ۹۲ = ۱۵۵ - ۱۴۵$$

$$\left[\begin{array}{l} ۳۰۰ = ۱۵۵ + ۱۴۵ \\ ۲۰۸ = ۱۵۵ + ۵۳ \end{array} \right. \quad \text{یعنی } ۲۰۸ - ۱۵۵ = ۵۳$$

$$\text{یعنی } ۲۰۸ = ۱۵۵ + ۵۳, \quad ۱۳ = \frac{۲۰۸}{۱۶} = ۱۳$$

یعنی میرے بیٹے کی موجودہ عمر ۱۳ سال ہے۔ مساوات (۴) میں ماکی یہ قیمت

$$\text{درج کرنے سے } ۱۰۰ = ۱۳ \times ۵ + ۴۵, \quad ۱۰۰ - ۴۵ = ۵۵ = ۱۳ \times ۵$$

یعنی میری موجودہ عمر ۳۵ سال ہے۔ اس لیے میرے باپ کی موجودہ عمر ۶۵ سال ہے۔ آسانی سے تصدیق کی جاسکتی ہے کہ یہ جواب سوال میں دی ہوئی شرطوں کو پورا کرتا ہے۔

ان مثالوں سے یہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ جب کسی رقم کو مساوات کی

ایک جانب سے دوسری جانب منتقل کیا جائے تو اس کی علامت بدل

جاتی ہے۔ نیز کسی دی ہوئی مساوات کو بہ شرط ضرورت کسی عدد سے ضرب

دیا جاسکتا ہے اور دو مساواتوں کا مجموعہ یا حاصل تفریق لیا جاسکتا ہے۔

الخوارزمی نے رقموں کو اکٹھا کرنے کو "المقابلہ" کی اصطلاح سے

موسوم کیا اور رقموں کی مساوات کی ایک جانب سے دوسری جانب منتقل کرنے کو "الجبر" سے تعبیر کیا۔ اس طرح اس علم کے لیے اصطلاح "الجبر والمقابلہ" رائج ہوئی۔ الخوارزمی نے درجہ دوم کی مساوات کو "تکمیل مربع" کے طریقے سے حل کیا جس کی توضیح ذیل کی مثال سے ہوتی ہے۔

مثال۔ مساوات $لا^۲ + ۱۰لا = ۳۹$ کو حل کرو۔ یعنی لا کی وہ قیمت یا قیمتیں معلوم کرو جو اس مساوات کو پورا کرتی ہیں۔

دی ہوئی مساوات کی دائیں جانب کو کامل مربع بنانے کے لیے

مساوات کی دونوں جانبوں میں ۲۵ جمع کرو۔ تب

$$لا^۲ + ۱۰لا + ۲۵ = ۳۹ + ۲۵ = ۶۴$$

$$یعنی (لا + ۵)^۲ = ۶۴ = ۲(۸ ±)$$

$$∴ لا + ۵ = ۸ ±$$

$$∴ لا = ۸ ± ۵$$

جس سے $لا = ۳$ اور $لا = ۱۳$

درج کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ لا کی یہ دونوں قیمتیں دی ہوئی مساوات کو پورا کرتی ہیں۔ یعنی دی ہوئی درجہ دوم کی مساوات کی دو اصلیں ۳ اور ۱۳ ہیں۔

عبارتی سوالوں کے حل میں درجہ دوم کی مساواتیں کارآمد ثابت

ہوتی ہیں۔

مثال۔ دو آدمیوں میں سے ہر ایک ۳۲ میل چلتا ہے۔ پہلے کی رفتار دوسرے کی رفتار سے فی گھنٹہ ۱/۲ میل کم ہے اور فاصلہ طے کرنے کے لیے پہلا آدمی دوسرے سے نصف گھنٹہ زیادہ لگاتا ہے۔ ان میں سے ہر ایک کی رفتار معلوم کرو۔

فرض کرو کہ پہلے آدمی کی رفتار لا میل فی گھنٹہ ہو
تب دوسرے کی رفتار لا + لا میل فی گھنٹہ ہوگی

پہلا شخص ۳۴ میل کا فاصلہ $\frac{۳۴}{لا}$ گھنٹوں میں اور دوسرا $\frac{۳۴}{لا + لا}$ گھنٹوں

میں طر کرتا ہے۔ سوال کی رو سے $\frac{۳۴}{لا} + \frac{۳۴}{لا + لا} = \frac{۳۴}{لا}$
کسروں کو دؤر کرنے کے لیے مساوات کی دونوں جانبوں کو $لا(لا + لا)$

سے ضرب دینے سے $۶۸(لا + لا) = لا + لا + لا + لا$

مختصر کرنے اور رقموں کو منتقل کرنے سے $۱۴ = لا + لا$

تکمیل مربع کے عمل سے $لا^۲ + ۲(لا) + ۱۴ = (لا + لا)^۲$

یعنی $(لا + لا)^۲ = ۱۴ + ۲(لا) + لا^۲ = \frac{۱۰۸۹}{۶۴} = \frac{۳۳}{۸}$

$$\therefore لا + لا = \pm \frac{۳۳}{۸}$$

$$\therefore لا = \pm \frac{۳۳}{۸} - لا، یعنی لا = م - \frac{۱۴}{۴}$$

اب چون کہ سوال کی نوعیت سے ظاہر ہے کہ رفتار مثبت ہوگی۔ اس لیے

حل $لا = م$ قابل قبول ہے اور دوسرا حل $لا = -\frac{۱۴}{۴}$ قابل قبول نہیں ہے۔

اس لیے پہلے آدمی کی رفتار ۴ میل فی گھنٹہ اور دوسرے کی ۴ میل فی گھنٹہ

ہے۔ اس جواب کی تصدیق سوال میں درج کر کے آسانی سے کی جاسکتی ہے۔

یونانی علم ہندسہ کی مدد سے درجہ دوم کی مساواتوں کی ان دوہری

اور خاص طور پر منفی اصلوں کی تعبیر بہ خوبی نہیں ہو سکتی تھی۔ سترھویں صدی

میں دے کارت نے ہندسہ تحلیلی کی ایجاد سے اس کو تاہی کو دؤر کیا۔ چنانچہ

ہندسہ تحلیلی میں ایک خط مستقیم پر مخالف سمتوں میں ناپے ہوئے فاصلے مختلف

علامتوں کے ساتھ لیے جاتے ہیں۔ یعنی اگر ایک سمت میں ناپے ہوئے

فاصلے مثبت قرار دیے جائیں تو مخالف سمت میں فاصلے منفی لیے جائیں گے۔

درجہ دوم کی ایسی مساواتیں بھی ہیں جو کسی مثبت یا منفی عدد سے پوری نہیں ہوتیں۔ مثلاً $لا^۲ - لا + ۵ = ۰$ تو تکمیل مربع سے

$$لا - لا + ۱ = ۰$$

$$\text{یعنی } (لا - ۱)^۲ = ۰$$

اب ایسا کوئی مثبت یا منفی عدد نہیں معلوم ہو جس کا مربع $(۴-)$ ہو۔ اس قسم کی مساواتوں کے حل کے دوران میں کارداں (CARDAN) نے یہ مفروضہ اختیار کیا کہ $(۱-)$ کا جذر بھی وجود رکھتا ہے اور اس کو علامت $\sqrt{-۱}$ سے تعبیر کیا گیا۔ چونکہ $۳ - ۳ \times ۱ = ۰$ اس لیے $\sqrt{-۱} = ۱ \times \sqrt{-۱}$ پس اوپر کی مساوات ہو جاتی ہے $(لا - ۱)^۲ = ۰ = ۲(۱ - لا) \pm ۲(۱ - لا)$

$$\therefore لا - ۱ = ۱ \pm ۱$$

$$\therefore لا = ۱ \pm ۱$$

اس استدلال میں شکل یہ پیش آتی ہے کہ $\sqrt{-۱}$ کا ہندسی مفہوم یونانی علم ہندسہ کی مدد سے نہیں بتایا جاسکتا۔ نویں باب میں اس کی مزید وضاحت کی جائے گی۔

درجہ دوم کی عام مساوات شکل $لا^۲ + بلا + ج = ۰$ میں

لی جاسکتی ہے۔ جہاں $لا$ ، $ب$ ، $ج$ کوئی دیے ہوئے عدد ہیں۔

اس مساوات کو شکل $لا^۲ + بلا + ج = ۰$ میں لکھ سکتے ہیں

$$\text{تکمیل مربع سے } لا^۲ + بلا + ج = ۰ \Rightarrow \left(\frac{لا}{۲}\right)^۲ + \frac{ب}{۲} \left(\frac{لا}{۲}\right) + \frac{ج}{۴} = ۰$$

$$\text{یعنی } \left(\frac{لا}{۲} + \frac{ب}{۴}\right)^۲ = \frac{ب^۲ - ۴ج}{۱۶}$$

$$\therefore \frac{لا}{۲} + \frac{ب}{۴} = \pm \sqrt{\frac{ب^۲ - ۴ج}{۱۶}}$$

اس قاعدے کی مدد سے درجہ دوم کی کسی مساوات کو حل کیا جاسکتا ہے۔
اگر جذر کی علامت کے اندر کا جملہ یعنی "ب۔ م۔ ج" منفی ہو تو حل میں
س۔ ا۔ داخل ہوگا۔ ایسے حل کو "خیالی حل" کہتے ہیں۔

سلسلے - پانچویں باب میں یہ بتایا جا چکا ہے کہ پہلے ن طبعی عددوں کا
مجموعہ $\frac{n(n+1)}{2}$ ہے۔ ہندستانی اور عرب ریاضی دانوں نے چینی علم
اعداد میں از سر نو دل چسپی پیدا کی، ہندی ریاضی داں آریہ بھٹہ نے
حسب ذیل شکل کے سلسلوں کے مجموعے کے لیے قاعدے بیان
کیے ہیں۔

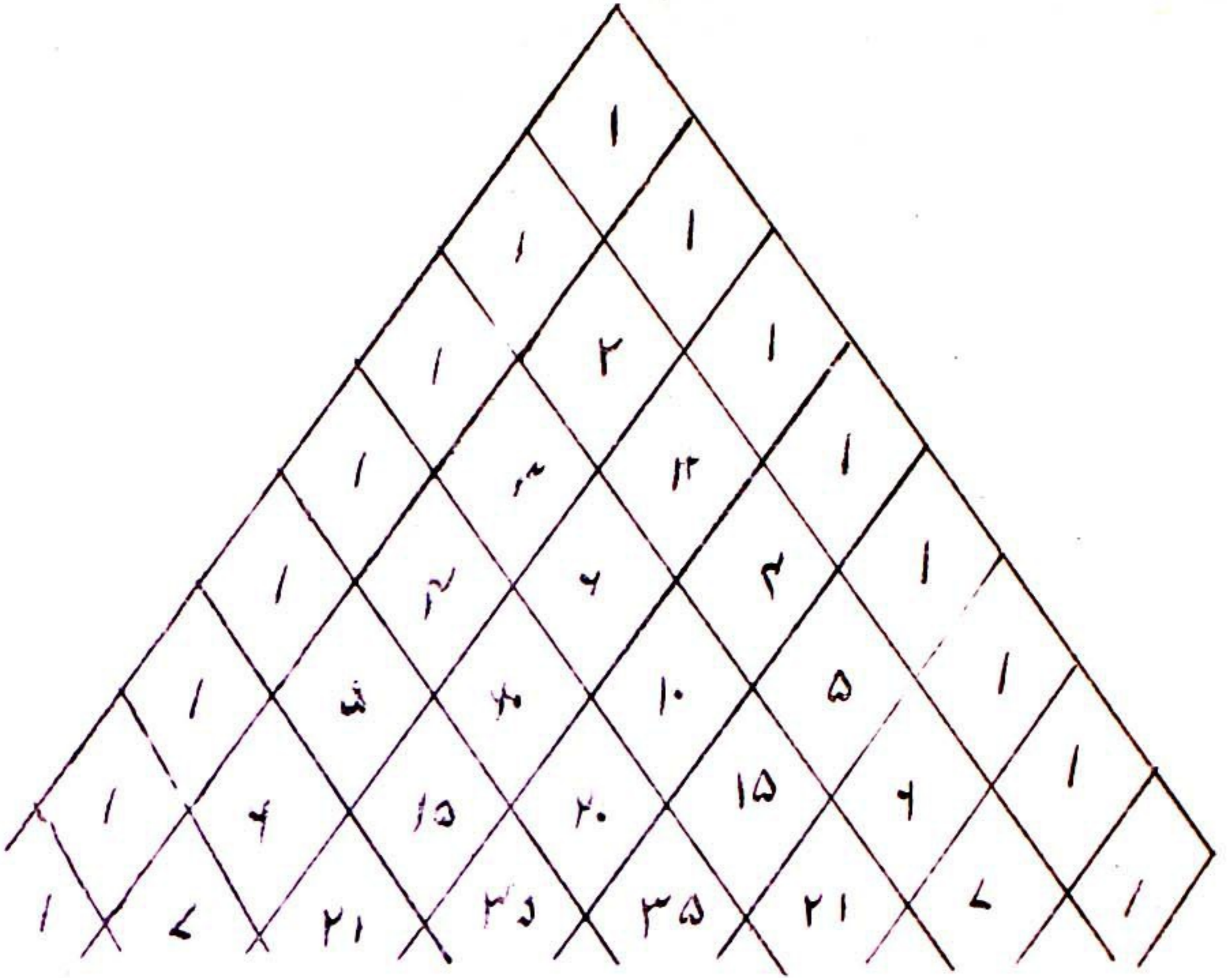
$$\frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$2 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

اس ضمن میں پاسکل کے عددی مثلث کا ذکر دل چسپی سے خالی
نہ ہوگا۔ یہ عددی مثلث سب سے پہلے عمر خیام نے دریافت کیا
تھا۔ اس عددی مثلث کو لکھنے کے لیے ہم اعداد ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱
سطر میں لکھتے ہیں۔

اس کے بعد دوسری ترچھی سطر میں اعداد ۱ ۲ ۳ ۴ ۵، لکھتے
ہیں اور تیسری ترچھی سطر میں دوسری سطر کا پہلا عدد، پہلے دو عددوں
کا مجموعہ، پہلے تین عددوں کا مجموعہ، - - - - وغیرہ لکھتے ہیں۔
اس کے مماثل تیسری سطر پر کرنے سے چوتھی سطر حاصل ہوتی ہے اس
طرح عددوں کا حسب ذیل مثلث بنتا ہے۔



ان عددوں کو افقی سطروں میں پڑھنے سے حسب ذیل سلسلے حاصل ہوتے ہیں۔

							۱
						۱	۱
					۱	۲	۱
				۱	۳	۳	۱
			۱	۳	۶	۳	۱
		۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱
	۱	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱
۱	۷	۲۱	۳۵	۳۵	۲۱	۷	۱

عددوں کے ان سلسلوں کی مدد سے ہم (۱+۱) '۱'، (۱+۱+۱) '۲'، (۱+۱+۱+۱) '۳' ... (۱+۱+۱+۱+۱+۱) کی تفصیلی صورتیں فوراً لکھ سکتے ہیں۔ مثلاً

$(1 + 1)^5 = 1^5 + 5 \cdot 1^4 \cdot 1 + 10 \cdot 1^3 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1^2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1 \cdot 1^4 + 1^5$ ان کی تصدیق ضرب دینے سے ہو سکتی ہے۔

پاسکل کے عددی مثلث کو کافی دور تک لکھنے سے کسی مثبت صحیح عددوں کے لیے $(1 + 1)^n$ کی تفصیلی صورت لکھی جاسکتی ہے جو حسین فیل ہے۔

$$(1 + 1)^n = \binom{n}{0} 1^0 + \binom{n}{1} 1^1 + \binom{n}{2} 1^2 + \dots + \binom{n}{n-1} 1^{n-1} + \binom{n}{n} 1^n$$

اسی طریقے سے $(1 + 1)^n$ کا پھیلاؤ بھی لکھا جاسکتا ہے۔ اس پھیلاؤ کی مدد سے کسروں کی قوتوں کی تقریبی قیمتیں بھی معلوم ہو سکتی ہیں مثلاً

$$1 + \binom{5}{1} r + \binom{5}{2} r^2 + \binom{5}{3} r^3 + \binom{5}{4} r^4 + r^5 = (1 + r)^5$$

$$1 + 5r + 10r^2 + 10r^3 + 5r^4 + r^5 = (1 + r)^5$$

$r = 0.5$ تقریباً جب کہ اعشاریہ کے تیسرے اور اعلیٰ تر مقام نظر انداز کیے جائیں۔

اگر ن مثبت صحیح عدد نہ ہو اور 1 کی عددی قیمت ایک سے کم ہو تو ثابت کیا

$$(1 + 1)^n = \binom{n}{0} 1^0 + \binom{n}{1} 1^1 + \binom{n}{2} 1^2 + \dots + \binom{n}{n-1} 1^{n-1} + \binom{n}{n} 1^n$$

بائیں جانب کا سلسلہ نہ ختم ہونے والا یعنی لامتناہی سلسلہ ہوگا۔ ایسے سلسلے کی ہر رقم کے بعد ایک اور رقم ہوتی ہے۔

ریاضی کے محاورے | تیسرے باب میں زبان کے قواعد اور ریاضی کے قاعدوں کی مشابہت کو واضح کرنے کی غرض سے متعدد مثالیں دی گئی تھیں۔ اس کی مزید وضاحت کے لیے ہم ریاضی یعنی مقدار کی زبان کے محاوروں کی مثالیں دیں گے۔

مشقی سوالات

۱۔ وہ عدد معلوم کرو جس کے مربع میں عدد کا دو چند جمع کرنے سے ۱۵ حاصل ہوتا ہے۔

۲۔ ایک قائم الزاویہ مثلث کے دو ضلعوں کا مجموعہ ۷ ہے اور وتر کا طول ۵ ہے مثلث کے ضلع معلوم کرو۔

۳۔ ایک شخص کے پاس کچھ روپے تھے۔ اس نے اس رقم کا $\frac{1}{2}$ ایک فقیر کو دیا، باقی کا $\frac{1}{2}$ دوسرے فقیر کو اور باقی کا $\frac{1}{2}$ تیسرے کو، اور اس کے پاس ۲۲ روپے بچ رہے بتاؤ کہ ابتدا میں اس کے پاس کتنے روپے تھے۔



آٹھواں باب

دُنیا کی مساحت یا علم مثلث کرومی

اہرام مصر کی تعمیر سے پیشتر مصری اور سمیری تہذیب کی مذہبی جماعتوں کو ستاروں کے متعلق حسب ذیل دو اہم باتیں معلوم تھیں :-

(۱) کوئی دو مخصوص ستارے نصف النہار (یعنی اس کیبروائرسے کو جو شمال اور جنوب کے نقطوں میں سے گزرتا ہے) ہمیشہ ایک خاص معین وقفہ سے یکے بعد دیگرے عبور کرتے ہیں (۲) کسی خاص مقام پر کسی دیے ہوئے ستارے کا نصف النہاری ارتفاع (یعنی ستارے کا ارتفاع جب کہ وہ نصف النہار کو عبور کرتا ہو) مستقل رہتا ہے۔ یہ تقویم ساز ستاروں کے عبور کا وقت ساعتی پیالوں (HOURGLASSES) کی مدد سے متعین کرتے تھے۔ لیکن ان کے آلات تشفی بخش نہ ہونے کی وجہ سے زیادہ صحیح نتیجے حاصل نہیں ہو سکتے تھے۔ جب مصر کے ان کاہنوں کی عملی صلاحیتیں رفتہ رفتہ مفقود ہو گئیں تو فنیقی جہازرانوں نے علم ہیئت میں ایک اور قدم آگے بڑھایا۔ قدیم یونانی جہازرانوں کو یہ بات معلوم تھی کہ کسی دو مخصوص ستاروں کے نصف النہاری ارتفاع کا فرق ہر مقام پر وہی رہتا ہے۔ انھیں اس کی وجہ بھی معلوم تھی یعنی یہ کہ زمین گول ہے اور ستارے بہ لحاظ ایک دوسرے کے ثابت ہیں۔ چاند گرہن کے وقت چاند پر

زمین کے دائری سایے سے انھیں زمین کے گول ہونے کا ثبوت ملتا تھا۔ جس کی مزید تائید اس بات سے بھی ہوتی تھی کہ سمندر کے ساحل کی طرف دُور سے آنے والے جہاز کا بالائی حصہ پہلے دکھائی دیتا تھا اور نچلا حصہ بعد میں اور ساحل سے پُرے جانے والے جہازوں کا نچلا حصہ پہلے نظر سے غائب ہوتا تھا اور بالائی حصہ بعد میں۔ اسی زمانے میں اسکندریہ کے مشہور حکیم ابراہیم ستھینز نے زمین کی پیمائش کی اور اس کے بعد ارضی نقشے تیار کیے گئے۔ چونکہ کروی ارضی نقشوں کی تیاری ستاروں کے مشاہدوں پر منحصر ہے اس لیے پہلے پہل ستاروں کے نقشے (سماوی نقشے) تیار کیے گئے۔ چنانچہ ہبارکوس نے (۱۰۸۰) ثابت ستاروں کا محل وقوع متعین کیا۔ اسی نوعی نقشہ سازی نے مغربی جہازرانوں کے بحری سفر کے لیے راستہ صاف کیا اور نئے ریاضیاتی آلات کی ایجاد ہوئی۔ پرتگال کے ولی عہد ہنری نے ۱۴۹۲ء میں مقام سیکری میں ایک رصدگاہ بنائی جہاں جہاز رانی کی تعلیم کے علاوہ ستاروں کے محل وقوع پر چالیس سال تک تحقیقات ہوتی رہی۔ اس مدرسے میں بحری جدولوں اور ہستی آلات کی ایجاد کے لیے عرب اور یہودی ہنیت دانوں کو متعین کیا گیا تھا۔ شاہی جہازراں، ہستی آلات اور اصولوں سے بخوبی واقف تھے اور انھی معلومات کی بنا پر بحری تجارت کو فروغ حاصل ہوا۔ اس طرح علم ہنیت کی ترقی پھر انسانی روزمرہ زندگی کا جز بن گئی۔

جس طرح کسی میدان میں ہم اپنا مقام
معلوم تجارتوں، چٹانوں، پورختوں وغیرہ

ستاروں کے نقشے بتانا

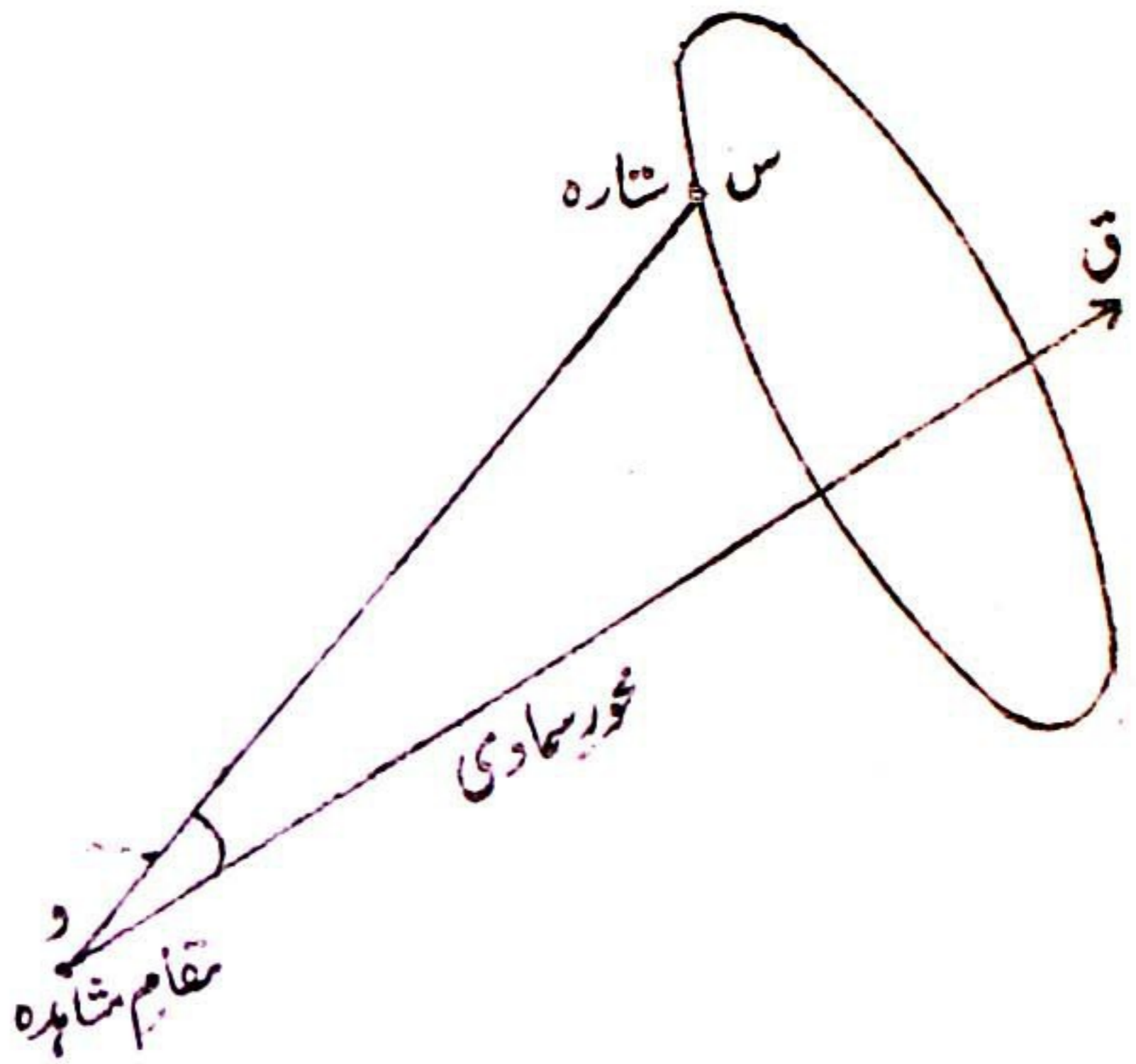
کی مدد سے متعین کرتے ہیں اسی طرح جہازراں سمندر پہنا اپنا مقام

ہیں۔ مختلف مقاموں پر اس سماوی محور اور افق کا درمیانی زاویہ بدلتا ہے اور مقام مشاہدہ کے عرض بلد کے مساوی ہوتا ہے۔ اس لیے جیسے جیسے ہم استوا سے شمال کی طرف جاتے ہیں اس محور سماوی کا میلان افق کے ساتھ بڑھتا ہے اور قطب شمالی پر ٹھیک 90° کے مساوی ہوتا ہے یعنی قطب شمالی پر تمام ثابت ستارے ایک انتصابی محور کے گرد گھومتے دکھائی دیتے ہیں۔ اسی طرح استوا سے جنوب کی طرف جائیں تو محور سماوی کا افق سے میلان بڑھتا جائے گا حتیٰ کہ قطب جنوبی پر محور سماوی پھر انتصابی ہو جاتا ہے۔ البتہ فرق یہ ہے کہ شمالی نصف کرہ زمین میں، سماوی محور شمال کی طرف جھکا ہوا ہوتا ہے اور جنوبی نصف کرہ زمین میں جنوب کی طرف اس کی مدد سے بہ آسانی معلوم ہو سکتا ہے کہ مقام مشاہدہ کس نصف کرہ زمین میں واقع ہے۔

کرہ سماوی پر ستارے دائروں میں حرکت کرتے دکھائی دیتے ہیں۔ اگر ہم ایک ایسا ستارہ لیں کہ کرہ سماوی پر اس کا طریق افق کے بالکل اوپر رہے تو یہ ستارہ اپنی روزانہ گردش کے دوران میں نصف النہار کو دو دفعہ عبور کرے گا۔ ایک دفعہ قطب سماوی کے اوپر اور دوسری دفعہ قطب سماوی کے نیچے۔ یہ ستارہ مذکور کے بالائی اور نیچے مرور کہلاتے ہیں۔ اگر بالائی اور نیچے مروروں کے وقت ستارے کے ارتفاع ناپے جائیں تو ان کا اوسط مقام مشاہدہ کے عرض بلد کے مساوی ہوتا ہے۔ دو مختلف مقاموں پر ایک ہی ستارے کے نصف النہاری ارتفاعوں کا فرق، ان مقاموں کے عرض بلد کے فرق کے مساوی ہوتا ہے۔ کسی مقام پر ایک ہی ستارے کے دو متصل مروروں کا درمیانی وقفہ، ایک کو کبھی دن

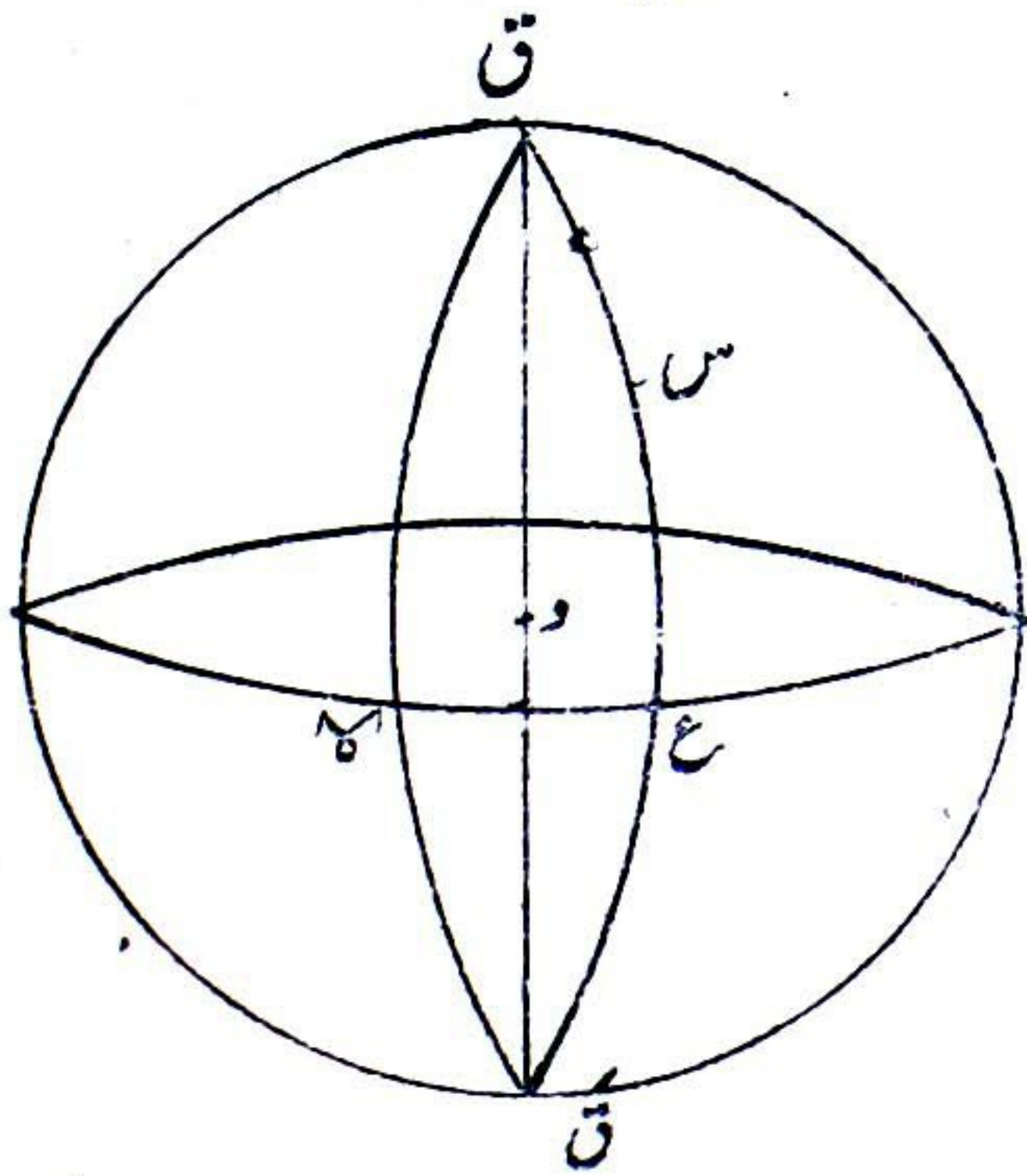
کہلاتا ہے۔ کسی ستارے کی سمت اور سماوی محور کی سمت کا درمیانی زاویہ اس ستارے کا قطبی فاصلہ کہلاتا ہے جو ستارے کے محور سماوی کے گرد گردش کے دوران میں مستقل رہتا ہے۔ اس کا مشاہدہ حسب ذیل طریقے سے کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ دور بین محور سماوی و ق کے گرد گھوم سکتی ہے اور محور سماوی سے زیر مشاہدہ ستارے کے قطبی فاصلے کے مساوی زاویہ



بتاتی ہے۔ اگر ستارے کو ایک وقت دور بین کے میدان نظر میں لایا جائے اور دور بین کو محور سماوی کے گرد ایسی زاویہ رفتار سے گھمایا جائے کہ وہ ایک کوکبی یوم میں ایک کامل گردش کرے (یعنی 360° میں سے گھوٹے) تو ستارہ مذکور ہمیشہ دور بین کے میدان نظر میں رہے گا (یہ مشاہدہ صرف اس وقت تک کیا جاسکتا ہے جب تک کہ ستارہ افق کے اوپر ہو) اس سے ثابت ہوتا ہے کہ محور سماوی کے گرد ستارے کی حرکت کے دوران میں ستارے کا قطبی فاصلہ مستقل رہتا ہے۔

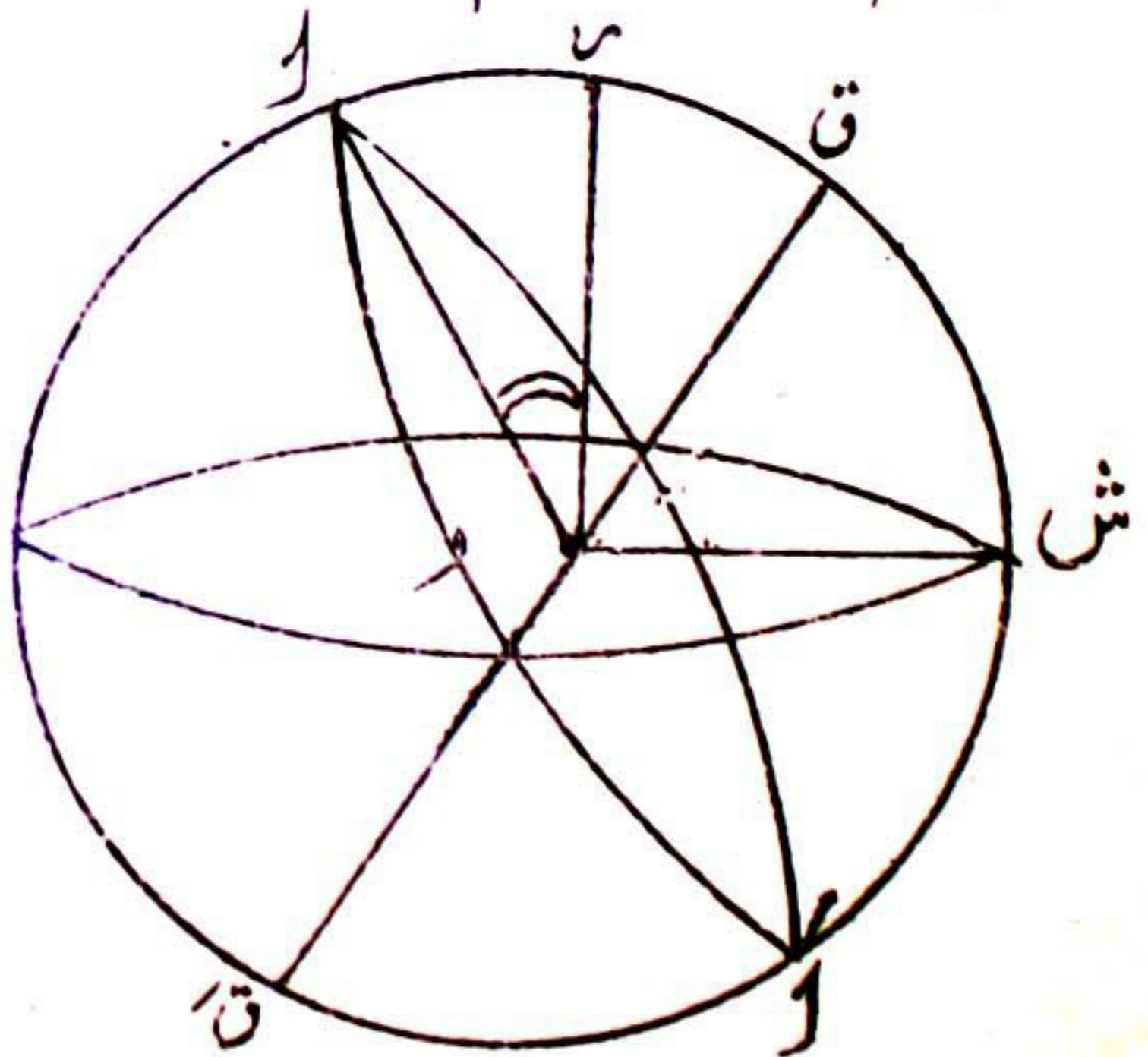
کرہ سماوی پر ستاروں کے مقام کا تعین دو بڑے دائروں کی مدد سے کیا جاتا ہے جن میں سے ایک یعنی استوائے سماوی محور سماوی پر عمود وار ہوتا ہے اور دوسرا محور سماوی میں سے گزرتا ہے۔ ان دو دائروں کا ایک نقطہ تقاطع وہ نقطہ ہے جہاں سورج ۲۱ مارچ کو واقع ہوتا ہے۔ یہ نقطہ نقطہ راس الجمل کہلاتا ہے اور اس کو علامت (♈) سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ کرہ سماوی پر کے کسی ستارے س کا مقام متعین کرنے کے لیے ہم محور سماوی ق ق اور س میں سے گزرنے والا بڑا دائرہ کھینچتے ہیں جو استوائے سماوی سے ع پر ملتا ہے تب قوسوں کا ع اور ع س



کی مدد سے ستارے س کا مقام متعین ہوتا ہے۔ کلا ع کو ستارہ کا صعود مستقیم اور ع س کو ستارے کا میل کہتے ہیں۔ بالعموم صعود مستقیم کو ع سے اور میل کو م سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ چنانچہ شکل میں راویہ کلا ع = ع ، اور ع و س = م چوں کہ کوئی ستارہ محور سماوی کے گرد چوبیس گھنٹوں میں ۳۶۰

میں سے گھوم جاتا ہے اس لیے ا میں سے گھومنے کا وقت ہم منٹ ہوگا۔
 ستارے کے صعود مستقیم کو درجوں میں یا وقت میں بیان کیا جاسکتا ہے۔
 مثلاً اگر کسی ستارے کا صعود مستقیم ۳۰ ہو تو یہ بھی کہا جاسکتا ہے کہ ستارے
 کا صعود مستقیم ۳۰ x ۲ منٹ یا دو گھنٹے ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ نقطہ
 راس النحل (ک) کے مرور کے ٹھیک ۲ کو کبھی گھنٹے بعد ستارہ مذکور نصف النہار
 کو عبور کرے گا۔ نیز دو ستاروں کے صعود مستقیم کے فرق سے ان کے
 مروروں کا درمیانی وقفہ تعبیر ہوتا ہے جو دو دیے ہوئے ستاروں کے لیے
 مستقل ہے۔

اگر کوئی ستارہ استوا کے شمال کی جانب ہو تو اس کا میل، شمالی یا
 مثبت (+) میل کہلاتا ہے اور اگر استوا کے جنوب میں ہو تو جنوبی یا منفی (-)
 کہلائے گا۔ چونکہ استوا، محور سماوی پر عمودوار ہے اس لیے استوا اور
 نصف النہار کے نقطہ تقاطع کا راسی فاصلہ مقام مشاہدہ کے عرض بلد
 کے مساوی ہوتا ہے جیسا کہ ملحقہ شکل سے ظاہر ہے۔ اگر کسی ستارے کا
 میل (+) ہو اور مقام مشاہدہ کا عرض بلد نہ ہو۔ تو ستارے کا



اس شکل میں مقام مشاہدہ
 و ہے۔ ق ق محور سماوی
 ہے، ا ا استوا ہے۔
 س راس ہے اور ش
 شمال کا نقطہ ہے۔

نصف النہاری راسی فاصلہ (فہ - م) یا (م - فہ) کے مساوی ہوگا بہ موجب اس کے کہ فہ بڑا ہو یا چھوٹا ہو م سے پہلی صورت میں ستارہ، راس کے جنوب کی طرف نصف النہار کو عبور کرے گا اور دوسری صورت میں شمال کی طرف۔ نیز اگر ستارے کا میل (م - م) ہو تو اس کا نصف النہاری راسی فاصلہ (فہ + م) ہوگا۔ ان نتیجوں کی تصدیق مناسب شکلیں کھینچ کر آسانی سے کی جاسکتی ہیں۔ یہ بھی ظاہر ہو کہ ایک ستارہ ہمیشہ افق کے اوپر رہے گا اگر اس کا قطبی فاصلہ (یعنی $90^\circ - \phi$) چھوٹا ہو مقام مشاہدہ کے عرض بلد فہ سے ایسا ستارہ "حیط قطبی" ستارہ کہلاتا ہے اور ایک 'کوکبی یوم میں' یہ نصف النہار کو افق کے اوپر دو دفعہ عبور کرتا ہے۔ بالائی مرور کے وقت ایسے ستارے کا ارتفاع (فہ + م) ہوتا ہے اور نچلے مرور کے وقت (فہ - م)۔ (یہ مان لیا گیا ہے کہ بالائی مرور کے وقت ستارہ راس کے شمال کی طرف ہوتا ہے) اس سے ظاہر ہے کہ بالائی اور نچلے مروروں کے وقت ستارے کے ارتفاعوں کا اوسط مقام مشاہدہ کے عرض بلد فہ کے مساوی ہوتا ہے۔ نیز کسی معلومہ ستارے کے نصف النہار کو عبور کرنے کے وقت ستارے کا راسی فاصلہ م ناپ کر مقام مشاہدہ کا عرض بلد فہ ذیل کے ضابط سے معلوم ہو سکتا ہے۔

$$m = \phi - \mu \text{ یا } \mu - \phi \text{ (جہاں ستارے کا میل } \mu \text{ دیا گیا ہے)}$$

نوٹ۔ اگر راس سے شمال کی طرف ناپے ہوئے راسی فاصلوں کو + اور جنوب کی طرف ناپے ہوئے فاصلوں کو منفی قرار دیا جائے تو $\mu = \phi + m$ یا $\mu = \phi - m$ (۲۱) مارچ کو سورج نقطہ راس الحقل (لا) پر ہوتا ہے اس لیے ۲۱ مارچ کو سورج اور کسی ستارے کے مروروں کا درمیانی وقفہ

معلوم کیا جائے تو ستارے کا صعود مستقیم حاصل ہوتا ہے اور اس ستارے اور دوسرے ستاروں کے موروں کے درمیانی وقفوں کی مدد سے تمام ستاروں کے صعود مستقیم معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ نیز نصف النہاری راسی فاصلوں کی مدد سے ستاروں کے میل معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ اس طرح ستاروں کے سماوی محور یعنی صعود مستقیم اور میل معلوم کر کے کرہ پر ستاروں کے مقام متعین کیے جا سکتے ہیں۔ یہ نقشے ستاروں کے نقشے ریا سماوی نقشے کہلاتے ہیں۔

طریق الشمس | مختلف تاریخوں میں کرہ سماوی پر سورج کا مقام اس کے صعود مستقیم اور میل کی مدد سے قائم کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ثابت ستاروں کے لحاظ سے سورج کا مقام کرہ سماوی پر مغرب سے مشرق کی طرف بدلتا رہتا ہے۔ اور ایک سال میں کرہ سماوی پر سورج ایک بڑا دائرہ بناتا ہے۔ یہ بڑا دائرہ طریق الشمس کہلاتا ہے۔ طریق الشمس، استوائے سماوی کو دو نقطوں پر کاٹتا ہے۔ ایک نقطہ تقاطع اس وقت حاصل ہوتا ہے جب کہ سورج کا میل منفی سے مثبت ہوتا ہے۔ اور دوسرا اس وقت جب کہ میل مثبت سے منفی ہوتا ہے۔ یہ نقطے ترتیب وار نقطہ راس الحمل (الان) اور نقطہ راس المیزان (اس) کہلاتے ہیں۔ اور ان پر سورج تقریباً ۲۱ مارچ اور ۲۳ ستمبر کو واقع ہوتا ہے۔ جب سورج ان نقطوں پر ہوتا ہے تو ظاہر ہے کہ سورج کا میل صفر ہوتا ہے۔ ان تاریخوں میں ساری دنیا میں دن اور رات مساوی ہوتے ہیں۔ نیز سورج ٹھیک مشرق میں طلوع ہوتا ہے اور ٹھیک مغرب میں غروب ہوتا ہے اور ان تاریخوں میں سورج کا نصف النہاری راسی

فاصلہ مقام شاہدہ کے عرض بلد کے مساوی ہوتا ہے۔ ۲۱ مارچ کو اعتدالِ ربیع اور ۲۳ ستمبر کو اعتدالِ خریف کہتے ہیں۔ ۲۱ مارچ سے ۲۲ جون تک سورج کا شمالی میل بڑھتا جاتا ہے اور ۲۲ جون کو اپنی اعظم قیمت یعنی ۲۳° ۲۸ پر پہنچتا ہے۔ سورج کا یہ انتہائی شمالی مقام نقطہ انقلابِ گرما کہلاتا ہے۔ ۲۲ جون سے ۲۳ ستمبر تک سورج کا میل گھٹتا رہتا ہے اور ۲۳ ستمبر کو پھر صفر ہو جاتا ہے۔ اس کے بعد ۲۲ دسمبر تک جنوبی میل بڑھتا جاتا ہے۔ یہاں تک کہ ۲۲ دسمبر کو جنوبی میل اپنی انتہائی قیمت - ۲۳° ۲۸ پر پہنچتا ہے۔ سورج کا یہ انتہائی جنوبی مقام نقطہ انقلابِ سرما کہلاتا ہے۔ اس تاریخ کے بعد ۲۱ مارچ تک سورج کا جنوبی میل گھٹتا ہوا ۲۱ مارچ کو پھر صفر ہو جاتا ہے۔ گرہ سماوی پر سورج کے مقام کی ان دوری تبدیلیوں کے ساتھ ساتھ کسی مقام شاہدہ پر سورج کے طلوع اور غروب کی سمتیں، نصف النہاری راسی فاصلہ اور دن کا طویل (یعنی طلوع سے غروب تک کا وقفہ) بدلتا رہتا ہے۔

اگر مقام شاہدہ کا عرض بلد ۲۳°، ۲۸ سے کم ہو تو اس تاریخ کو جب کہ سورج کا میل مقام شاہدہ کے عرض بلد کے مساوی ہوتا ہے، سورج نصف النہار کو نقطہ سمت الراس (م) پر عبور کرے گا۔ اگر عرض بلد ۲۳°، ۲۸ سے زیادہ ہو تو سورج سال کے دوران میں کبھی بھی ٹھیک سمت الراس میں نہیں آئے گا۔

سورج اور ستاروں کی ظاہری حرکت کی توجیہ - ہر روز سورج شمال سے مشرق سے مغرب کی طرف حرکت کرتا ہوا دکھائی دیتا ہے۔ نیز رات کے وقت ستارے بھی اسی سمت میں حرکت کرتے معلوم ہوتے

ہیں لیکن صرف ان مشاہدات کی بنا پر یہ تصدیق کرنا مشکل ہے کہ سورج اور ستاروں کی یہ حرکت حقیقی ہے یا نہیں۔ یہ روزمرہ کا مشاہدہ ہے کہ چلتی ہوئی ریل گاڑی میں سے پٹری کے بازو کے کھبے اور درخت دیکھے جائیں تو وہ ریل گاڑی کی مخالف سمت میں حرکت کرتے دکھائی دیتے ہیں۔ لیکن درحقیقت وہ ساکن ہیں اور ریل گاڑی حرکت کر رہی ہے۔ بالکل اسی طرح سورج اور ستاروں کی ظاہری حرکت بھی زمین کی محوری گردش کی وجہ سے ہوتی ہے۔ زمین اپنے محور کے گرد ایک کوکبی یوم میں ایک کامل چکر مغرب سے مشرق کی طرف لگاتی ہے جس کی وجہ سے ستارے مخالف سمت میں محور سماوی کے گرد (جو زمین کے محور کے متوازی ہے) حرکت کرتے دکھائی دیتے ہیں۔ ثابت ستاروں میں سورج کی سالانہ حرکت دراصل زمین کی دوری حرکت (یعنی سورج کے گرد زمین کی سالانہ گردش) کی وجہ سے واقع ہوتی ہے، تقریبی حسابات کے لیے یہ مان لیا جاسکتا ہے کہ ثابت ستاروں کے لحاظ سے سورج کی ظاہری حرکت صعود مستقیم میں اُروزانہ ہوتی ہے۔ اس لحاظ سے سورج کے مردر اور کسی دیے ہوئے ستارے کے مردر کا درمیانی وقفہ ہر روز کم منٹ بڑھتا جائے گا۔

سیارے اور ان کی حرکت۔ ثابت ستاروں کے علاوہ ہمارے نظام شمسی میں زمین کی طرح سورج کے گرد گھومتے والے (۸) اور سیارے بھی ہیں۔ ستاروں اور سیاروں میں امتیاز اس طرح کیا جاتا ہے کہ ستاروں کے سماوی محدود (یعنی صعود مستقیم اور میں) مستقل رہتے ہیں اور سیاروں کے بدلتے رہتے ہیں۔ نیز بغیر دؤر بین اور سماوی محدودوں کی پیمائش کے

بھی سیاروں کی شناخت اس طرح کی جاسکتی ہو کہ سیارے ستاروں کی طرح ٹٹماتے نہیں بلکہ نور کے ایک ثابت مبداء کی طرح نظر آتے ہیں اس کی وجہ یہ ہو کہ سیارے سورج کی منعکسہ روشنی سے چمکتے ہیں اور ستارے بہ ذاتِ خود منور ہیں۔ قدیم ہیئتِ داناں عرف (۵) سیاروں یعنی عطارد، زہرہ، مریخ، مشتری اور زحل سے واقف تھے۔ لیکن سترھویں صدی سے موجودہ زمانے تک تین اور سیارے یعنی یورے نس (URANUS) نیپچون (NEPTUNE) اور پلوٹو (PLUTO) معلوم کیے گئے ہیں۔ اپنی ظاہری یومیہ حرکت کے علاوہ سیارے ثابت ستاروں میں کبھی تو مغرب سے مشرق کی طرف حرکت کرتے دکھائی دیتے ہیں اور کبھی مشرق سے مغرب کی طرف۔ اور ان دو حرکتوں کے درمیان کچھ دنوں کے لیے وہ ساکن بھی معلوم ہوتے ہیں۔ قدیم ہیئتِ دانوں کو سیاروں کی اس راست (سیدھی) اور رجعی (الٹی) حرکت کی توجیہ میں بڑی دقت پیش آئی۔ کیوں کہ وہ زمین کو ساکن مان کر ستاروں، سورج اور سیاروں کو زمین کے گرد حرکت کرتا ہوا تصور کرتے تھے۔ لیکن کوپرنیکس (COPERNICUS) اور اس کے بعد کے ہیئت دانوں نے جو نظریے پیش کیے ان کی رو سے سیارے اور زمین (جس کو ایک سیارہ تصور کیا جاسکتا ہے) اپنے اپنے مدار میں سورج کے گرد حرکت کرتے ہیں۔ اس 'شمس مرکزی' نظریے کی مدد سے سیاروں کی ظاہری راست اور رجعی حرکت کی توجیہ نسبتاً آسانی سے کی جاسکتی ہے۔

کروی مثلث۔ اگر کرۂ سماوی پر تین بڑے دائرے جن کی سطحیں کرہ کے ایک ہی قطریں سے نہیں گزرتی ہیں کھینچے جائیں تو ان کے تقاطع سے

کرہ کی سطح آٹھ حصوں میں تقسیم ہو جاتی ہے۔ جن میں سے ہر ایک حصہ ایک کروئی مثلث کہلاتا ہے یعنی کروئی مثلث تین بڑے دائروں کی قوسوں سے گھرا ہوا ہوتا ہے۔ ان قوسوں کے تین نقاط تقاطع کروئی مثلث کے راس کہلاتے ہیں۔ اگر کرہ کا مرکز O ہو اور کروئی مثلث کے راس A, B, C تو قوسوں AB, BC, CA کے مقابل مرکز O پر بننے والے زاویوں سے کروئی مثلث کے ضلعوں کو ناپا جاتا ہے اور ہر راس میں سے گزرنے والی قوسوں کی سطحوں کا درمیانی زاویہ، راسی زاویہ کہلاتا ہے۔ مثلاً کروئی مثلث ABC کا راسی زاویہ B AC دراصل قوسوں AB اور BC کی سطحوں کا درمیانی زاویہ ہے۔ یہ زاویہ راس A پر قوسوں AB, AC کے ماسوں کے درمیانی زاویے کے مساوی ہوتا ہے۔ کروئی مثلث کے تین ضلعے اور تین زاویے کروئی مثلث کے چھ جز کہلاتے ہیں۔ بالعموم جس کرے پر کروئی مثلث بنائے جائیں اس کا نصف قطر اکائی لیا جاتا ہے۔ علم ہیئت میں چوں کہ ہم بالعموم ستاروں، سیاروں وغیرہ کی سمتوں سے بحث کرتے ہیں۔ اس لیے اس نصف قطر کا اثر ہمارے حسابات پر نہیں پڑتا۔

ترقیم۔ کروئی مثلث ABC کے زاویوں کو A, B, C سے تعبیر کیا جاتا ہے اور ان راسوں کے مقابل کے ضلعوں کو a, b, c سے۔ مستوی مثلث کے اہم ضابطوں کے جواب میں کروئی مثلث کے لیے بھی متناظر ضابطے حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ جن میں سے حسب ذیل دو ضابطے نہایت اہم ہیں اور ہیئت حسابات میں کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

$$(1) \sin A = \frac{a}{c} \sin C + \frac{b}{c} \sin B$$

س = ۹۰° (کیوں کہ افق پر کاہر نقطہ اس سے ۹۰° کے فاصلے پر ہوتا ہے)
 کروئی مثلث ق س میں

$$\text{جم س س} = \text{جم (ق س)} + \text{جم (ق س)} + \text{جب (ق س)} + \text{جب (ق س)}$$

$$\times \text{جم س ق س}$$

$$\text{یعنی جم } ۹۰^\circ = \text{جم (۴۲ ۳۷)} + \text{جم (۶۶ ۳۲)}$$

$$+ \text{جب (۴۲ ۳۷)} + \text{جب (۶۶ ۳۲)}$$

$$\text{یعنی } ۰ = \text{جم (۴۲ ۳۷)} + \text{جم (۶۶ ۳۲)} + \text{جب (۴۲ ۳۷)} + \text{جب (۶۶ ۳۲)}$$

$$\text{جم (س ق س)}$$

$$\therefore \text{جم س ق س} = \frac{\text{جم (۴۲ ۳۷)} + \text{جم (۶۶ ۳۲)}}{\text{جب (۴۲ ۳۷)} + \text{جب (۶۶ ۳۲)}}$$

$$= \frac{\text{جم (۴۲ ۳۷)} + \text{جم (۶۶ ۳۲)}}{\text{جم (۴۲ ۳۷)} + \text{جم (۶۶ ۳۲)}}$$

$$\therefore \text{جم س ق س} = \text{س (۱۶ ۲۳)} \text{ س (۲۳ ۲۸)}$$

جدولوں سے قیمتیں معلوم کر کے حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{س ق س} = ۹۰^\circ ۲۸'$$

ہمیں معلوم ہے کہ سورج محور سماوی کے گرد ۲ گھنٹوں میں ۳۶۰° میں سے گھوم جاتا ہے اس لیے (۹۰° ۲۸' میں سے گھومنے کے لیے تقریباً ۶ گھنٹے ۳۱ منٹ لگیں گے یعنی بر وقت طلوع سورج کا ساعتی زاویہ (۶ گھنٹے ۳۱ منٹ) ہے۔

نوٹ:۔ ظاہر ہے کہ نصف النہار سے غروب تک بھی اتنا ہی وقفہ درکار ہوگا۔

یعنی ۲۲ جون کو حیدرآباد میں دن کا طول ۱۳ گھنٹے ۲ منٹ ہوگا۔ ان

حسابات میں ہم نے سورج کے مرکز کے طلوع اور غروب کا وقت

لیا ہے نیز کرہ ہوائی کے انعطاف کے اثر کو نظر انداز کر دیا ہے۔ اگر اسے

بھی ملحوظ رکھا جائے تو یہ طویل تقریباً ۱۳ گھنٹے ۱۱ منٹ حاصل ہوگا۔
اب ہمیں شس (یعنی طلوع آفتاب کی سمت) محسوب کرنا ہے۔

کروی مثلث شس ق س میں

$$\text{ش ق} = ۱۷^\circ ۲۳'$$

$$\text{ق س} = ۶۶^\circ ۳۲'$$

$$\text{ق شس} = ۹۰^\circ$$

$$\therefore \text{جم (ق س)} = \text{جم ق ش} \times \text{جم شس}$$

$$+ \text{جم ق س جب شس} \text{ جم ق شس}$$

$$\text{چوں کہ جم ق شس} = \text{جم} = ۹۰^\circ = \text{صفر}$$

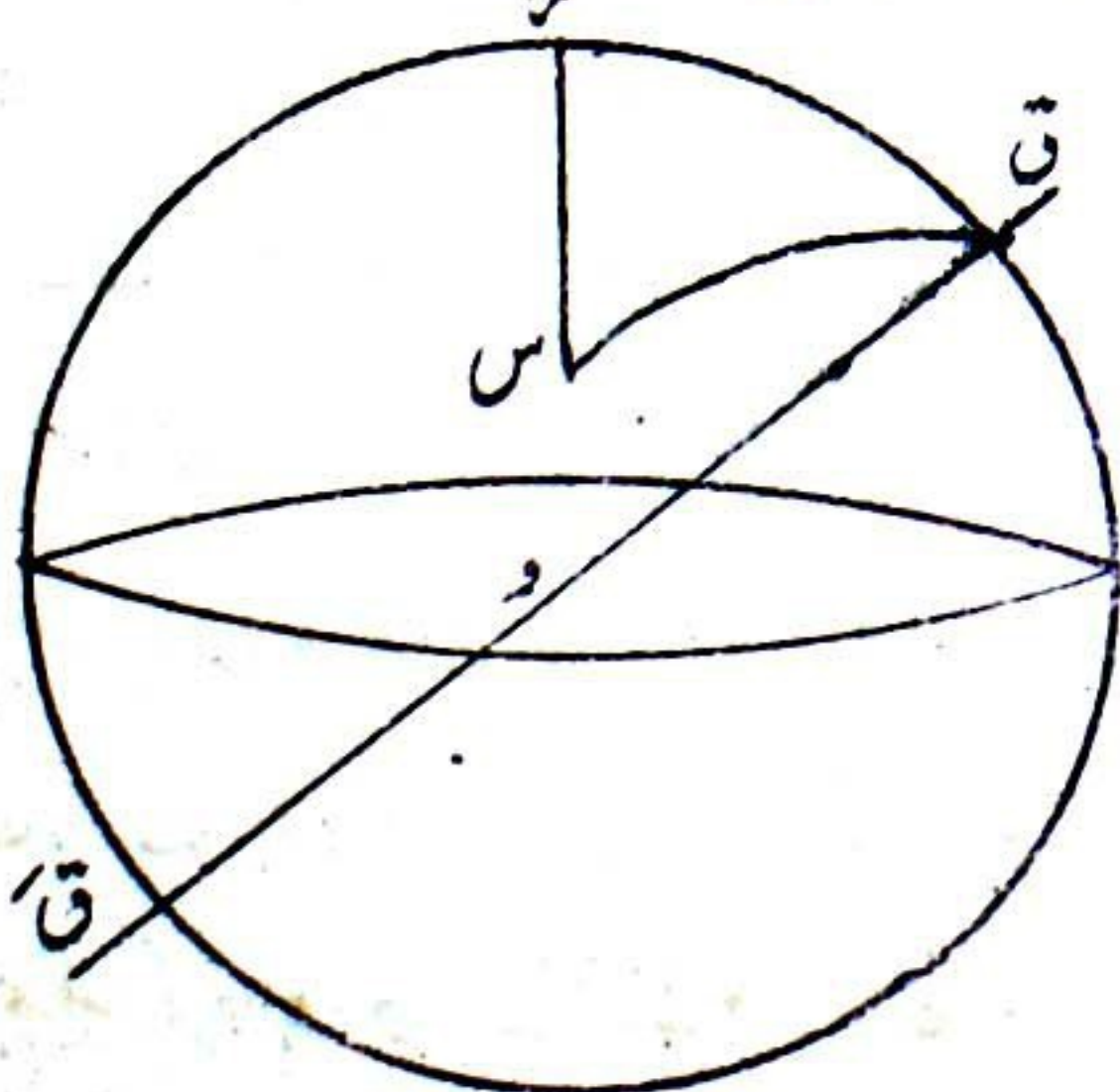
$$\text{اس لیے جم} (۳۲^\circ ۶۶') = \text{جم} (۱۷^\circ ۲۳') (\text{جم شس})$$

$$\text{جم شس} = \frac{\text{جم} (۳۲^\circ ۶۶')}{\text{جم} (۱۷^\circ ۲۳')}$$

$$\text{اس لیے حاصل ہوتا ہے کہ شس} = ۶۵^\circ ۲۰' \text{ تقریباً}$$

پس معلوم ہوا کہ طلوع کے وقت سورج (کا مرکز) مشرق سے ۲۲° ۲۰' شمال کی طرف ہٹا ہوا ہوگا۔

مثال ۲۔ ایک ستارے کا میل (+۳۰°) ہے اور ارتفاع (۶۰°) اور مقام



مشاہدہ کا عرض بلد (۲۵°) ہے۔

بتاؤ کہ یہ وقت مشاہدہ ستارے کا

ساعتی زاویہ کیا ہے۔

$$\therefore \text{ش ق} = ۵^\circ$$

$$\therefore \text{ق س} = ۵^\circ$$

$$\text{ستارے کا ارتفاع} = ۶۰^\circ$$

∴ راسی فاصلہ س س = ۳۰°

ستارے کا میل = ۳۰° ، ∴ قطبی فاصلہ ق س = ۶۰°

کروی مثلث ق س س میں

جسم س س = جسم (ق س) + جسم (ق س) + جسم (س س)

یعنی جسم ۳۰° = جسم ۲۵° جسم ۶۰° + جسم ۲۵° جسم ۶۰° جسم (س ق س)

جدولوں سے قیمتیں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

س ق س = ۳۳° ۱۲ تقریباً

یعنی مشاہدے کے تقریباً ۲ گھنٹے ۱۳ منٹ بعد ستارہ نصف النہار پر آئے گا۔

اگر وہ مشاہدے کے وقت نصف النہار کے مشرق کی طرف ہو۔

مثال ۳۔ بتاؤ کہ اعتدال ربیع کے دن کسی مقام پر دن کا طول ۱۲ گھنٹے

ہوگا۔ نیز یہ بھی ثابت کرو کہ سورج ٹھیک مشرق میں طلوع ہوتا ہے اور

ٹھیک مغرب میں غروب ہوگا

ق س = ۹۰° (کیوں کہ سورج کا میل صفر ہے)

س س = ۹۰° (کیوں کہ س افق پر ہے)

کروی مثلث س ق س میں

جسم س س = جسم (ق س) + جسم (ق س) + جسم (س س)

+ جسم (ق س) + جسم (ق س) + جسم (س س)

جسم (س ق س)

جسم ۹۰° = جسم (ق س) + جسم (ق س) + جسم (س س)

جسم (ق س) + جسم (ق س) + جسم (س س)

∴ = ۰ + جسم (ق س) + جسم (س س)

سے گھومتا ہے اس لیے کسی دیے ہوئے وقت پر سورج کا ساعتی زاویہ معلوم ہو سکتا ہے۔ دھوپ گھڑی کی درجہ بندی کے لیے اب یہ معلوم کرنا کافی ہے کہ مختلف ساعتی زاویوں کے جواب میں دھوپ گھڑی کی سوئی کے سایے کی سمت کیا ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ سورج س، نصف النہار کے مغرب کی طرف ہے اور ساعتی زاویہ = س ق س تب دھوپ گھڑی کی سوئی و ق کا سایہ کرہ سماوی پر ق ن ہوگا جہاں س ق ن ق ایک بڑا دائرہ ہے اور ن افق پر ہے۔ ظاہر ہے کہ ش ق ن = سورج کا ساعتی زاویہ س ق س۔ نیز ق ش = مقام مشاہدہ کا عرض بلد اور ق ش ن = ۹۰۔ اس لیے کروئی مثلث ق ش ن کو حل کرنے سے ش ن محسوب کیا جاسکتا ہے یعنی سوئی کے سایے و ن کی سمت حاصل ہوتی ہے۔

اس طرح سے مختلف ساعتی زاویوں کے جواب میں سوئی کے سایے کے مقام معلوم کیے جاسکتے ہیں۔

نوٹ۔ اگر درجہ بندی ایسی مستوی سطح پر کی جائے جو محور سماوی پر یعنی دھوپ گھڑی کی سوئی پر عمود وار ہو تو کروئی مثلثوں کو استعمال کرنے کی ضرورت ہی پیش نہیں آتی کیوں کہ محور سماوی کے گرد سورج کی یکساں زاویائی رفتار کی وجہ سے ایک گھنٹے میں سوئی کا سایہ ۱۵ کے زاویے سے گھومتا ہے۔

دو مقاموں کا درمیانی فاصلہ۔ اگر کرہ زمین پر اور ب دو بے ہوئے مقام ہوں اور زمین کا قطب شمالی ق ہو تو کروئی مثلث ق ب میں ق ب اور ق ب معلوم ہیں۔ اس لیے کروئی مثلثوں

کے ضابطہ (۱) کی مدد سے قوس \angle ب محسوب کی جاسکتی ہے۔ یعنی وہ زاویہ محسوب کیا جاسکتا ہے جو \angle ب کے مقابل کرہ زمین کے مرکز پر بنتا ہے۔ چوں کہ زمین کا نصف قطر (۳۰۰۰) میل ہے اس لیے فاصلہ \angle ب میلوں میں محسوب کیا جاسکتا ہے۔

یاور کھنے کی باتیں۔

(۱) کسی فلکی جرم کا میل = (مقام مشاہدہ کا عرض بلد) \div (نصف النہاری

ر اسی فاصلہ)

(۲) کروی مثلث \angle ب ج میں

جھ \angle = جھ ب جھ ج + جب ب جب ج جھ \angle

اور $\frac{جب \angle}{جب \angle} = \frac{جھ ب ب}{جب ب}$

نواں باب

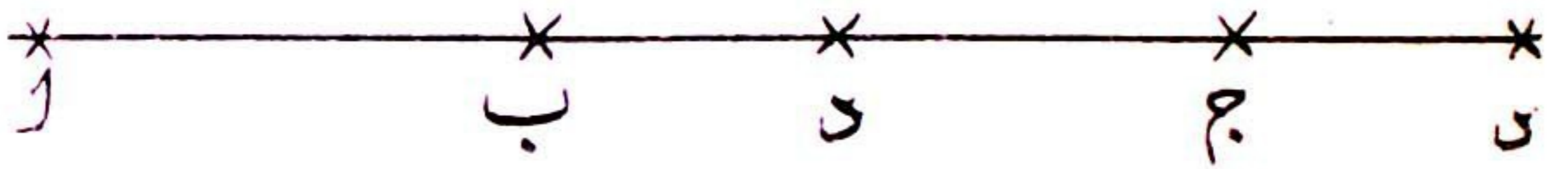
دے کارت کا علم ہندسہ یا تریسات

پندرہویں صدی عیسوی کے ختم پر ریاضی کا ایک نیا دور شروع ہوا۔ پہیوں سے چلنے والی گھڑیوں کی ساخت، جنگ میں توپ خانے کا استعمال جہاز رانی کے لیے ہیتی نقشوں اور جدولوں کی تیاری نے ریاضی دانوں کو اس امر پر مجبور کیا کہ وہ نئی جدولوں کے لیے نئے فنی طریقے استعمال کریں۔ چوتھے باب میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اقلیدس نے اپنے علم ہندسہ میں مقام اور وقت کو کوئی جگہ نہیں دی تھی۔ چودھویں صدی تک گھڑیوں کا استعمال صرف خانقاہوں تک محدود رہا لیکن جب گلیلیو نے رقاہ کی حرکت کا قانون دریافت کیا تو وقت کے چھوٹے وقفوں کا ناپنا ممکن ہو گیا اور علم حیل میں ایک نئے باب کا آغاز ہوا۔ اسکندریہ کے علم سکون کے مقابلے میں علم حرکت کی بنیاد ڈالی گئی۔ توپ خانوں کے استعمال سے تیز رفتار گولوں کے ٹھیک چلنے اور نشانے پر لگنے کے متعلق سوال حل کرنے کی ضرورت پیش آئی۔ اور اس سلسلے میں چھوٹے وقفوں کو ناپنے کے لیے رقاہ والی گھڑیاں بنائی جانے لگیں۔ توپ کے گولے کی حرکت اور گولے کا نشانہ معلوم کرنے کے لیے علم مثلث سے خوب استفادہ کیا گیا اور ریاضی دانوں پر واضح ہوا کہ ان

مسئلوں کے حل کرنے میں زمان و مکان کو کسی طرح نظر انداز نہیں کیا جاسکتا۔ سیاحی اور بحری تجارتی سفروں کے دوران میں ایسے مستوی نقشے استعمال ہونے لگے جن پر متوازی خطوں کے ذریعے مقاموں کے طویل بلد اور عرض بلد کو ظاہر کیا گیا تھا۔ نیز قطب نما کی مدد سے ایسے سمندروں پر بھی بحری سفر ممکن ہوئے جہاں بادلوں وغیرہ کی وجہ سے ستارے بہ مشکل دکھائی دیتے ہیں۔ قطب نما کی مدد سے سمت کے تعین اور ارضی اور ہیتی نقشوں کے استعمال نے دے کارت کے علم ہندسہ کی تشکیل کے لیے راستہ ہم وار کیا۔ سترھویں صدی کے اوائل میں دے کارت نے اس نئے ہندسہ تحلیلی کی مدد سے ایسے منحنیوں کی خاصیتیں معلوم کیں جو صرف پٹری اور پرکار سے نہیں بنائے جاسکتے۔ کوپرنیکس، ٹائیگوبراہی، کپلر اور گلیلیو نے صحیح پیمائشوں کے ذریعے یہ معلوم کیا کہ سیاروں کے مدار ناقص کی شکل کے (یعنی بیضوی) ہوتے ہیں نہ کہ افلاطون کے نظریے کے مطابق مستدیر۔ عمر خیام نے مخروطی تراشوں کی مدد سے تیسرے درجے کی مساوات کا حل دریافت کیا تھا اور بطلیموس نے طویل بلد اور عرض بلد کی مدد سے زمین کے نقشے تیار کیے تھے لیکن ہندسہ تحلیلی کا ہمہ گیر استعمال کا سہرا (جس سے ریاضی کی تاریخ میں ایک نیا دور شروع ہوتا ہے) دے کارت ہی کے سر ہے۔ ہماری روزمرہ زندگی میں تریسہات اس کثرت سے استعمال ہوتے ہیں کہ ہمیں تعجب ہوتا ہے کہ یہ اہم ایجاد اقلیدس کے زمانے سے سترھویں صدی تک کس وجہ سے ملتوی رہی لیکن ہمیں یہ بھی خیال رکھنا چاہیے کہ کسی زمانے کی ذہنی ترقی اس زمانے کے ماحول پر منحصر ہوتی ہے اور جب تک تمدنی ضرورتیں پیش نہیں آتیں

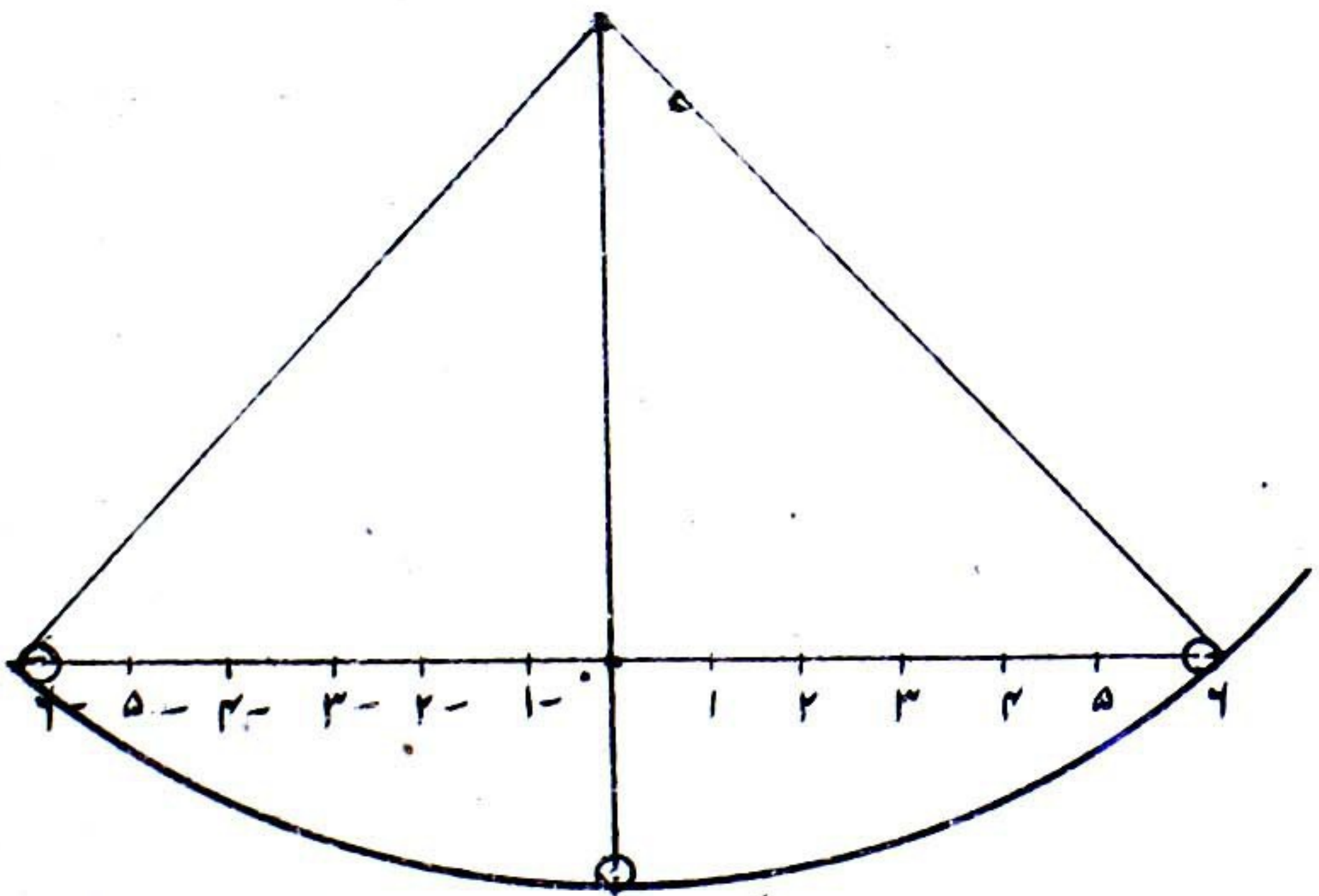
کوئی اہم ایجاد بھی وجود میں نہیں آتی۔ چنانچہ دے کارت کے زمانے میں ہندسہ تخلیقی کی ایجاد اس زمانے کی تمدنی ضرورتوں کے تحت عمل میں آئی۔

محل وقوع اور پیمائش۔ اقلیدسی اور دے کارتی علم ہندسہ میں ایک اصولی اختلاف یہ ہے کہ اقلیدسی علم ہندسہ میں محل وقوع کو کوئی اہمیت حاصل نہیں ہے۔ مثلاً ایک ہی طول والے مختلف خط جو مختلف مقاموں پر ہوں ایک دوسرے کے ہر طرح مساوی تصور کیے جاتے ہیں لیکن دے کارتی علم ہندسہ میں طول کے ساتھ خط کے محل وقوع اور خصوصاً اس کی سمت کو لازماً ملحوظ رکھا جاتا ہے۔ اگر ایک خط پر کے کسی ثابت نقطے سے ایک سمت میں ناپے ہوئے فاصلوں کو مثبت مانا جائے تو اس کی مخالف سمت میں ناپے ہوئے فاصلوں کو منفی ماننا پڑتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک سڑک پر چار مقام ۱، ب، ج، د ہیں۔ اگر ۱ سے ب کا



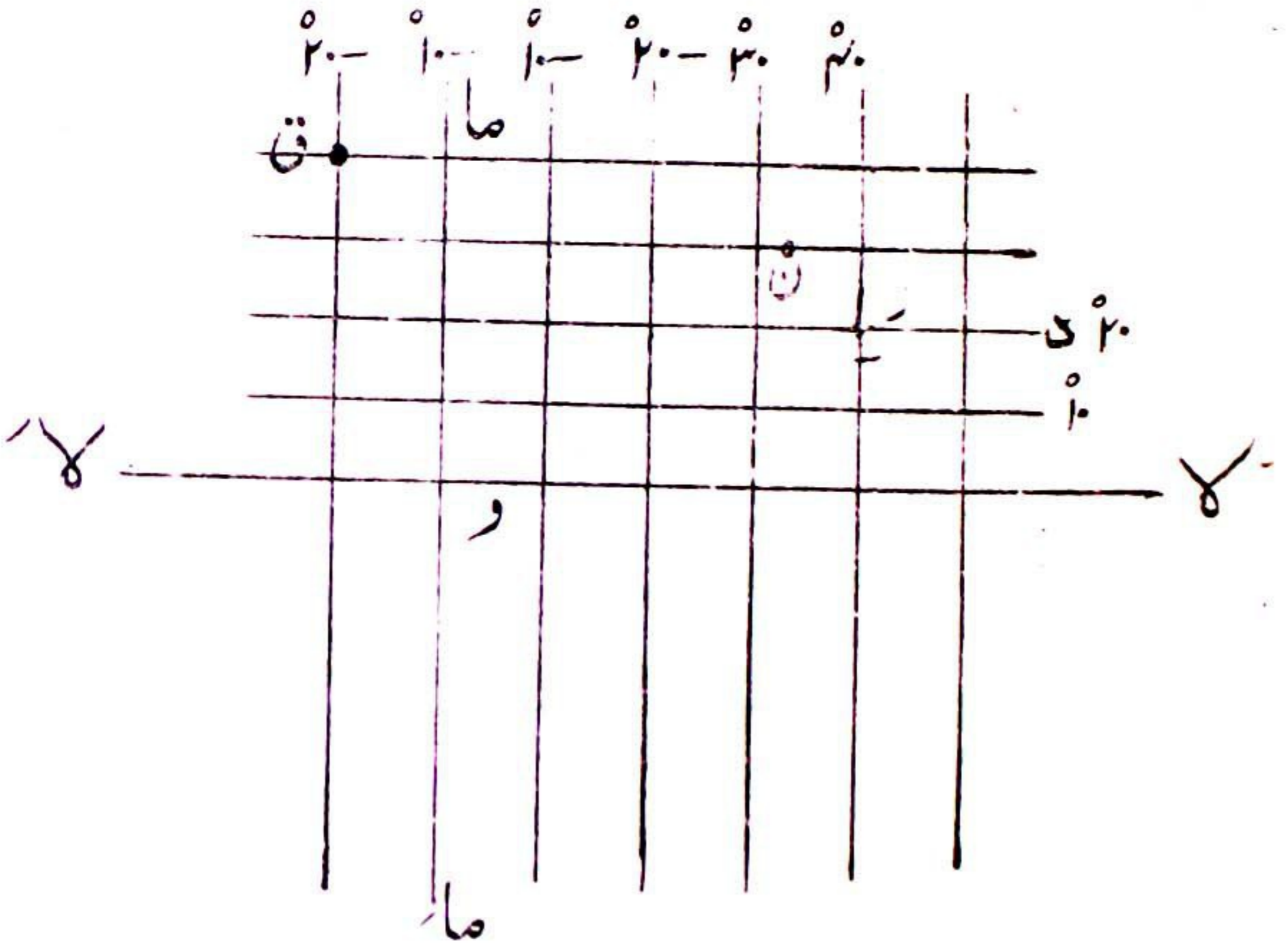
فاصلہ (۵۰) گز ہو اور ب سے ج کا فاصلہ (۶۰) گز ہو تو فاصلوں ۱ ب اور ب ج کو جو ایک ہی سمت میں ناپے گئے ہیں (۵۰ + ۶۰) گز اور (۶۰ + ۵۰) سے تعبیر کیا جائے گا۔ اگر ایک شخص ۱ سے ب تک پھر ب سے ج تک چلے تو اس کا طر شدہ فاصلہ = (۶۰ + ۵۰) گز = ۱۱۰ گز۔ اب اگر وہ ج سے ۵ تک یعنی مخالف سمت میں فاصلہ (۳۵) گز طر کرے۔ تو یہ فاصلہ (-۳۵) گز سے تعبیر کیا جائے گا اور اب ابتدائی مقام ۱ سے اس کا فاصلہ = (۳۵ - ۱۱۰) گز یعنی (-۷۵) گز ہوگا۔ یہی حال رفاص کی

حرکت (انہزاز) کا بھی ہے۔ اگر ہم رقاص کے ابتدائی مقام (یعنی حالت سکون کے مقام) سے ایک جانب کے فاصلوں کو مثبت (+) قرار دیں تو مخالف جانب کے فاصلوں کو منفی قرار دینا ہوگا۔ اگر رقاص مثبت جانب حرکت کرتا ہوا اپنے انتہائی مقام (+) پر پہنچے تو اس کے بعد رقاص کی حرکت منفی سمت میں ہوگی یعنی اس کا فاصلہ (+) سے گھٹتا ہوا صفر ہو جائے گا اور پھر صفر سے (-) جو منفی جانب رقاص کا انتہائی مقام ہے اور اس کے بعد رقاص پھر مثبت جانب حرکت کرنے لگے گا اور فاصلہ (-) سے صفر اور صفر سے (+) ہو جائے گا۔ اور یہی دوری (انہزاز) حرکت جاری رہے گی۔



ان مثالوں سے ظاہر ہوتا ہے کہ کس طرح پیمائش میں مثبت اور منفی عددوں کی ضرورت پیش آتی ہے۔
زمین کے مستوی نقطے۔ اگر ہم طویل بلد اور عرض بلد کے خطوں کے ذریعے زمین پر کے کسی مقام کو متعین کرنا چاہیں تو اسے ارضی اور

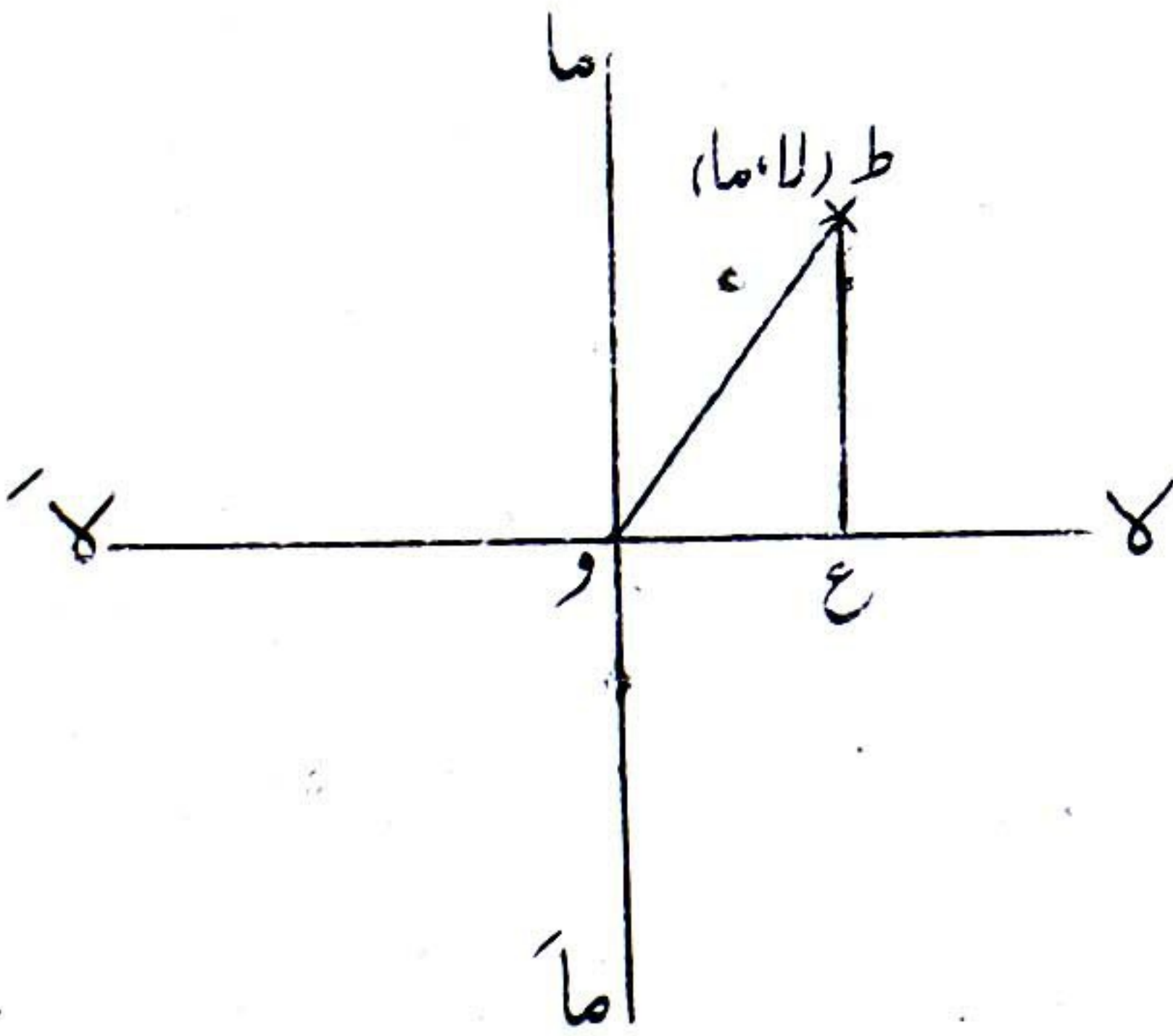
کسی خاص مقام مثلاً گریجویٹ میں سے گزرنے والے خط طویل بلد کو مستوی سطح پر خطوں کے ذریعے تعبیر کرتے ہیں۔ ان خطوں کا وکلا اور ما و ما کا نقطہ تقاطع و مبدأ کہلاتا ہے۔ عرض بلد کے خط، استوا کا وکلا کے متوازی کھینچے جاتے ہیں اور طویل بلد کے خط، ما و ما کے متوازی۔ نیز شمالی عرض بلد کو مثبت اور جنوبی عرض بلد کو منفی قرار دیا جاتا ہے اسی طرح مشرقی طویل بلد (۰ سے ۸۰ تک) کو مثبت اور مغربی طویل بلد (۰ سے ۱۸۰) کو منفی قرار دیا جاتا ہے۔ ان قرار دادوں کے مطابق کسی مقام کو جس کا طویل بلد اور عرض بلد معلوم ہو اس مستوی پر ایک نقطے کے ذریعے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔



مثلاً وہ مقام جس کا طویل بلد (۳۰ مشرق) اور عرض بلد (۲۰ شمال) ہے نقطہ ن سے تعبیر ہوتا ہے اور وہ مقام جس کا طویل بلد (۲۰ مغرب) اور عرض بلد (۲۰ شمال) ہے نقطہ ق سے تعبیر ہوتا ہے۔

ظاہر ہے کہ اس طرح سے کرہ ارض پر کے مقاموں کو مستوی سطح پر تعبیر کرنے میں کسی خطہ زمین کی شکل برقرار نہیں رہ سکتی۔ بالخصوص ایسا خطہ زمین جو قطبوں کے قریب ہو زیادہ پھیلا ہوا یعنی اپنی اصلی شکل سے زیادہ چوڑا معلوم ہوگا۔

بالعموم حوالے کے خطوں کا وکلا اور ما و ما کو جو مستوی سطح پر لیے جاتے ہیں۔ حوالے کے کا محور اور ما محور کہتے ہیں اور ان کے لحاظ سے کسی نقطہ کا مقام متعین کرنے کے لیے ط سے کا محور پر عمود ط ع نکالا جاتا ہے اور اگر و ع کا طویل مع علامت لا ہو اور



ع ط کا طویل مع علامت ما ہو تو عدد لا، ما نقطہ ط کے محدود کہلاتے ہیں فاصلوں و ع اور ع ط کو طویل کی ایک ہی اکائی کی رقوم میں مانا جاتا ہے چونکہ تمام فاصلے مبدا و سے ناپے جاتے ہیں۔ اس لیے و کے محدود (۰، ۰) ہوں گے۔

فرض کرو کہ و کو مرکز مان کر نصف قطر والا ایک دائرہ کھینچا گیا

ہر جس پر کا کوئی نقطہ ط (لا، ما، ہر) - و ط کو ملا کر قائم الزاویہ مثلث
 و ط ع پر غور کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ $(وع)^2 + (ع ط)^2 = (وط)^2$
 فیثاغورث کا مسئلہ۔ یا $لا^2 + ما^2 = را^2$

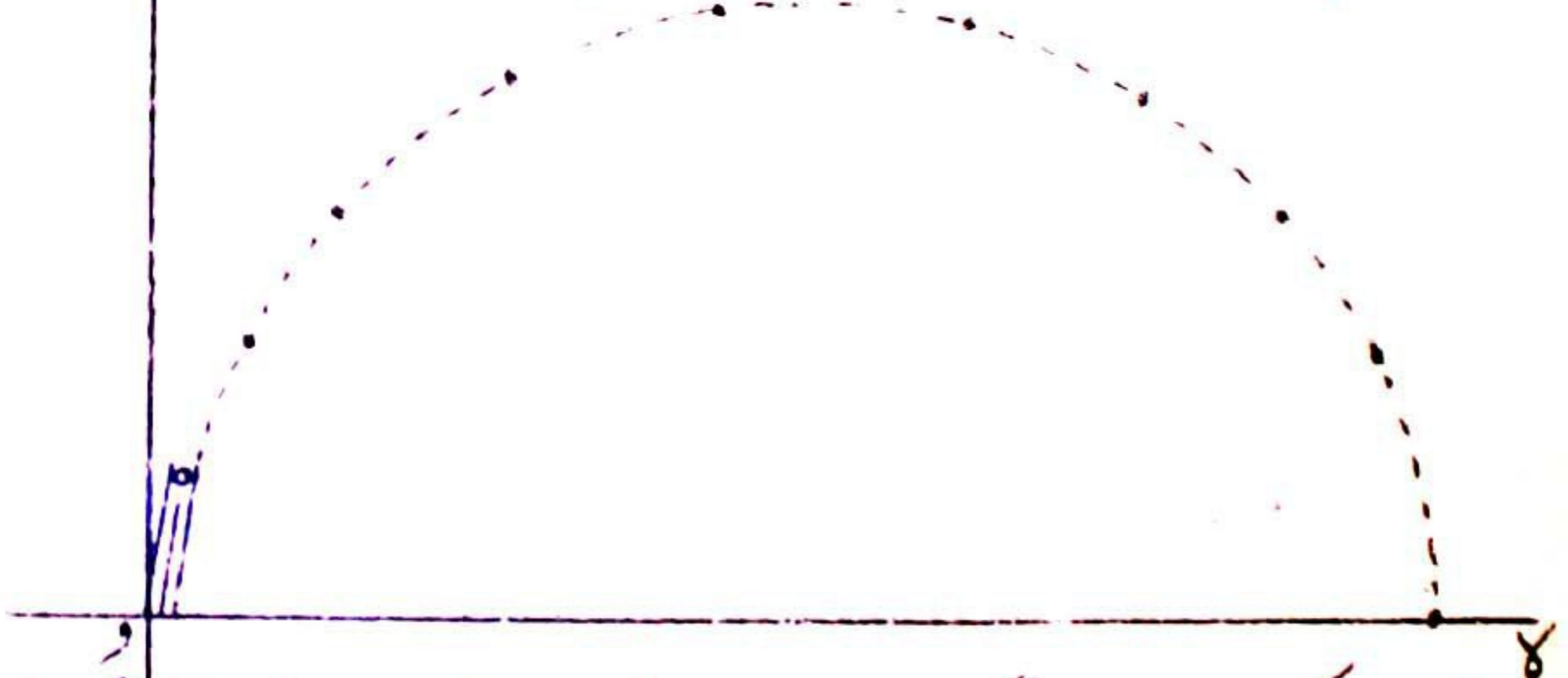
یہ رشتہ دائرے کے محیط پر نقطے کے لیے درست ہے اس لیے
 اس رشتے کو دائرے کی مساوات کہتے ہیں۔

پس معلوم ہوا کہ اس دائرے کی مساوات جس کا مرکز مبدا یعنی

نقطہ و پر ہے اور نصف قطر $ر$ ہے۔ $لا^2 + ما^2 = را^2$ ہے۔
 اسی طرح کسی متحرک نقطے کے طریق کی مساوات معلوم کی جاسکتی
 ہے جب کہ نقطے کی حرکت کا قانون معلوم ہو۔

توپ کے گولے کا طریق (یعنی راستہ) - اگر توپ کو کسی خاص میدان
 پر رکھ کر چلایا جائے تو وہی کارتی علم ہندسہ کی مدد سے ہم اس کا راستہ
 فضا میں متعین کر سکتے ہیں۔

فرض کر دو کہ لا محور افقی ہے اور مبدا و پر کسی خاص میدان



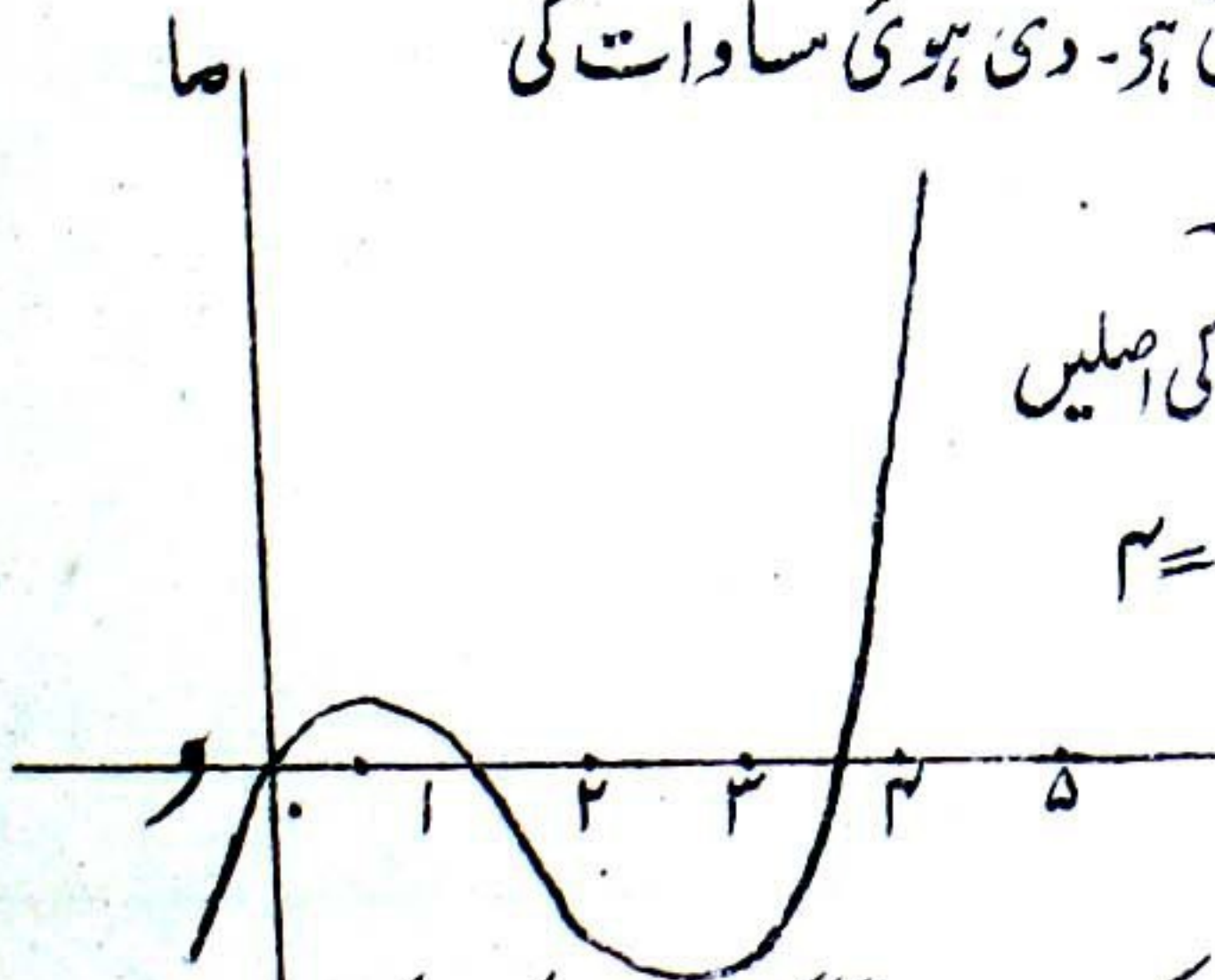
پر توپ رکھی ہوئی ہے اور گولہ چلایا جاتا ہے مختلف وقتوں پر توپ کے گولے
 کے مبدا سے افقی اور انتصابی فاصلے یعنی توپ کے گولے کے محور (لا، ما)
 معلوم کر کے ان نقطوں کو مرتسم (یعنی نشان زدہ) کیا جاسکتا ہے اور ان

نقطوں میں سے گزرنے والا منحنی خط توپ کے گولے کے راستے کو ظاہر کرتا ہے۔ اگر گولے کی ابتدائی رفتار s ہو اور افق سے توپ زاویہ θ بنا کر تو توپ کے گولے کا راستہ حسب ذیل مساوات سے تعبیر ہوتا ہے۔

$$y = x \tan \theta - \frac{g x^2}{2 v^2 \cos^2 \theta}$$

اگر s اور θ معلوم ہوں تو اس مساوات میں $y = 0$ درج کرنے سے وہ مقام معلوم ہوتا ہے جہاں توپ کا گولہ زمین پر گرتا ہے۔ اس مساوات کی شکل $y = 0$ - $y = 0$ کی ہے، ایسی مساواتوں سے تعبیر ہونے والے منحنی مکانی کہلاتے ہیں۔

اسی طرح کسی متحرک نقطے کے طریق کی مساوات دی جائے تو طریق مرتسم کیا جاسکتا ہے۔ نیز ترتیموں کی مدد سے مساواتیں بھی حل کی جاسکتی ہیں مثلاً اگر ہمیں مساوات $y = 0 = 5x^2 + 4x - 3$ حل کرنا ہو تو $y = 0$ - $y = 0$ کی ترتیم کھینچی جاتی ہے اور ان نقطوں کے لامحدود سے جہاں یہ ترتیم کا محور کو قطع کرتی ہے۔ دی ہوئی مساوات کی



اصلیں معلوم ہوتی ہیں۔

چنانچہ اس مساوات کی اصلیں

$$y = 0 = 5x^2 + 4x - 3$$

ترتیموں کی مدد سے

طبیعی قانون (یا کلا)،

بھی معلوم کیے جاسکتے ہیں۔ مثلاً اگر ہم ایک مکانی کو

کسی نقطے سے لٹکائیں اور اس کے نچلے سرے پر مختلف

وزن باندھ کر مکانی کے طول میں اضافے معلوم کریں تو وزن

اور طؤل کے اضافے کی ترسیم کھینچنے سے ان دونوں کا باہمی تعلق ظاہر ہوگا اگر وزن کو و اور کمائی کے طؤل کے اضافے کو ل سے تعبیر کیا جائے تو یہ رشتہ مساوات و یک ل سے ظاہر ہوتا ہے۔ اس رشتے کی مدد سے و کی مختلف قیمتوں کے جواب میں ل معلوم ہوتا ہے۔ کمائی دار نراز و اسی اصول پر بنائی گئی ہے۔ مختلف کمائیوں پر سب بالاجبر بے کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ک کی قیمت کمائی کی موٹائی اور اس کی دعوات پر منحصر ہے۔ مختلف موٹائیوں کے لیے ک کی قیمتیں معلوم کر کے موٹائی اور ک میں رشتہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ ک کو کمائی کی لچک کی قدر یا لچک کا مستقل کہتے ہیں۔

ترسیمات نہ صرف طبیعی علوم میں بلکہ عمرانی علوم میں بھی بہت کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔ جس طرح ایک کارٹون کسی سیاسی نقطہ نظر کو تحریر کے سیکڑوں صفحات کی نسبت زیادہ وضاحت سے پیش کرتا ہے، اسی طرح ترسیمیں (جو دراصل ریاضی کے کارٹون ہیں) بیک نظر دو بدلنے والی مقداروں کے باہمی تعلق کو جبر و مقابلہ کے سیکڑوں صفحات سے زیادہ واضح طور پر پیش کرتی ہیں۔ مثلاً اگر کسی صحت و ریتے کے وزن اور عمر کے تعلق کو ترسیمی طور پر تعبیر کیا جائے تو مختلف بچوں کی عمروں اور وزنوں کا مقابلہ اس ترسیم سے کر کے معلوم ہو سکتا ہے کہ یہ دوسرے بچے صحت ور ہیں یا نہیں؟ اسی طرح کسی قوم میں مجرموں کی تعداد اور بے روزگاریوں کی تعداد کی ترسیم کھینچی جائے تو یہ واضح ہوتا ہے کہ بے روزگاری کا تعلق جرائم سے کس حد تک ہے۔

دی کارتی ہندسہ کی کوتاہیاں۔ اس کتاب میں ہم نے ریاضی اور اس کے کارآمد اطلاقات پر بحث کرنے اور ان کو واضح کرنے کی کوشش

کی ہر اور اس سلسلے میں اس باب میں یہ بھی بتایا ہے کہ دی کارتی ہندسہ نے اقلیدسی ہندسہ کی کوتاہیوں میں سے ایک کو کس طرح دوز کیا یعنی نقطوں اور خطوں کے مقام کو ملحوظ رکھا جسے اقلیدسی ہندسہ نے نظر انداز کر دیا تھا لیکن اس بنا پر یہ خیال درست نہیں کہ دی کارتی ہندسہ میں کوئی خامی نہیں۔ دی کارتی تریسہوں سے توپ کے گولے، ہوائی جہاز اور آب دوز کشتی کے طریق تو معلوم ہوتے ہیں لیکن ان کے مقام اور وقت کا باہمی رشتہ واضح نہیں ہوتا۔ اسی طرح کسی خاص آن میں رقاص کا مقام معلوم ہو سکتا ہے۔ لیکن تریسم سے رقاص کے ان مقاموں کا پتا نہیں چلتا جو ابتدائی مشاہدے (یعنی وقت = ۱۰) سے قبل تھے۔ چوں کہ جدید طبیعیات کیمیا، حیاتیات وغیرہ میں زیادہ تر وقت کے لحاظ سے دوسری مقداروں کی تبدیلی اور تغیر پر غور کیا جاتا ہے۔ اس لیے ان علوم میں وقت اور شرح تبدیلی کو بڑی اہمیت حاصل ہے۔ اس لیے ایسی ریاضی کی ضرورت پیش آتی ہے جو ان مسئلوں (یعنی تغیر کی شرح وغیرہ) پر کافی روشنی ڈال سکے۔ ریاضیات کی اس کارآمد شاخ اور اس کے عملی اطلاقات پر آگے بحث کی گئی ہے۔



دسواں باب

لوکارتم کی ایجاد اور ان کا استعمال

اسکندریہ کے تمدن میں جدید ریاضی کی تین اہم شاخوں یعنی صغاری احصاء، ہندسہ خلیلی اور لوکارتم کے اساسی تصورات پائے جاتے ہیں۔ ہندسہ خلیلی کے متعلق ہم گزشتہ باب میں بحث کر چکے ہیں اور صغاری احصاء کے متعلق آئندہ باب میں بحث کریں گے۔ یہاں صرف یہ بتلانا مقصود ہے کہ لوکارتموں کی ایجاد کن حسابی ضرورتوں کے تحت ہوئی اور ان کے استعمال سے حسابی عمل میں کس طرح آسانی پیدا ہوتی ہے۔

(اسکندریہ کے ریاضی دانوں کو جہاز رانی اور بڑھتی ہوئی تجارت کے سلسلے میں طولانی اور پیچیدہ حساب کی ضرورت پیش آتی تھی۔ اس لیے انھوں نے حساب کے آسان طریقوں کے متعلق تحقیقات کی جن کے نتیجے کے طور پر لوکارتموں کے متعلق اساسی تصور تشکیل پائے۔ البتہ لوکارتمی جدولوں کی تدوین کا کام سترھویں صدی میں مکمل کیا اور اس کے بعد حساب میں لوکارتم عام طور پر استعمال ہونے لگے)

ہمیں معلوم ہے کہ $10 = 10$ ، $100 = 10^2$ ، $1000 = 10^3$ ، $10000 = 10^4$ ۔ ان نتیجوں کی بنا پر یہ کہا جاتا ہے کہ (۱۰) کا لوکارتم (اساس ۱۰ پر) ۱، ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ کا لوکارتم ۲ ہے، ۱۰۰۰ کا لوکارتم ۳ ہے اور (۱۰۰۰۰) کا لوکارتم ۴ ہے۔

فرض کرو کہ ہم نے کسی طرح سے ۱ سے (۱۰۰۰۰) تک تمام عددوں کے لوکارتم (اساس ۱۰ پر) معلوم کر لیے ہیں اور انھیں ایک جدول کی شکل میں مرتب کر لیا ہے۔ جدول میں لوکارتم کا صرف کسری حصہ دیا جاتا ہے۔ (اعداد کے لوکارتم معلوم کرنے کے طریقے کی تشریح آئندہ کی جائے گی۔) اب اگر ہمیں کسی عدد کا لوکارتم معلوم ہو تو لوکارتموں کی جدول سے عدد معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اس عدد کو جس کا لوکارتم لا ہے۔ 'ضد لوکارتم' کہتے ہیں۔ ضد لوکارتم کے لیے بھی جدولیں مرتب ہو سکتی ہیں۔ ذیل کی مثالوں سے لوکارتمی جدولوں کا عملی فائدہ واضح ہوگا۔

فرض کرو کہ ہمیں ۵ فی صد سالانہ سود مرکب کی شرح سے ۲۰۰ روپے کا زرکل ۱۴ سال کے ختم پر معلوم کرنا ہے سادہ حسابی طریقہ حسب ذیل ہوگا۔

اصل = ۲۰۰، شرح سود = ۵ فی صد فی سال، مدت ۱۴ سال

$$\therefore \text{ایک سال کے ختم پر زرکل} \times \frac{105}{100} = 200 \times 1.05$$

اسی طرح دوسرے سال کے ختم پر زرکل = $200 \times (1.05 \times 1.05)$

$$= 200 \times (1.05)^2$$

اسی طرح تیسرے سال کے ختم پر زرکل = $200 \times (1.05)^3$

اسی طرح کا عمل کرنے سے ۱۴ سال کے ختم پر زرکل = $200 \times (1.05)^{14}$

اس کو معمولی ضرب کے طریقے سے محسوب کرنے کا عمل نہایت

طولانی ہے۔ اگر مدت ۱۴ سال سے بھی زیادہ مثلاً (۱۰۰) سال ہو تو یہ

حسابی عمل اس قدر طولانی ہو جائے گا کہ زیر کلمہ

محسوب کرنا تقریباً ناممکن ہوگا۔ اس کی بجائے لوکارتموں کے استعمال

سے زرکل مثلاً $200 \times (1.05)^{14}$ کی قیمت آسانی سے معلوم کی جاسکتی ہے۔

فرض کرو کہ $۲۰۰ \times (۱۰۰.۵) = ۱۳$ ت
 تب اوپر کے لوکارتمی ضابطوں کی رؤ سے لوک ت = لوک (۲۰۰)
 $+ لوک [(۱۰۰.۵)] = لوک (۲۰۰) + ۱۳ \times لوک (۱۰۰.۵)$

جدول سے لوک $۲۰۰ = ۱.۳۰۱۰$

لوک $۱۰۰.۵ = ۰.۲۱۲$

$۱۳ \times لوک ۱۰۰.۵ = ۰.۲۹۶۸$

∴ لوک ت = $۱.۳۰۱۰ + ۰.۲۹۶۸ = ۱.۵۹۷۸$

∴ جدول سے ت = ۳۹۶۱

پس معلوم ہوا کہ مطلوبہ زر کل = ۳۹۶ رُپڑ تقریباً

اگر ت ۱۰۰ سال لی جائے تو زر کل یعنی $۲۰۰ \times (۱۰۰.۵)$ کی قیمت
 اسی طریقے سے (۲۶۳۶) رُپڑ حاصل ہوتی ہے۔

جدولوں میں صرف صحیح عددوں کے لوکارتم درج ہوتے ہیں لیکن
 کسی کسر واجب کے لوکارتم بھی حسب ذیل طریقے سے آسانی سے نکالے
 جا سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ ہمیں (۰.۲۲۳) کا لوکارتم معلوم کرنا ہے چوں کہ
 $۰.۲۲۳ = \frac{۲۲۳}{۱۰۰۰}$ اس لیے لوک $۰.۲۲۳ = لوک ۲۲۳ - لوک ۱۰۰۰$

= لوک $۲۲۳ - ۳$

∴ جدول سے لوک ۲۲۳ معلوم کر کے لوک ۰.۲۲۳ معلوم کیا جاسکتا ہے

لوکارتموں کی مدد سے عددوں کے حاصل ضرب اور حاصل تقسیم آسانی

سے معلوم کیے جاسکتے ہیں۔ مثلاً $\frac{۵۳۹ \times ۲۲۳}{۱۶۲۱}$ کی تقریبی قیمت (ت)

معلوم کرنی ہو تو لوک ت = لوک $۵۳۹ + لوک ۲۲۳ - لوک ۱۶۲۱$

= $۰.۷۳۰ + (۰.۳۴۹ - ۱.۲۰۹۸)$

= ۰.۸۶۹۲

یعنی لوگ ت ۱ اور $\frac{1}{3}$ کے درمیان ہے۔
 ضد لوکارتم کے جدول سے، ت = ۳۰۹۷
 معمولی ضرب اور تقسیم کے عمل کے ساتھ اس عمل کا مقابلہ کیا جائے تو لوکارتم
 کے استعمال کی سہولت بہ خوبی واضح ہوتی ہے۔

لوکارتمی جدولوں کی مدد سے عددوں کے جذر، جد الکعب وغیرہ بھی
 محسوب کیے جاسکتے ہیں۔ مثلاً (۱) $13^3 = 2197$ ت = $\frac{1}{3}$ فرض کرو

$$\therefore \text{لوگ ت} = \frac{1}{3} \text{ لوگ } 13$$

$$= \frac{1}{3} \times 1.1139 = 0.3713$$

$$\therefore \text{ت} = 2.352$$

نوٹ۔ ضرب سے آسانی سے تصدیق کی جاسکتی ہے کہ (۲۳۵۲) $3^3 =$
 تقریباً ۱۳

(۲) $24^3 = 13824$ محسوب کرو (یعنی ۲۴ کے مربع کا ۵ واں جذر محسوب کرو)
 فرض کرو کہ ت = $\frac{2}{5}$ (۲۴)

$$\text{لوگ ت} = \frac{2}{5} \text{ لوگ } 24 = 0.3713 \times 2 = 0.7426$$

$$= 5.422 \text{ تقریباً، } \therefore \text{ت} = 3.435$$

ہم احصا کا حسب ذیل ضابطہ (بغیر ثبوت کے) مان لیتے ہیں۔

$$\text{لوگ } (1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \dots$$

جب کہ لا کی عددی قیمت ایک سے چھوٹی ہو۔

$$\text{مثلاً اگر } n = \frac{1}{3}$$

$$\text{تو لوگ } (1 + \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{18} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \dots$$

$$\text{یعنی لوگ } (1.333) = 0.3713 \text{ تقریباً}$$

اس طرح لا کی مختلف قیمتوں کے لیے (جو ایک سے کم ہیں) لوک $(۱ + لا)$ کی قیمت محسوب کر کے لوکارتموں کی جدولیں مرتب کی جاتی ہیں۔

اگر ہمیں اوپر کے ضابطے کی مدد سے لوک (۱۴۱۲) محسوب کرنا ہو تو

$$\text{لوک } ۱۴۱۲ = \text{لوک } (۱۴۱۲ \times ۱۰۰۰)$$

$$= \text{لوک } ۱۴۱۲ + ۱۰۰۰$$

$$= \text{لوک } ۱۴۱۲ + ۳$$

اب $لا = ۱۴۱۲$ لینے سے لوک $(۱ + لا) = \text{لوک } ۱۴۱۲$ محسوب

ہو سکتا ہے۔ چنانچہ لوک $۱۴۱۲ = ۱۴۹۸$

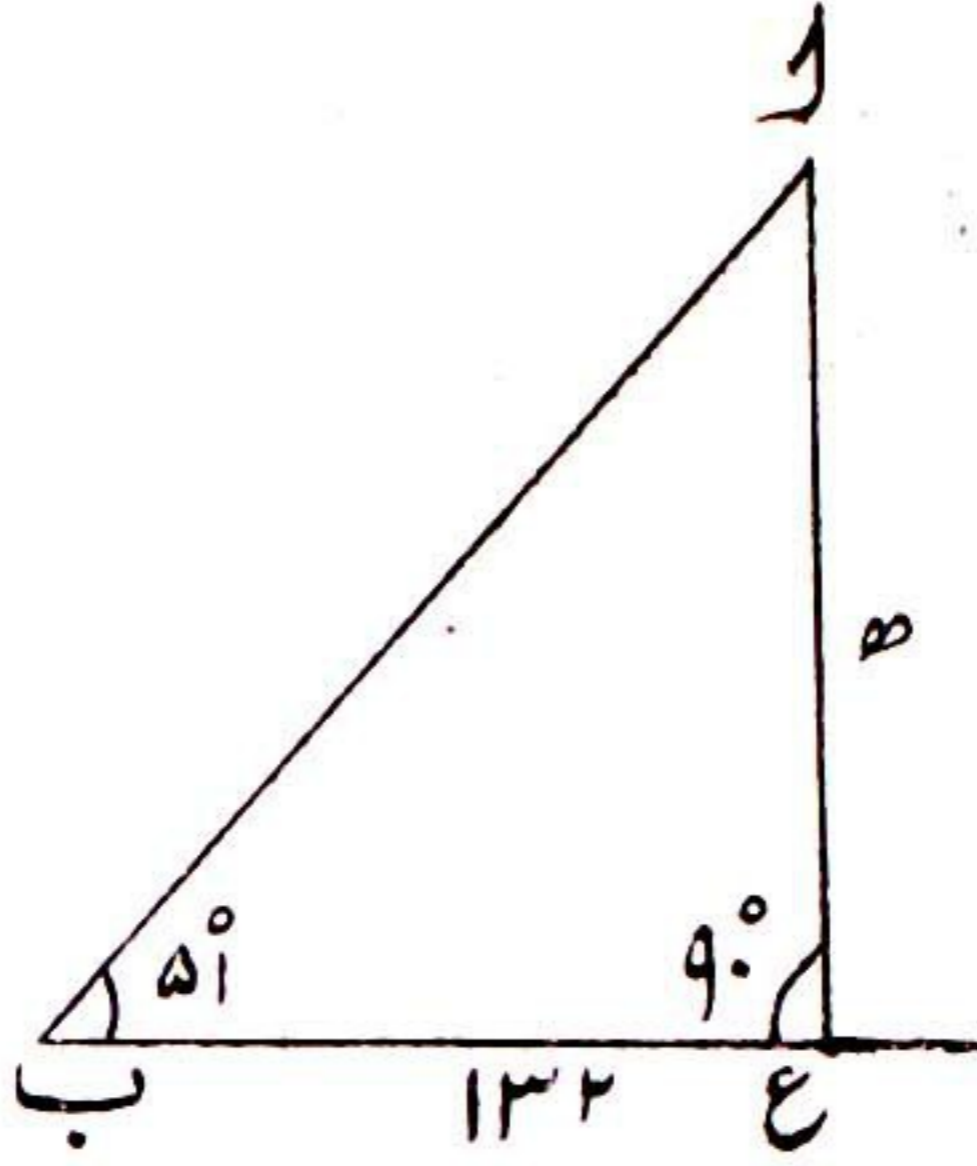
$$\therefore \text{لوک } ۱۴۱۲ = ۳۱۴۹۸$$

نوٹ۔ اگر لا کی عددی قیمت کافی چھوٹی نہ ہو تو اوپر کے سلسلے میں رقموں کی تعداد زیادہ یعنی ہوگی۔ تاکہ زیادہ صحت سے جواب حاصل ہو سکے۔ حسابی عمل کو آسان کرنے کے لیے مختلف ترکیبیں اختیار کی جاتی ہیں جن کا ذکر اس کتاب کی حدوں سے باہر ہے۔

پیمائش اور جہاز رانی کے حسابوں میں اختصار اور آسانی پیدا کرنے کے لیے لوکارتمی جدولیں بہت مفید ثابت ہوتی ہیں۔ اس غرض سے مثلثی نسبتوں (جیب، جیب التمام، مماس وغیرہ) کے لوکارتموں کی جدولیں مرتب کی جاتی ہیں اور ان کی مدد سے مستوی مثلثوں اور کروی مثلثوں کو حل کیا جاتا ہے۔

مثال ۱۔ فرض کرو کہ افقی سطح پر ایک مینار ہے جس کی بلندی معلوم کرتا ہے۔ اگر مینار کے پائین سے ۱۳۲ فٹ کے فاصلے پر مینار کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۵۰° ہو تو مینار کی بلندی معلوم کرو۔

منسلک شکل سے مینار کی بلندی $h = b \times \sin 5^\circ$
 $h = 132 \times \sin 5^\circ$



لوکارتموں اور ماسوں کے لوکارتموں کی جدولوں سے

$$\text{لوک } 132 = 2.1206$$

$$\text{لوک } \sin 5^\circ = 0.916$$

$$\therefore \text{لوک } h = \text{لوک } (132) + \text{لوک } (\sin 5^\circ)$$

$$= 2.1206 + 0.916$$

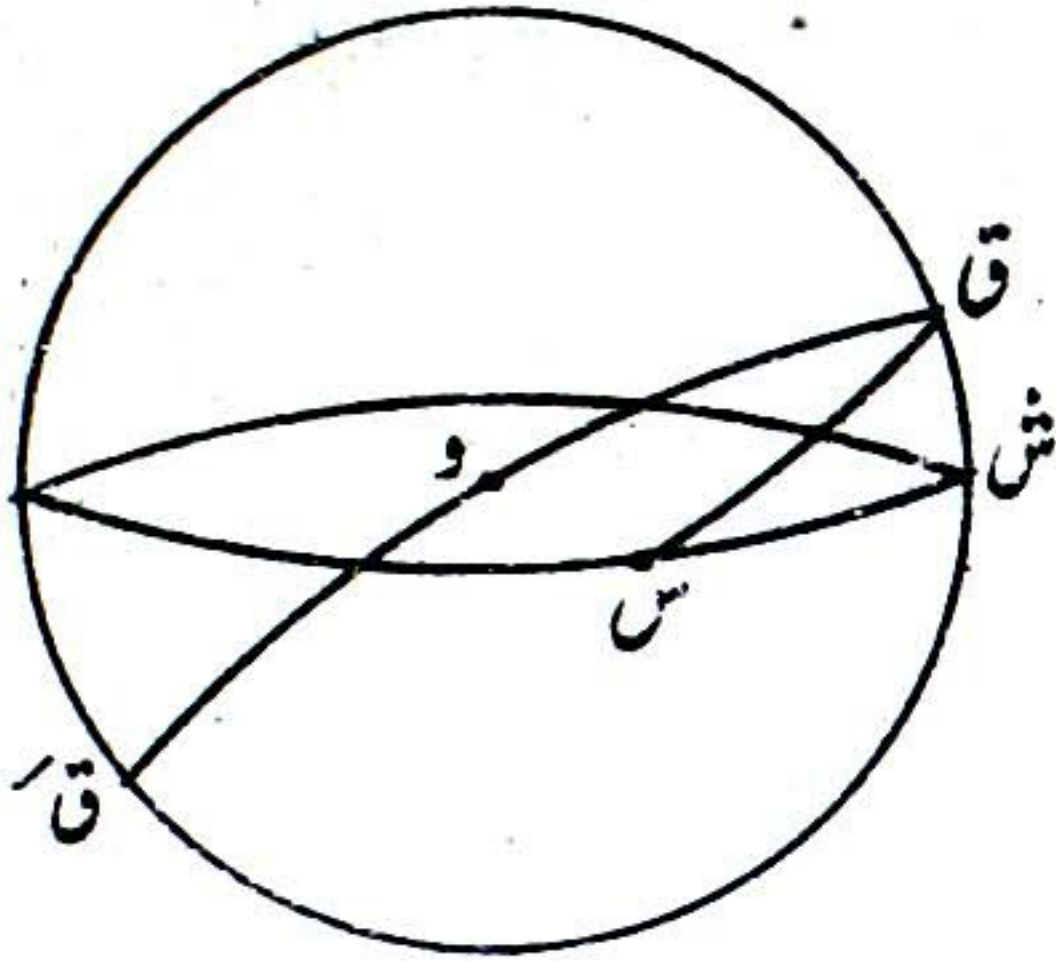
$$= 3.0366$$

$$\therefore h = 143$$

یعنی مینار کی بلندی تقریباً ۱۴۳ فٹ ہے۔

مثال ۲۔ فرض کرو کہ ایک ایسے مقام پر جس کا عرض بلد 14° ہے۔ ہمیں سورج کے طلوع کی سمت معلوم کرنی ہے جب کہ سورج کا شمالی میل 21° ہو۔

اگر سماوی قطب شمالی ق، شمال کا نقطہ نش اور طلوع کے وقت افق پر سورج کا مقام س ہو تو کروی مثلث ق ش س میں ش پر



قائمہ زاویہ ہواور ش ق = مقام مشاہدے کا عرض بلد = $۱۷ \frac{1}{4}^\circ$

ق س = سورج کا قطبی فاصلہ = $۹۰^\circ - ۹^\circ = ۸۱^\circ$

جم ق س = جم ق ش + جم ش س + جب ق ش جب ش س + جم ق ش س

جم ۶۹ = جم $(۱۷ \frac{1}{4}^\circ)$ جم ش س + صفر (کیوں کہ ق ش س = ۹۰°)

∴ جم ش س = جم $(۱۷ \frac{1}{4}^\circ)$ = $\frac{۶۹}{۴۲ \frac{1}{4}^\circ}$ = $\frac{۲۱}{۴۲ \frac{1}{4}^\circ}$ (کیوں کہ جم (۹۰ - ط) = جب ط)

∴ لوک جم ش س = لوک جب ۲۱ - لوک جب $۴۲ \frac{1}{4}^\circ$

لوک جب (۹۰ - ش س) = (۱ - ۵۵۲۳) - (۱ - ۹۷۹۴) =

$۲۰۶ + (۱ - ۵۵۲۳) =$

$۱ - ۵۲۷۹ =$

∴ (۹۰ - ش س) = ۱۰۲° تقریباً

∴ ش س = ۱۹۰۶۹° تقریباً

یعنی سورج کا مقام طلوع مشرق کے نقطے سے ۱۰۲° شمال کی طرف

ہوگا۔

نوٹ - لوکارتوں کی مدد سے حسابی عمل کرنے کے لیے کم از کم

اعشاریہ کے چار مقاموں والی لوکارتی اور مثلثی جدولوں کا رکھنا اور

استعمال کرنا ضروری ہے۔ ایسی جدولیں (انگریزی ہندسوں میں) بہ آسانی دست یاب ہو سکتی ہیں۔

یاد رکھنے کی باتیں۔

(۱) متعدد عددوں کے حاصل ضرب کا لوکارتم، ان کے لوکارتموں کا مجموعہ ہوتا ہے اور دو عددوں کے حاصل تقسیم کا لوکارتم ان کے لوکارتموں کا حاصل تفریق ہوتا ہے اور $لا \times لوک = لا$ کا لوکارتم $لا$ لوک $لا$

(۲) لوک $(لا + ۱) = ۲۳۲۳$ $(لا - ۱) = ۲۳۲۳$ $(لا - ۱) = ۲۳۲۳$ $(لا - ۱) = ۲۳۲۳$

(۳) لوکارتمی جدولوں میں لوکارتموں کا صرف کسری حصہ دیا جاتا ہے۔ صحیح حصہ آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کیوں کہ لوک $۱ = ۱۰$ ، لوک $۲ = ۱۰۰$ لوک $۳ = ۱۰۰۰$

(۴) ایک سے چھوٹے عدد کے لوکارتم معلوم کرنا ہو تو اس عدد کو ۱۰ یا ۱۰۰ وغیرہ یا ۱۰۰۰ سے حسب ضرورت ضرب اور تقسیم کر کے مندرجہ بالا قاعدے استعمال کیے جا سکتے ہیں۔

(۵) جدولوں میں اگر کسی عدد کا لوکارتم ۲۵۶۷ یا ۳ دیا ہوا ہو تو اس سے مراد ہے کہ لوکارتم $۲۵۶۷ = ۳$ یعنی لوکارتم کا کسری حصہ ہمیشہ مثبت دیا جاتا ہے اور صحیح حصہ حسب ضرورت مثبت یا منفی اور منفی ہونے کی صورت میں منفی کی علامت صحیح حصے کے اوپر لگائی جاتی ہے۔

ہماری زبان

انجمن ترقی اُردو (ہند) کا پندرہ روزہ اخبار

ہر مہینے کی پہلی اور سوٹھویں تاریخ کو شائع ہوتا ہے
چندہ سالانہ ایک رُپیہ فی پرچہ ایک آنہ

اُردو

انجمن ترقی اُردو (ہند) کا سہ ماہی رسالہ

جنوری، اپریل، جولائی اور اکتوبر میں شائع ہوتا ہے
اس میں ادب اور زبان کے ہر پہلو پر بحث کی جاتی ہے۔ تنقیدی اور محققانہ مضامین خاص
امتیاز رکھتے ہیں۔ اُردو میں جو کتابیں شائع ہوتی ہیں، اُن پر تبصرہ اس رسالے کی ایک خصوصیت ہے۔
اس کا حجم ڈیڑھ سو صفحے یا اس سے زیادہ ہوتا ہے۔ قیمت سالانہ محصول ڈاک وغیرہ ملا کر سات رُپے
سکہ انگریزی (آٹھ رُپے سکہ عثمانیہ) نمونے کی قیمت ایک رُپیہ بارہ آنے (دو رُپے سکہ عثمانیہ)

رسالہ سائنس

انجمن ترقی اُردو (ہند) کا ماہانہ رسالہ

(ہر انگریزی مہینے کی پہلی تاریخ کو جامعہ عثمانیہ حیدرآباد سے شائع ہوتا ہے)
اس کا مقصد یہ ہے کہ سائنس کے مسائل اور خیالات کو اُردو ذوالوں میں مقبول کیا جائے۔
دُنیا میں سائنس کے متعلق جو جدید انکشافات وقتاً فوقتاً ہوتے ہیں، یا بخشیں یا ایجادیں ہو رہی ہیں
ان کو کسی قدر تفصیل سے بیان کیا جاتا ہے اور ان تمام مسائل کو حتی الامکان صاف اور سلیس
زبان میں ادا کرنے کی کوشش کی جاتی ہے۔ اس سے اُردو زبان کی ترقی اور اہل وطن کے
خیالات میں روشنی اور وسعت پیدا کرنا مقصود ہے۔ رسالے میں متعدد بلاک بھی شائع
ہوتے ہیں۔ قیمت سالانہ صرف پانچ رُپے سکہ انگریزی (چھو رُپے سکہ عثمانیہ)
خط و کتابت کا پتہ: معتمد مجلس ادارت رسالہ سائنس، جامعہ عثمانیہ حیدرآباد۔ دکن

انجمن ترقی اُردو (ہند) دہلی

اشوک اعظم



یہ کتاب ڈاکٹر محمد حفیظ سید ایم اے، پی ایچ ڈی، ڈی لٹ، ایل ڈی
نے بڑی تحقیق سے لکھی ہے اس میں صرف اشوک کے حالات ہی نہیں
بلکہ نظم مملکت، مذہب، معاشرت اور اس وقت کی تہذیب و تمدن کا بھی
تذکرہ ہے۔ قیمت مجلد دو روپے آٹھ آنے بلا جلد ایک روپیہ آٹھ آنے

جائزہ زبان اردو

۱۹۳۵ء میں زبان اردو کا جائزہ لینے کی تجویز کی گئی تھی۔ اس کے
مطابق مسلسل چار سال تک کام ہوتا رہا۔ سر دست پہلا حصہ شائع
کیا گیا ہے۔ جس میں ریاست ہائے راج پوتانہ کے حالات درج ہیں جو
نہایت عبرت انگیز ہیں۔ قیمت مجلد دو روپے بلا جلد ایک روپیہ آٹھ آنے۔

میںچراغ نجم ترقی اردو رہنما اور دریا گنج۔ دہلی