المملكة العربية السعودية
وزارة المعارف
قامت وزارة المعارف بطبعه وقررت تدريسه بمدارسها الثانوية

الهندسة

للسنة الأولى الثانوية

تأليف

فؤاد جاب الله حسان　　　محمد محمد عباس

الطبعة الثالثة
١٣٨٧ هـ - ١٩٦٧ م

يوزع مجانا
وأية نسخة تباع تعتبر مسروقة

المملكة العربية السعودية
وزارة المعارف
قامت وزارة المعارف بطبعه وقررت تدريسه بمدارسها الثانوية

الهندسة

للسنة الأولى الثانوية

تأليف

فؤاد جاب الله حسان
محمد محمد عباس

الطبعة الثالثة
١٣٨٧ هـ - ١٩٦٧ م

يوزع مجانا
وأية نسخة تباع تعتبر مسروقة

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدّمة

تلبية لرغبة وزارة المعارف الجليلة في أن تكون كتب العلوم والرياضيات مطابقة لمنهاج مدارسها الثانوية وخالية من الاخطاء في مادتها العلميـة وأشكالها ومترابطة في أجزائها فقد قامت اللجان [التي عهدت اليها الوزارة بمراجعة هذه الكتب] والمتألفة من بعض الاساتذة أعضاء هيئة التدريس بكلية العلوم بجامعة الرياض وبعض مفتشي ومدرسي وزارة المعارف بالمهمة التي اسندت اليها خير قيام باذلة في ذلك ما استطاعت من جهد لتحقيق الغاية التي هدفت اليها الوزارة لرفع مستوى التعليم مراعية في ذلك النقاط التالية :

١ – مطابقة الكتب لمنهاج وزارة المعارف .

٢ – تصحيح المادة العلمية والاشكال والاخطاء المطبعية .

٣ – تنسيق المادة الواحدة خلال السنوات المختلفة بحيث تكون مترابطة في أجزائها. هذا وقد عدلت اللجنة المختصة الكثيرمن الفقرات وأحياناً مواضيع بأكملها وذلك اما لوجود أخطاء علمية فيها أو لغموض في أسلوبها .

وتأمل اللجان أن تكون الكتب بعد إجراء هـذه التصحيحات أكثر ملاءمة مما كانت عليه وبحيث تكون أكثر فائدة للطالب .

والله ولي التوفيق .

لجان المراجعة

منهج الهندسة

١ – مقياس الرسم : التكبير والتصغير – معنى التشابه وتطبيقات عملية على ذلك يقتصر فيها على المثلث والشكل الرباعي .

٢ – نظرية فيثاغورث وعكسها – تطبيقات سهلة على ذلك .

٣ – المحل الهندسي في الحالات الآتية :

ا – نقطة بعدها عن نقطة ثابتة أو مستقيم معلوم يساوي طولاً معلوماً .

ب – نقطة على بعدين متساويين من نقطتين معلومتين .

حـ – نقطة على بعدين متساويين من مستقيمين متقاطعين أو متوازيين ودراسة النظريتين الآتيتين :

١ – الأعمدة المقامة على أضلاع المثلث من منتصفاتها تتلاقى في نقطة واحدة هي مركز الدائرة التي تمر برؤوسه .

٢ – منصفات زوايا المثلث تتلاقى في نقطة واحدة .

ويحسن استخدام فكرة المحل الهندسي في إثباتها وفي إثبات النظريات التالية والتمرينات كلما أمكن ذلك .

٤ – دراسة النظريات الآتية في الدائرة :

المستقيم الواصل من مركز الدائرة إلى منتصف الوتر يكون عموداً عليه .
العمود المرسوم من المركز على الوتر ينصفه .

كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة تعين دائرة واحدة تمر بها .
الأوتار المتساوية تكون على أبعاد متساوية من المركز والأوتار التي على

أبعاد متساوية من المركز تكون متساوية .

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين عمود على الوتر المشترك وينصفه .

الزاوية المركزية ضعف الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس.

الزوايا المرسومة في قطعة واحدة من دائرة متساوية .

إذا تساوت زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها يمكن أن يمر برأسها محيط دائرة تكون هذه القاعدة وتراً فيها .

الزاوية المرسومة في نصف دائرة قائمة .

الزاويتان المتقابلتان في الشكل الرباعي الدائري متكاملتان .

إذا كانت الزاويتان المتقابلتان في الشكل الرباعي متكاملتين كان هذا الشكل رباعياً دائرياً .

٥ - ارتفاعات المثلث تتلاقى في نقطة واحدة .

٦ - في الدوائر المتساوية أو في نفس الدائرة إذا تساوت الزوايا المركزية تساوت أقواسها .

في الدوائر المتساوية أو في نفس الدائرة إذا تساوت الأقواس تساوت زواياها المركزية .

في الدوائر المتساوية أو في نفس الدائرة إذا تساوت الأوتار تساوت أقواسها (الأصغر للأصغر والأكبر للأكبر) .

المماس يكون عموداً على نصف القطر المار بنقطة التماس .

المماسان المرسومان من نقطة خارج دائرة متساويان .

نقطة تماس دائرتين تقع على خط المركزين .

الزاوية المحصورة بين المماس والوتر المار بنقطة التماس تساوي الزاوية المحيطية المقابلة لهذا الوتر من الجهة الأخرى - وعكسها .

٧ - دراسة العمليات الآتية :

رسم دائرة خارج وداخل مثلث .

رسم مماس لدائرة من نقطة خارجها .

الباب الاول

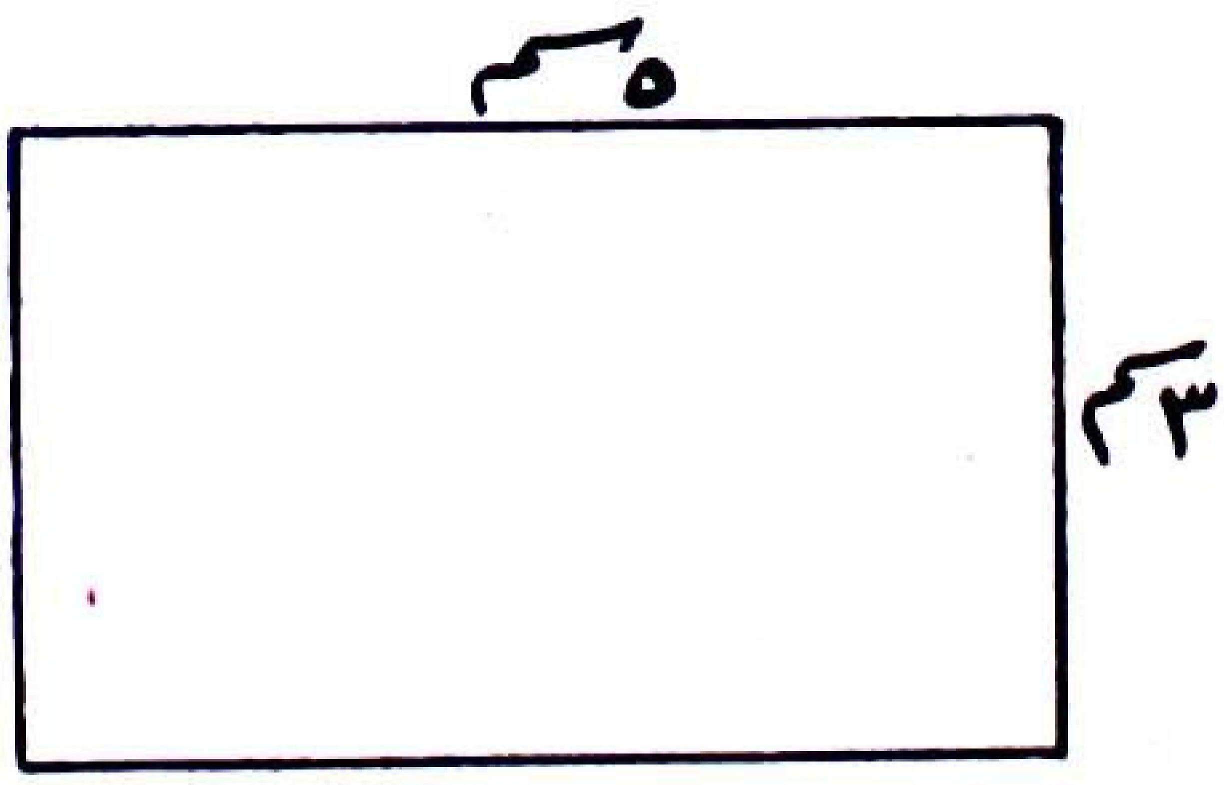
مقياس الرسم ـــ التصغير والتكبير

معنى التشابـــه

مقياس الرسم ــ التصغير والتكبير :

نشأت فكرة مقياس الرسم من استحالة دراسة بعض الأشكال بابعادها الحقيقية ، اما لكونها كبيرة الابعاد بحيث لا يمكن الاحاطـــة بها كرقعة الأرض التي تخضع لسيادة دولة من الدول ، واما لكونها صغيرة الابعاد كالجراثيم والخلايا ونحو ذلك . ولهذا ترسم هذه الأشكال مصغرة أو مكبرة حسب الحاجة على أن تتناسب الأطوال في الشكل المرسوم مع نظائرهـا في الشكل الأصلي وأن تكون زوايا الشكل المرسوم مساوية نظائرها في الشكل الأصلي أي اننا نحافظ على الزوايا .

فاذا أردنا تمثيل أرض حجرة مستطيلة طولها ٥ م وعرضها ٣ م فاننا نتخذ وحدة طول مناسبة لأبعاد الورقـــة كأن نمثل كل متر أي كل ١٠٠ سم بـ ١ سم مثلاً أي :



الشكل (١)

$$\frac{\text{الطول في الشكل}}{\text{نظيره في الأصل}} = \frac{\text{١ سم}}{\text{١٠٠ سم}} = \frac{١}{١٠٠}$$

ثم نرسم مستطيلاً طوله ٥ سم وعرضه ٣ سم (١ سم لكل متر) (شكل ١) فنكون بذلك قد حافظنا على الزوايا وأخذنا أطوال الشكل متناسبة مع نظائرها في أرض الحجرة .

ونلاحظ أن :

$$\frac{\text{طول الشكل}}{\text{طول الحجرة}} = \frac{\text{٥ سم}}{\text{٥٠٠ سم}} = \frac{١}{١٠٠}$$

$$\text{،} \quad \frac{\text{عرض الشكل}}{\text{عرض الحجرة}} = \frac{\text{٣ سم}}{\text{٣٠٠ سم}} = \frac{١}{١٠٠}$$

تعريف : اذا مثلنا شكلاً بشكل مرسوم بحيث يحافظ الشكل المرسوم على الزوايا وتكون أبعاده متناسبة مع أبعاد الشكل الأصلي فان نسبة أي طول من الشكل المرسوم الى نظيره من الشكل الأصلي إذا قيسا بنفس الوحدة هي بالتعريف مقياس الرسم . أي :

$$\text{مقياس الرسم} = \frac{\text{أي طول من الشكل المرسوم}}{\text{نظيره من الشكل الأصلي}} \qquad (١)$$

ويمكن أن نكتب العلاقة (١) على الشكلين الآتيين :

أي طول من الشكل المرسوم = مقياس الرسم × نظير الطول من الشكل الأصلي .(٢)

$$\text{أو : أي طول من الشكل الأصلي} = \frac{\text{نظيره من الشكل المرسوم}}{\text{مقياس الرسم}} \qquad (٣)$$

ملاحظـــة : إذا كان مقياس الرسم $<$ ١ فمعنى ذلك أن أي طول من الشكل المرسوم يكون أصغر من نظيره في الشكل الأصلي أي نكون قـد صغرنا الشكل الأصلي . أما اذا كان مقياس الرسم $>$ ١ فاننانكون قد كبرنا الشكل الأصلي .

مثال (١) : طريق طوله ٤٠ كم مُثّل برسم طوله ٨ سم .

أوجد مقياس الرسم وتأكد من صحة الملاحظة السابقة .

الحل :

إن ٤٠ كم = ٤٠ × ١٠٠٠ × ١٠٠ سم فاذا طبقنا (١) يكون :

$$\text{مقياس الرسم} = \frac{\text{٨ سم}}{\text{٤٠} \times \text{١٠٠٠} \times \text{١٠٠ سم}} = \frac{\text{١}}{\text{٥٠٠ ٠٠٠}}$$

وبما أن ٨ سم تمثل الطول ٤٠ كم فنرى طبعاً أن الشكل قد صغر كما نرى

أن مقياس الرسم = $\frac{\text{١}}{\text{٥٠٠ ٠٠٠}}$ $<$ ١ وهـذا يؤكد صحة الملاحظة .

مثال(٢): جرثومة على شكل دائرة مساحتها $\frac{\text{ط}}{\text{١٠٠٠ ٠٠٠}}$ سم^{٢} ،

مثّلت بدائرة مساحتها ط سم^{٢}. احسب مقياس الرسم ثم تحقق من صحة الملاحظة.

الحل :

مساحة الدائرة = ح = ط نق^{٢}

$$\therefore \text{مساحة الجرثومة} = \frac{\text{ط}}{\text{١٠٠٠ ٠٠٠}} = \text{ط نق}^{٢}$$

$$\therefore \text{نق} = \sqrt{\frac{\text{١}}{\text{١٠٠٠ ٠٠٠}}} = \frac{\text{١}}{\text{١٠٠٠}} \text{ سم}$$

ومساحة الشكل = ط = ط $نق'^{٢}$

$\therefore$ نق' = ١

بتطبيق (١) نجد :

$$\text{مقياس الرسم} = \frac{١}{\frac{١}{١٠٠٠}} = ١٠٠٠$$

وواضح أن صورة الجرثومة قد كبرت .

ونرى أيضاً أن مقياس الرسم = ١٠٠٠ $>$ ١ وهذا يؤكد صحة الملاحظة :

مثال(٣) : اذا كانت المسافة بين الرياض والخرج هي ٨٠ كم فاوجد طول هذه المسافة على خريطة مقياس رسمها ١ : ٢٠٠ ٠٠٠ .

الحل : بتطبيق (٢) نجد :

$$\text{الطول على الخريطة} = \frac{١}{٢٠٠\ ٠٠٠} \times (٨٠ \times ١٠٠٠ \times ١٠٠) = ٤٠ \text{سم} .$$

مثال (٤) : اذا كان البعد بين المدينة المنورة وجدة على خريطة مقياس رسمها ١ : ٢٥٠٠ ٠٠٠ يساوي ١٨ سم . احسب البعد الحقيقي بين البلدين .

الحل : بتطبيق (٣) نجد :

$$\text{الطول الحقيقي} = ١٨ \div \frac{١}{٢٥٠٠\ ٠٠٠} = ٤٥٠٠٠٠٠٠ \text{سم} = ٤٥٠ \text{كم}$$

فوائد التصغير

١ ـ رسم صور مصغرة للمنشآت لضبط الأعمال عند تنفيذها .

٢ ـ رسم صور مصغرة للقارة أو القارات أو المناطق لتدريس الجغرافيا في المدارس والجامعات وبيان طرق الملاحة والطيران ...

٣ ـ رسم صور مصغرة لمناظر طبيعية في الصور الفوتوغرافية ...

٤ ـ رسم صور مصغرة لمساحات كبيرة لعرضها مكبرة بواسطة الافلام السينمائية .

فوائد التكبير

١ ـ تكبير صور الحشرات أو الجراثيم للدراسة والبحث العلمي .

٢ ـ تكبير وزارة الصحة ووزارة الزراعة صور الحشرات الضارة بالانسان والحيوان والنبات لاظهارها للمواطنين وتنبيههم الى اخطارها وارشادهم الى طرق مقاومتها .

٣ ـ تكبير الصور بواسطة الفانوس السحري أو آلات السينما لدراستها اثناء المحاضرات ...

وتستعمل العدسات والمرايا للتكبير أو التصغير .

تمارين (١)

١ – المسافة بين الظهران والرياض هي ٥١٠ كيلو متراً فإذا كان طول هذه المسافة على خريطة للجزيرة العربية هو ٣٠ سم فأوجد مقياس رسم هذه الخريطة .

٢ – حلبة سباق طولها ٦٠٠ متر وعرضها ٤٠٠ متر . ارسم شكلاً يمثلها بمقياس رسم ١ : ٥٠٠٠ .

٣ – ملعب للكرة الطائرة طوله ١٠٠ متر وعرضه ٧٥ متراً – بمقياس رسم مناسب ارسم المستطيل ا ب حـ ى الذي يمثل هذا الملعب ثم صل قطر المستطيل الحادث ومن الرسم أوجد الطول الحقيقي لهذا القطر (ا حـ) .

٤ – ا ، ب ، حـ ثلاث مدن – تقع مدينة ب شمال مدينة ا – وتبعد عنها بمقدار ١٦ كيلو متراً وتقع مدينة حـ على بعد ٢٤ كيلو متراً من مدينة ا فإذا كان الطريق الواصل من ا الى ب يصنع مع الطريق الواصل من ا الى حـ زاوية مقدارها ٤٠° باتخاذ مقياس رسم مناسب ارسم شكلاً يبين مواقع المدن الثلاث – ثم أوجد من الرسم البعد الحقيقي بين مدينتي ب ، حـ .

٥ – حقل مثلث الشكل أطوال أضلاعه هي ٦٠٠ متر ، ٤٥٠ متراً ، ٣٠٠ متر – ارسم شكلاً مصغراً لهذا الحقل بمقياس رسم قدره ١ : ٦٠٠٠ ثم استخدم الرسم في إيجاد مساحة الحقل بالامتار المربعة .

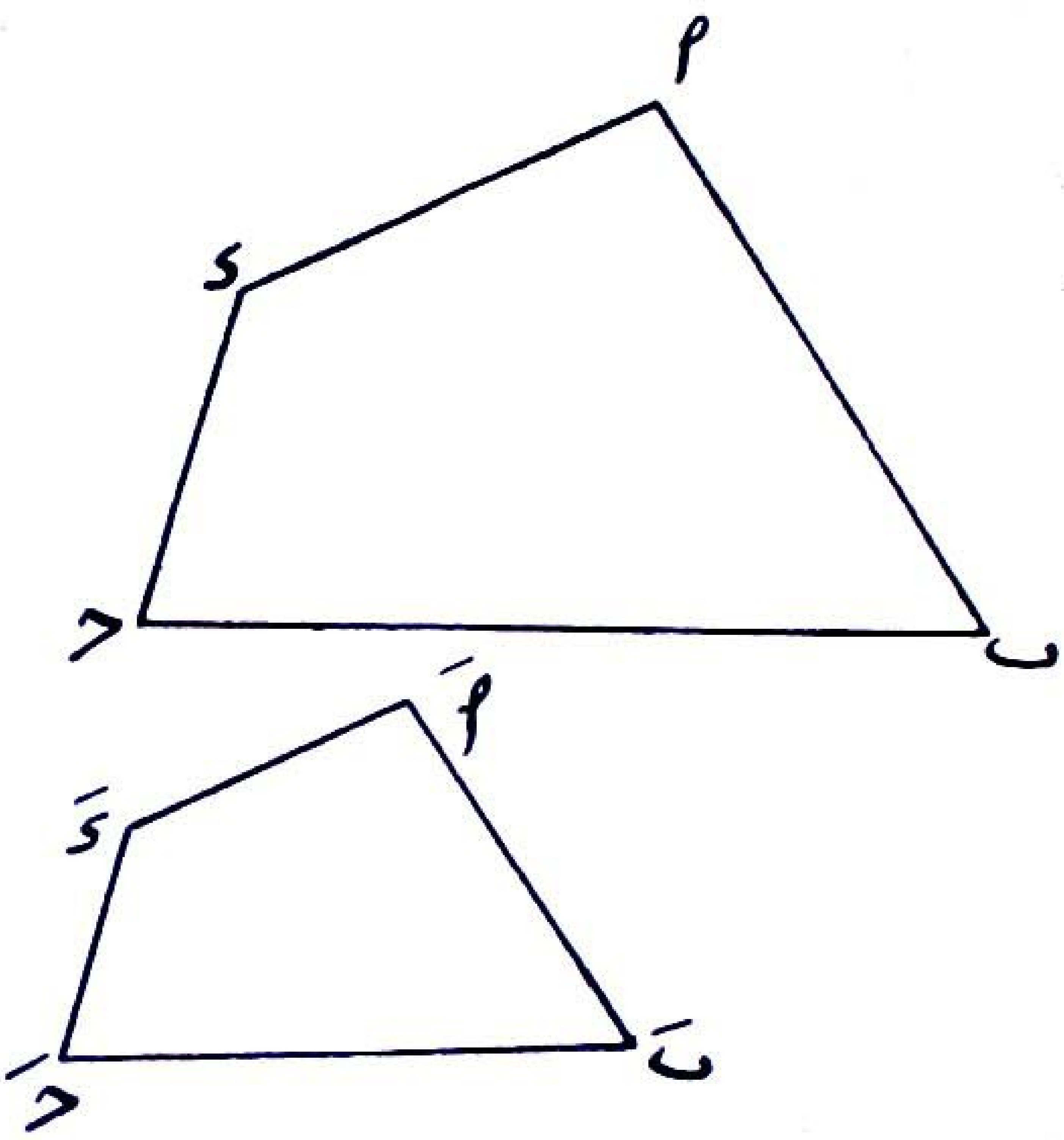
٦ – تلميذ طوله ١٫٦ متر وطول ظله في وقت ما ٢ متراً . أوجد ارتفاع مئذنه طول ظلها في تلك اللحظة ١٠ أمتار .

٧ – قطعة أرض على شكل متوازى أضلاع ا ب حـ ى قاس رجل طول ضلعها ب حـ فوجده ٦٠ متراً ثم قاس طول القطر ب ى فوجده ٨٠ متراً فإذا كانت الزاوية المحصورة بين المستقيمين ب حـ ، ب ى هي ٣٠° فأوجد الطول الحقيقي للضلع حـ ى وكذلك الطول الحقيقي للقطر احـ . وذلك باستخدام مقياس رسم ١ : ٢٠٠٠ .

معنى التشابه

لنفرض أننا رسمنا المضلع ا ب ح د بمقياس رسم مفروض (اكبر أو أصغر من الواحد) وليكن ا' ب' ح' د' الشكل (٢) .

مما تقدم نستنتج ان الشكلين يحققان الشرطين التاليين :



الشكل ٢

١") $\frac{\text{ا' ب'}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ب' ح'}}{\text{ب ح}} = \frac{\text{ح' د'}}{\text{ح د}} = \frac{\text{د' ا'}}{\text{د ا}}$

ونعبر عن ذلك بقولنا إن أضلاع الشكلين متناسبة .

٢") $\angle$ ا $=$ $\angle$ ا' ، $\angle$ ب $=$ $\angle$ ب' ، $\angle$ ح $=$ $\angle$ ح' ، $\angle$ د $=$ $\angle$ د'

ونعبر عن ذلك بقولنا إن زوايا الشكلين متساوية .

كما نعبر عن الشرطين السابقين بقولنا إن المضلعين اب حـ ء ، ا' ب' حـ' ء' متشابهان ومنه التعريف الآتي :

تعريف : نقول عن مضلعين (أو مثلثين) إنهما متشابهان اذا حققا الشرطين التاليين معاً :

١" – أضلاع المضلعين متناسبة .

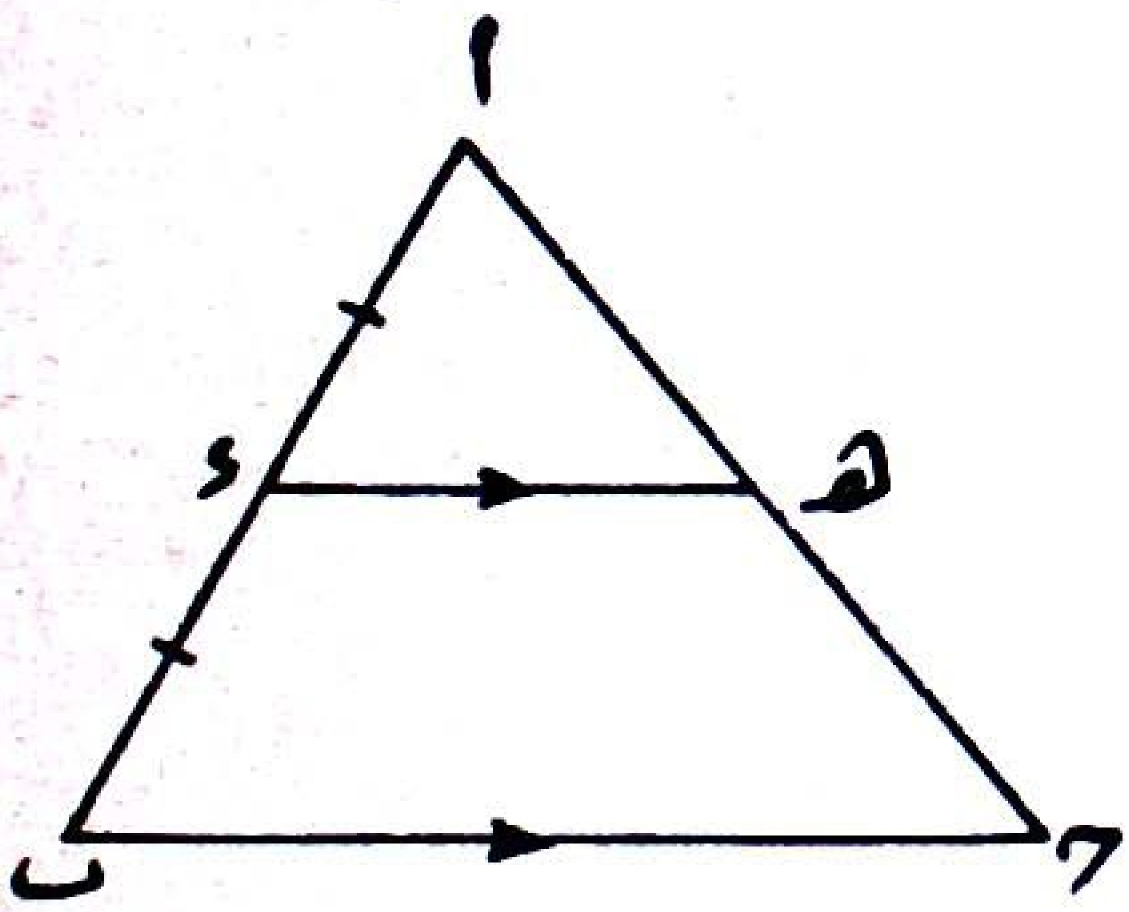
٢" – زوايا المضلعين متساوية .

أولاً – التشابه في المثلثات

تدريب :

١ – ارسم المثلث اب حـ شكل (٣) .

٢ – نصف ضلعه اب في ء ثم ارسم ء هـ موازياً ب حـ تحصل على المثلث اء هـ .



الشكل (٣)

٣ – قارن بين زوايا المثلثين اء هـ ، اب حـ تجدها متساوية ؟

٤ – قارن بين أطوال أضلاع المثلثين تجدها متناسبة .

$$\text{أي}\quad \frac{\text{اء}}{\text{اب}} = \frac{\text{اهـ}}{\text{احـ}} = \frac{\text{ءهـ}}{\text{بحـ}} = ؟$$

وبسبب تحقق الشرطين التاليين :

أولاً – تساوي زوايا المثلثين اء هـ ، اب حـ .

ثانياً – تناسب أضلاع المثلثين المذكورين .

يكون المثلثان ا ء ﻫ ، ا ب ﺣ متشابهين .

وسنرى بأنه إذا تحقق أحد الشرطين المذكورين في المثلثين فانه يؤدي الى تحقق الشرط الآخر وبالتالي يكون المثلثان متشابهين .

تدريب :

١ – ارسم المثلث ا ب ﺣ شكل (٤) .

٢ – ارسم مثلثاً آخراً ا′ ب′ ﺣ′ (أكبر أو أصغر من الأول) بحيث تتساوى زواياه مع زوايا المثلث ا ب ﺣ .

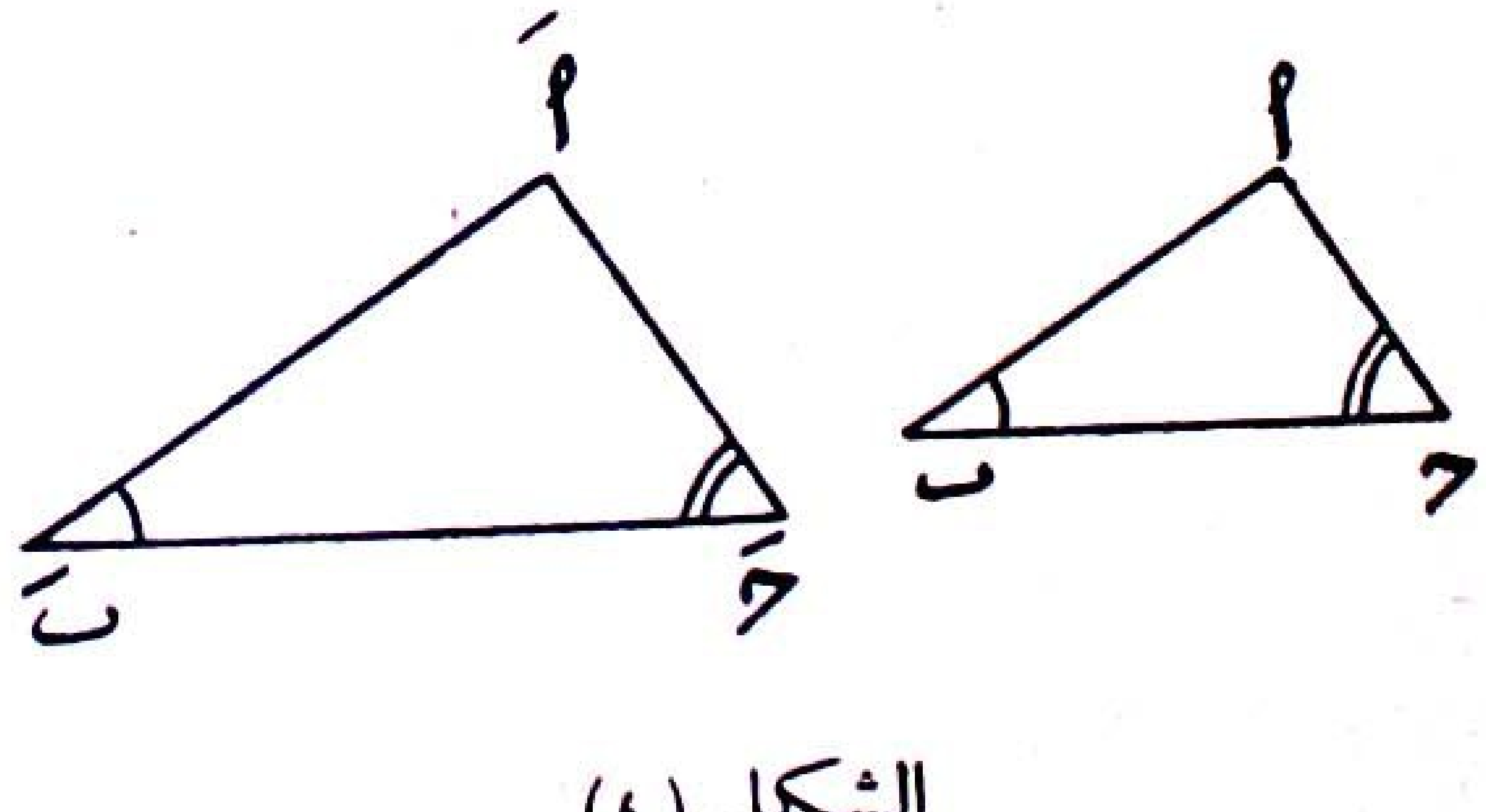
أي ∠ ا = ∠ ا′ ، ∠ ب = ∠ ب′ ، ∠ ﺣ = ∠ ﺣ′ .

٣ – قس أضلاع المثلثين وقارن بينها تجدها متناسبة :

$$\text{أي}\quad \frac{\text{ا ب}}{\text{ا}'\,\text{ب}'} = \frac{\text{ا ﺣ}}{\text{ا}'\,\text{ﺣ}'} = \frac{\text{ب ﺣ}}{\text{ب}'\text{ﺣ}'}$$

∴ المثلثان ا ب ﺣ ، ا′ ب′ ﺣ′ متشابهان

لتساوي زواياهما وتناسب أضلاعهما .



الشكل (٤)

ونستنتج من ذلك ما يأتي :

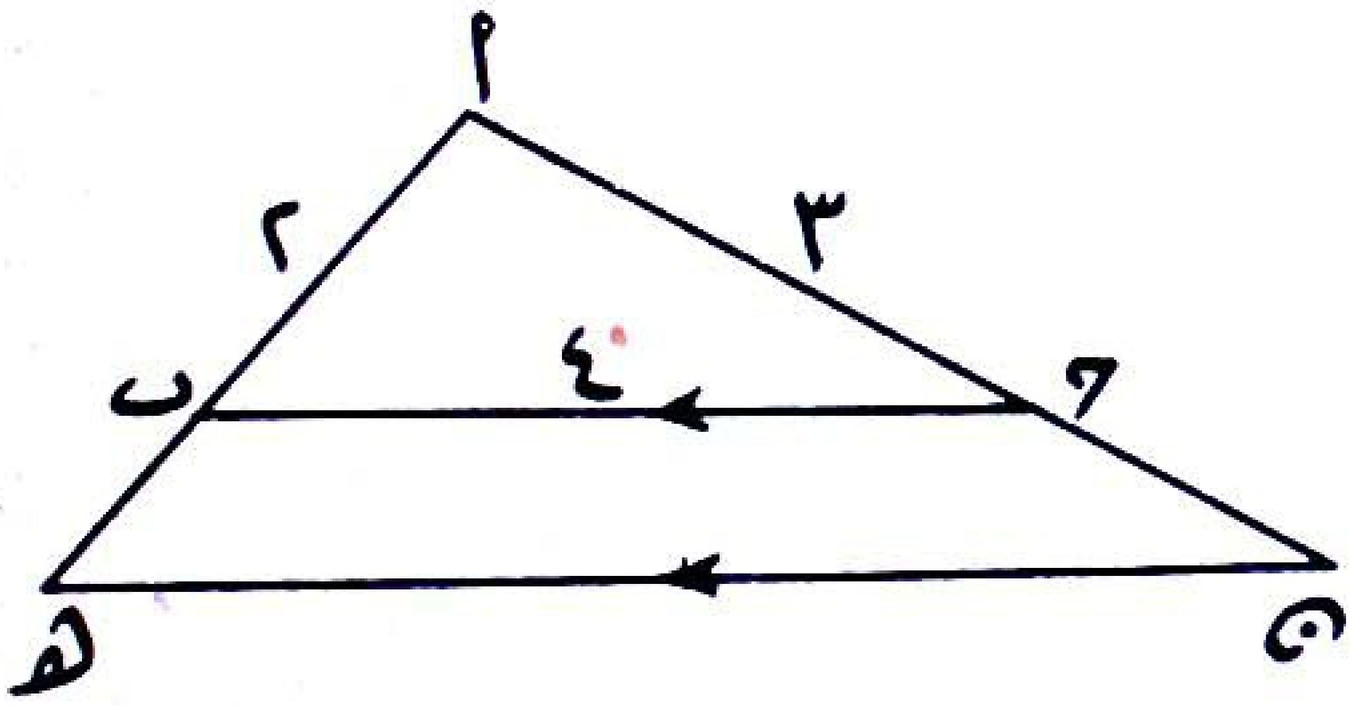
إذا تساوت زوايا مثلث مع نظائرها من مثلث آخر كانت الاضلاع متناسبة وبالتالي كان المثلثان متشابهين .

(البرهان النظري من منهج السنة الثانية)

تمرين محلول (١):

ا ب ح مثلث فيه ا ب = ٢ سم ، ا ح = ٣ سم ب ح = ٤ سم .

مد ا ح على استقامته واخذت عليه نقطة د بحيث ا د = ٤٫٥ سم ورسم منها مستقيم يوازي ح ب فقطع امتداد ا ب في ه . شكل (٥) :



الشكل (٥)

اثبت أن △ ا ه د يشابه △ ا ب ح واحسب طولي ا ه ، ه د

البرهان : ∵ ح ب // د ه

∴ ∠ ا ح ب = ∠ د ، ∠ ا ب ح = ∠ ه بالتناظر

، ∠ ا مشتركة

∴ △ ا ه د يشابه △ ا ب ح (لتساوي زواياهما)

وتكون اضلاع المثلثين متناسبة ونكتب :

$$\frac{\text{ا د}}{\text{ا ح}} = \frac{\text{ا ه}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{د ه}}{\text{ب ح}}$$ (وبالتعويض بالاطوال المفروضة)

$$\frac{٤٫٥}{٣} = \frac{\text{ا ه}}{٢} = \frac{\text{د ه}}{٤}$$

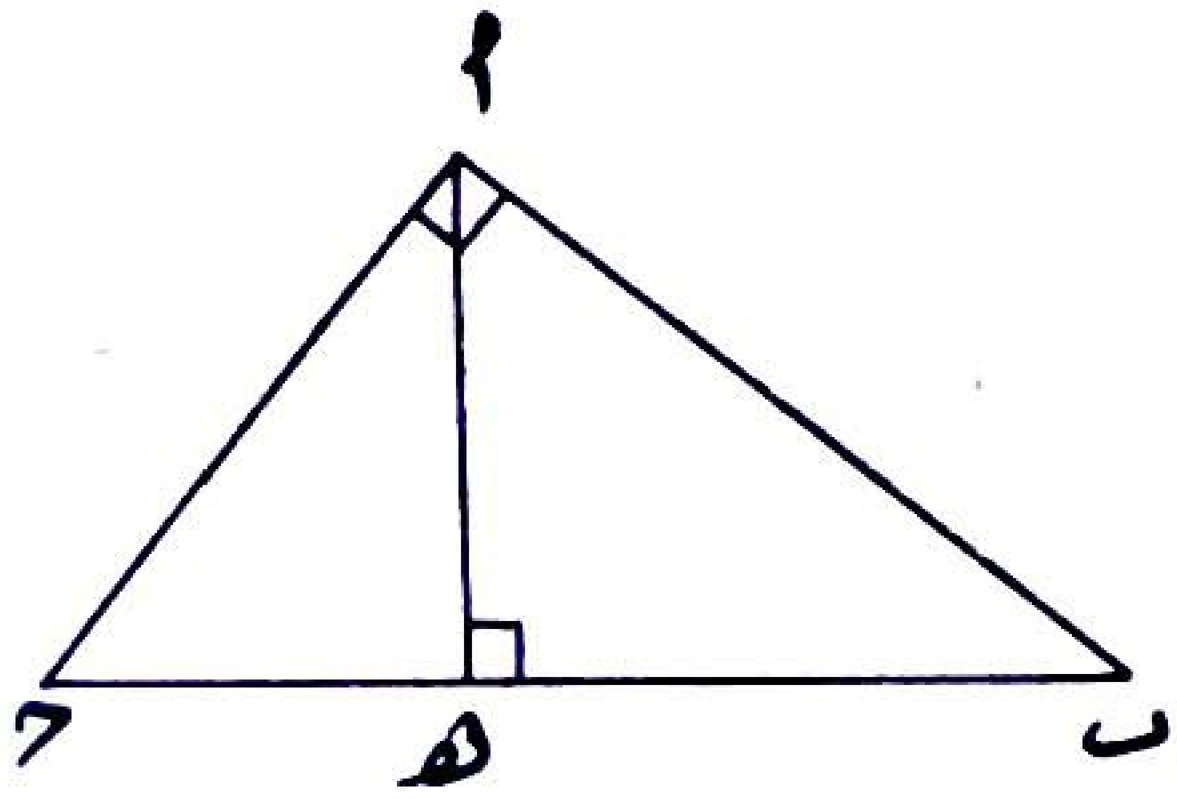
ومن تساوي النسبتين الاولى والثانية :

$$\text{أ هـ} = \frac{٢ \times ٤٫٥}{٣} = ٣ \text{ سم}$$

ومن تساوي النسبتين الاولى والثالثة :

$$\text{د هـ} = \frac{٤ \times ٤٫٥}{٣} = ٦ \text{ سم}$$

تمرين محلول (٢) :



الشكل (٦)

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ . رسم الارتفاع أ هـ .الشكل(٦)

برهن ان $\triangle$ أ ب حـ يشابه $\triangle$ هـ ب أ

ثم استنتج من ذلك أن :

$$\overline{\text{أ ب}}^{٢} = \text{ب هـ} \times \text{ب حـ}$$

البرهان : في المثلثين أ ب حـ ، هـ ب أ نجد أن :

$\angle$ ب أ حـ = $\angle$ ب هـ أ = ق فرضاً

$\angle$ ب مشتركة

$\therefore$ $\angle$ حـ = $\angle$ ب أ هـ (حتماً لان مجموع زوايا اي مثلث = ٢ ق)

$\therefore$ $\triangle$ أ ب حـ يشابه $\triangle$ هـ ب أ (لتساوي زواياهما)

فالاضلاع المتناظرة متناسبة أي :

$$\frac{\text{أ ب حـ}}{\text{هـ ب أ}} \qquad \frac{\text{أ ب}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{هـ أ}}$$

ومن تساوي النسبتين الاولى والثانية نجد :

ا ب × ب ا = $\overline{\text{ا ب}}^{٢}$ = ب هـ × ب حـ وهو المطلوب .

ملاحظة : ليكن ا ب حـ ، د و هـ مثلثين متشابهين حيث
∠ ا = ∠ د ، ∠ ب = ∠ و ، ∠ حـ = ∠ هـ ، فلكتابة النسب
المتساوية بين الاضلاع نكتب رؤوس أحد المثلثين ونضع تحتها رؤوس الثاني مع
مراعاة وضع رؤوس الزوايا المتساوية تحت بعضها أي نكتب :

ا ب حـ
د و هـ (١)

(وضعنا مثلاً د تحت ا لأن ∠ ا = ∠ د وهكذا) ثم نكتب
اضلاع المثلث ا ب حـ مثلاً في بسط النسب ، ونظائرها في مقامات النسب .
فاذا كان ا ب بسط احدى هذه النسب فاننا نضع في مقامها ضلع المثلث د و هـ
الذي يقع طرفاه في (١) تحت ا ، ب أي د و وهكذا ... أي :

$$\frac{\text{ا ب}}{\text{د و}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{و هـ}} = \frac{\text{ا حـ}}{\text{د هـ}}$$

تمادين (٢)

١ – برهن على أنه إذا تساوت زاويتا الرأس في مثلثين متساويي الساقين كانا متشابهين .

٢ – برهن على أنه إذاتساوت زاوية حادة مع أخرى في مثلثين قائمي الزاوية كانا متشابهين .

٣ – طول عصا يساوي ١,٢٠ م وضعت بصورة رأسية فوق الأرض فكان طول ظلها ٢ م . أحسب ارتفاع مئذنة طول ظلها في ذلك الوقت ١٠م .

٤ – س ص ع مثلث أطوال أضلاعه هي س ص = ٤ سم ، ص ع = ٦ سم ، س ع = ٥ سم . مد ص س الى ﻫ بحيث كان س ﻫ = ٢ سم ورسم من ﻫ مستقيم يوازي ع ص فقطع امتداد ع س في ل .

. برهن على أن : △ س ﻫ ل يشابه △ س ع ص ، ثم أحسب طول كل من ضلعيه س ل ، ﻫ ل .

٥ – ا ب ح مثلث فيه ا ب = ٤ سم ، ا ح = ٣ سم ، ب ح = ٤,٤ سم مد ا ب الى ى بحيث كان ب ى = ١ سم ، ثم رسم ى ﻫ موازياً ب ح وقاطعاً امتداد ا ح في ﻫ .أحسب ى ﻫ ، ح ﻫ .

٦ – ا ب ح مثلث قائم الزاوية في ا . رسم الارتفاع ا ﻫ .

برهن على أن :

أولاً : △ ا ح ﻫ يشابه △ ا ب ح .

ثانياً : اكتب نسب الأضلاع واستنتج أن : $\overline{ا ح}^2$ = ح ﻫ × ح ب .

ثالثاً : برهن على أن △ ا ب هـ يشابه △ ا حـ هـ واستنتج أن .

$$\overline{\text{أ هـ}}^{2} = \text{هـ حـ} \times \text{هـ ب}$$

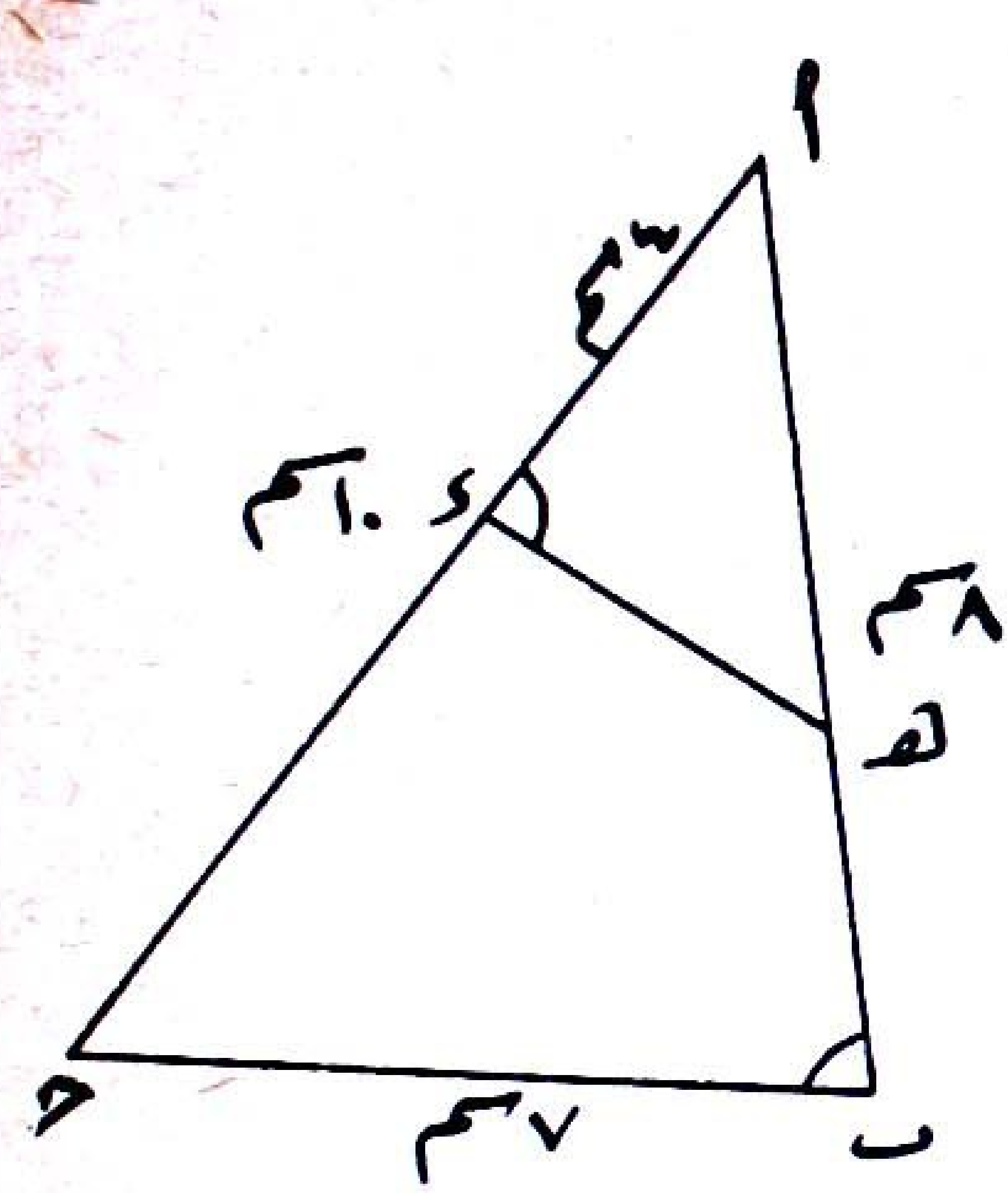
٧ – في الشكل المجاور الشكل (٧)

أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٧ سم ،

أ حـ = ١٠ سم ، أ ء = ٤ سم

∠ ب = ∠ أ ء هـ .

أثبت أن △ ا ء هـ يشابه △ ا ب حـ . ثم أوجـد طول كل من ا هـ ، ء هـ .



الشكل (٧)

تدريب :

١ – ارسم المثلث ا ب حـ بحيث :

ا ب = ٤ سم ، أ حـ = ٦ سم ،

ب حـ = ٧ سم .

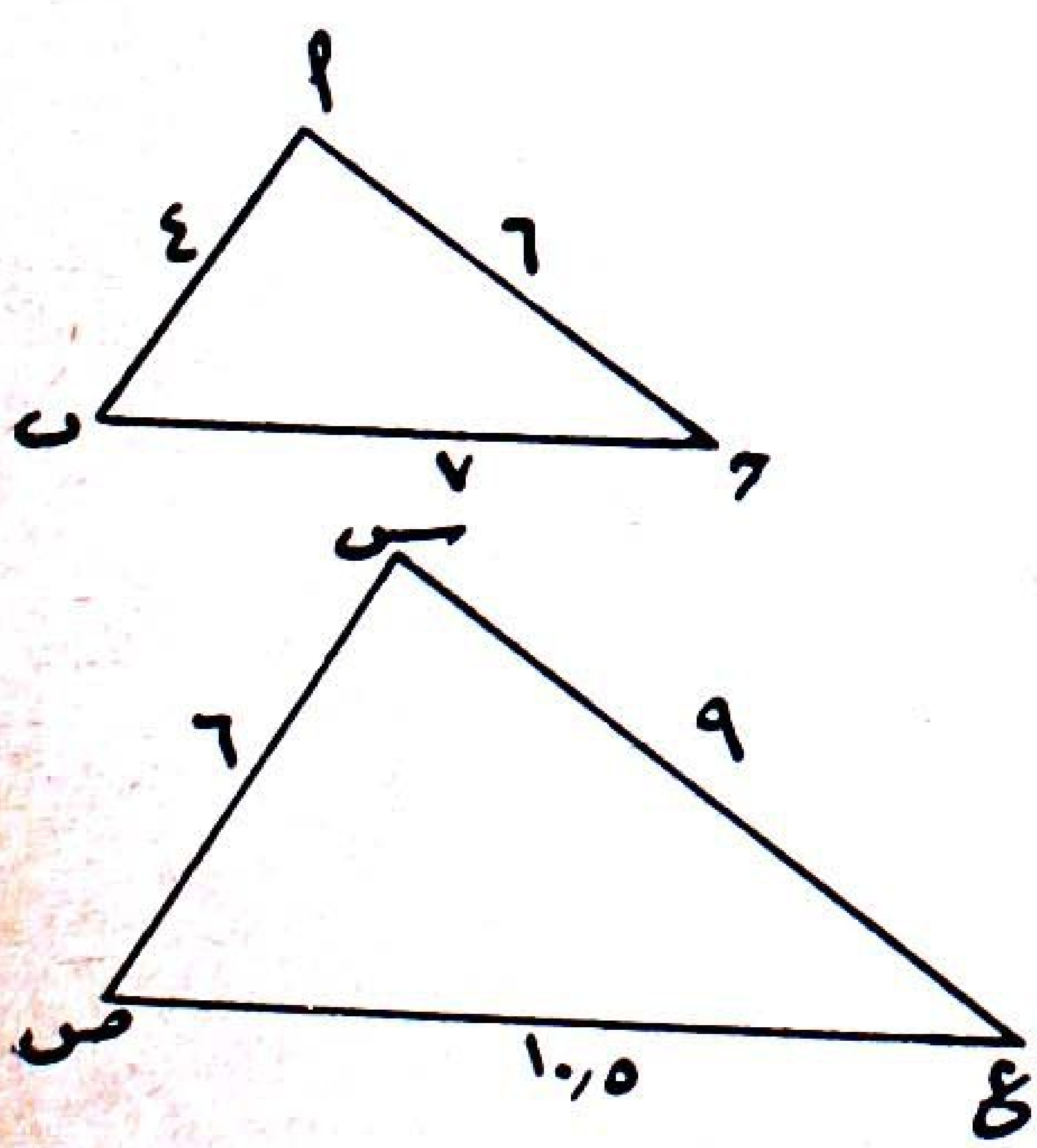
ثم المثلث س ص ع بحيث :

س ص = ٦ سم ، س ع = ٩ سم ،

ص ع = ١٠٫٥ سم

أي أن أضلاع المثلثين متناسبة لأن :

$$\frac{٤}{٦} = \frac{٦}{٩} = \frac{٧}{١٠٫٥}$$



الشكل (٨)

٢- قس زوايا المثلثين تجدها متساوية (بفرض دقة الرسم) .

ومما سبق نستنتج انه :

إذا تناسبت أضلاع مثلث مع أضلاع مثلث آخر كانت زواياهما متساوية وبالتالي كان المثلثان متشابهين .

(البرهان النظري من منهج السنة الثانية)

تمرين محلول :

أطوال أضلاع المثلث س ص ع هي : ٨ سم ، ٦ سم ، ١٠ سم
وأطوال أضلاع المثلث هـ ط ل هي : ١٥ سم ، ٢٥ سم ، ٢٠ سم
برهن على أن المثلثين س ص ع ، هـ ط ل متشابهان واذكر نسبة التشابه فيهما .

البرهان :

$\because \frac{٦}{١٥} = \frac{٨}{٢٠} = \frac{١٠}{٢٥}$ (رتبنا أطوال الأضلاع)

لأن كلًا من هذه النسب = $\frac{٢}{٥}$ = نسبة التشابه

فأضلاع المثلثين متناسبة

$\therefore$ المثلثان س ص ع ، هـ ط ل متشابهان وهو المطلوب .

مما سبق نستنتج النتيجتين الهامتين الآتيتين :

١ – كل مثلثين تساوت زواياهما تتناسب أضلاعها المتناظرة ويقال إن المثلثين متشابهان .

٢ - المثلثات التي تتناسب أضلاعها المتناظرة تتساوى في الزوايا ويقال انها متشابهة .

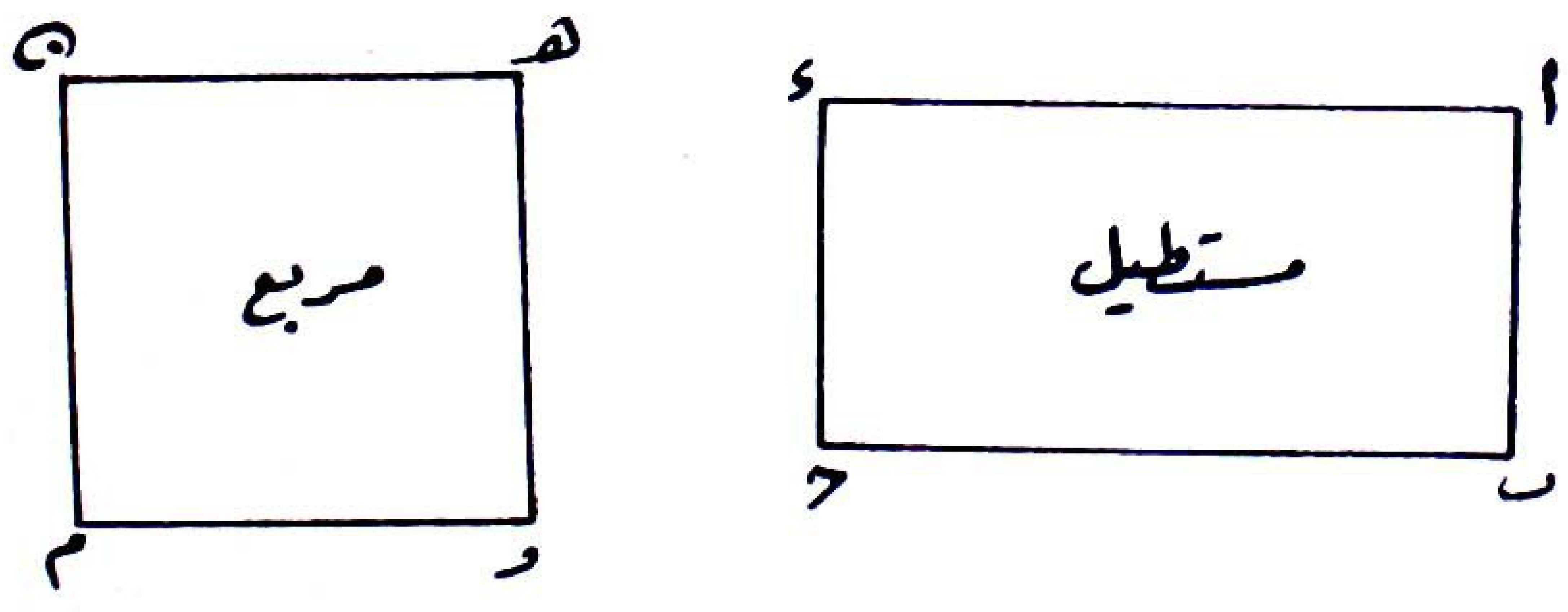
ملاحظة :

١ – إذا توفر شرط واحد من شرطي التشابه في المثلثات امكن استنتاج الشرط الثاني .

٢ – يكفي لاثبات تشابه مثلثين توفر احد شرطي التشابه .

ثانياً : تشابه الاشكال الرباعية :

أولاً : اذا رسمنا المستطيل ا ب حـ ء والمربع هـ و م ن الشكل (٩)



الشكل (٩)

نجد ان زوايا المستطيل = زوايا المربع وكل منها = ٩٠° .

 60688

ونلاحظ أيضاً أن :

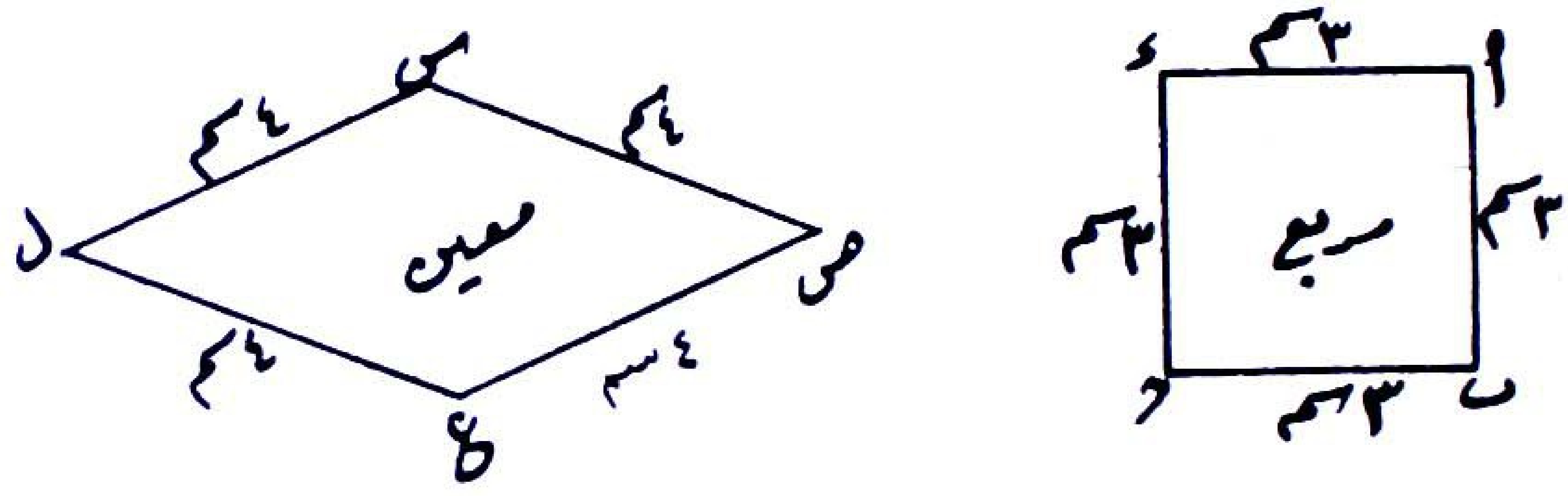
$$\frac{ا ب}{هـ و} = \frac{د حـ}{ن م} \quad ، \quad \frac{ب حـ}{و م} = \frac{ا د}{هـ ن}$$

ولكن $\frac{ا ب}{هـ و}$ لا يساوي $\frac{ب حـ}{و م}$

∴ الأضلاع في الشكلين غير متناسبة

∴ **الشكلان غير متشابهين**

ثانياً : ارسم المربع ابحد والمعين س ص ع ل بحيث يكون طول ضلع المربع ٣ سم وطول ضلع المعين ٤ سم . الشكل (١٠)



الشكل (١٠)

نلاحظ ان اطوال اضلاع المربع متناسبة مع اطوال اضلاع المعين

اي ان : $\frac{ا ب}{س ص} = \frac{ب حـ}{ص ع} = \frac{حـ د}{ع ل} = \frac{د ا}{ل س}$

ولكن زوايا المربع لاتساوي زوايا المعين .

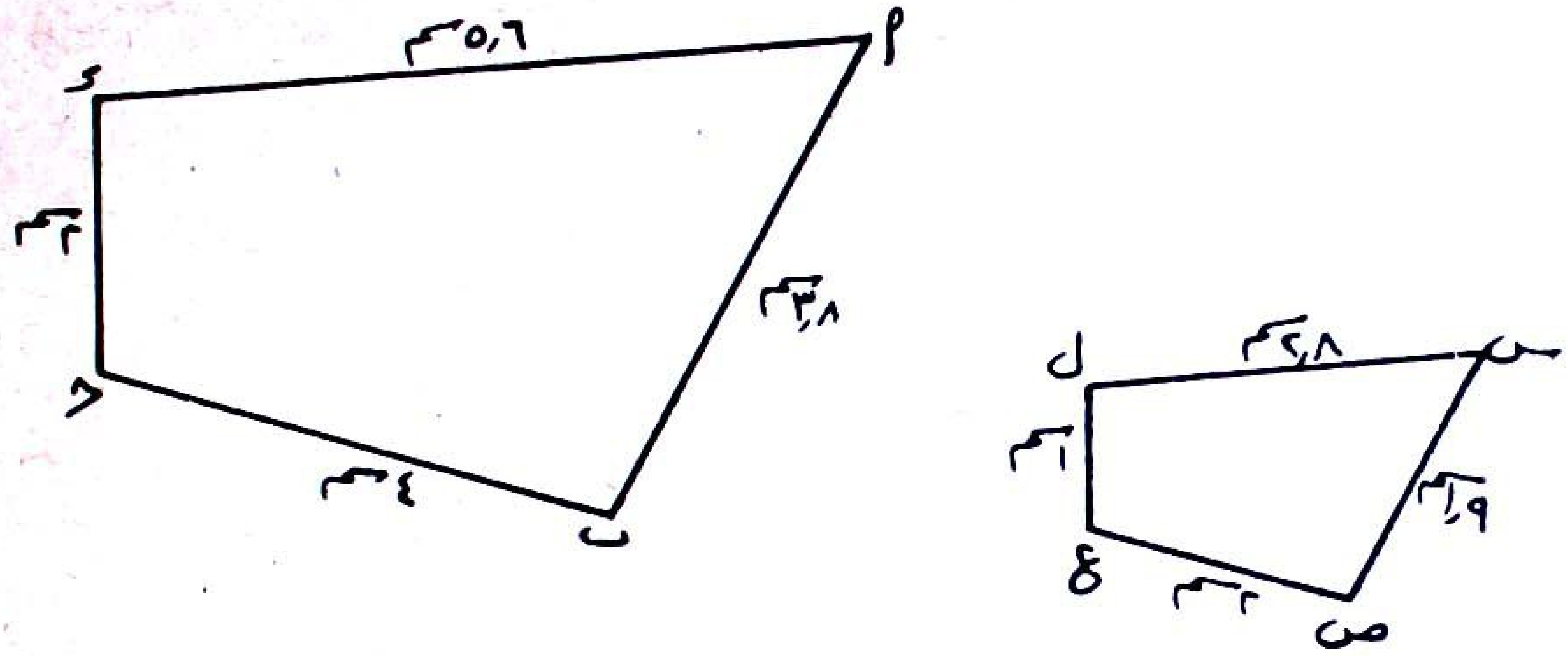
∴ **الشكلان غير متشابهين**

ثالثاً : ارسم الشكلين الرباعيين ا ب حـ د ، س ص ع ل بحيث أن

$$\frac{ا ب}{س ص} = \frac{ب حـ}{ص ع} = \frac{حـ د}{ع ل} = \frac{د ا}{ل س} = \frac{٢}{١}$$

ق ∠ ا = ∠ س ، ق ∠ ب = ∠ ص

ق ∠ حـ = ∠ ع ، ق ∠ د = ∠ ل



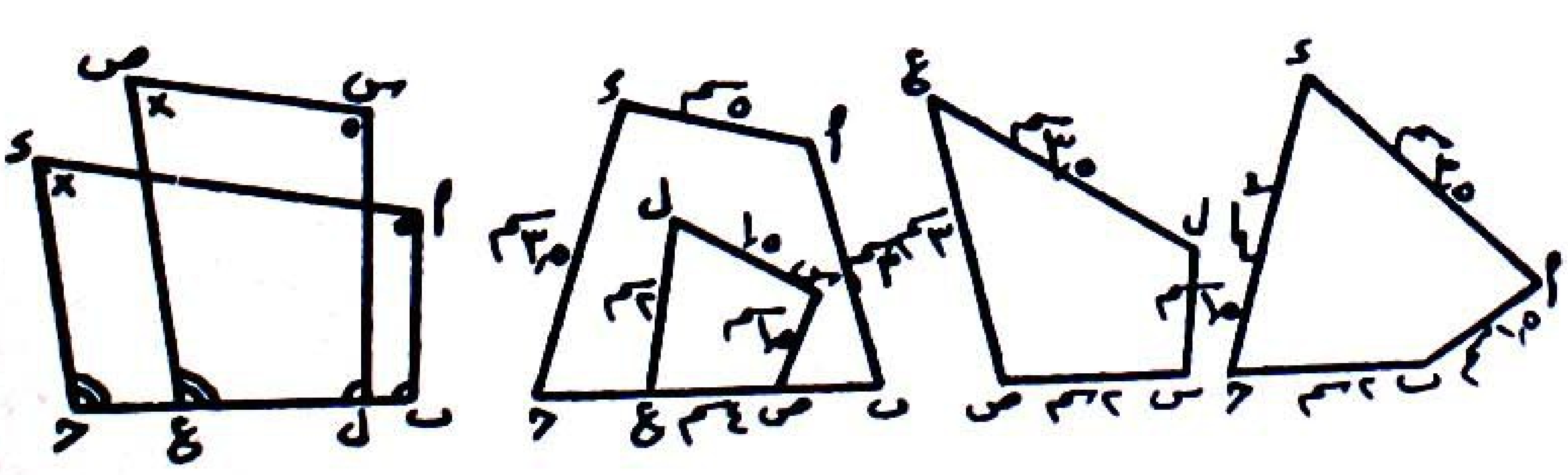
الشكل (١١)

الشكلان في هذه الحالة متشابهان .

الاستنتاج :

نستنتج مما تقدم انه في حـــالة الاشكال الرباعية ينبغي توفر الشرطين السابقين معاً حتى يكون الشكلان متشابهين أما اذا توفر شرط واحد فإن الشكلين لايتشابهان . فبتدقيق الأشكال الآتية نلاحظ على الترتيب أن :

نسبة الاضلاع ١ : ١ ، نسبة الاضلاع $\frac{١}{٢}$ ، الزوايا متساوية



الشكل (١٢ ـ ١) الشكل (١٢ ـ ب) الشكل (١٢ ـ حـ)

اشكال توفر فيها شرط واحد من شروط التشابه فهي غير متشابهة .

ملخص ما درس من التشابه :

١ – ليكون المثلثان متشابهين يجب أن يكون :

ا – الزوايا المتناظرة فيهما متساوية .

أو : ب – الأضلاع المتناظرة فيهما متناسبة .

٢ – لكي يكون الشكلان الرباعيان (أو الكثيرا الأضلاع) متشابهين يجب أن يكون :

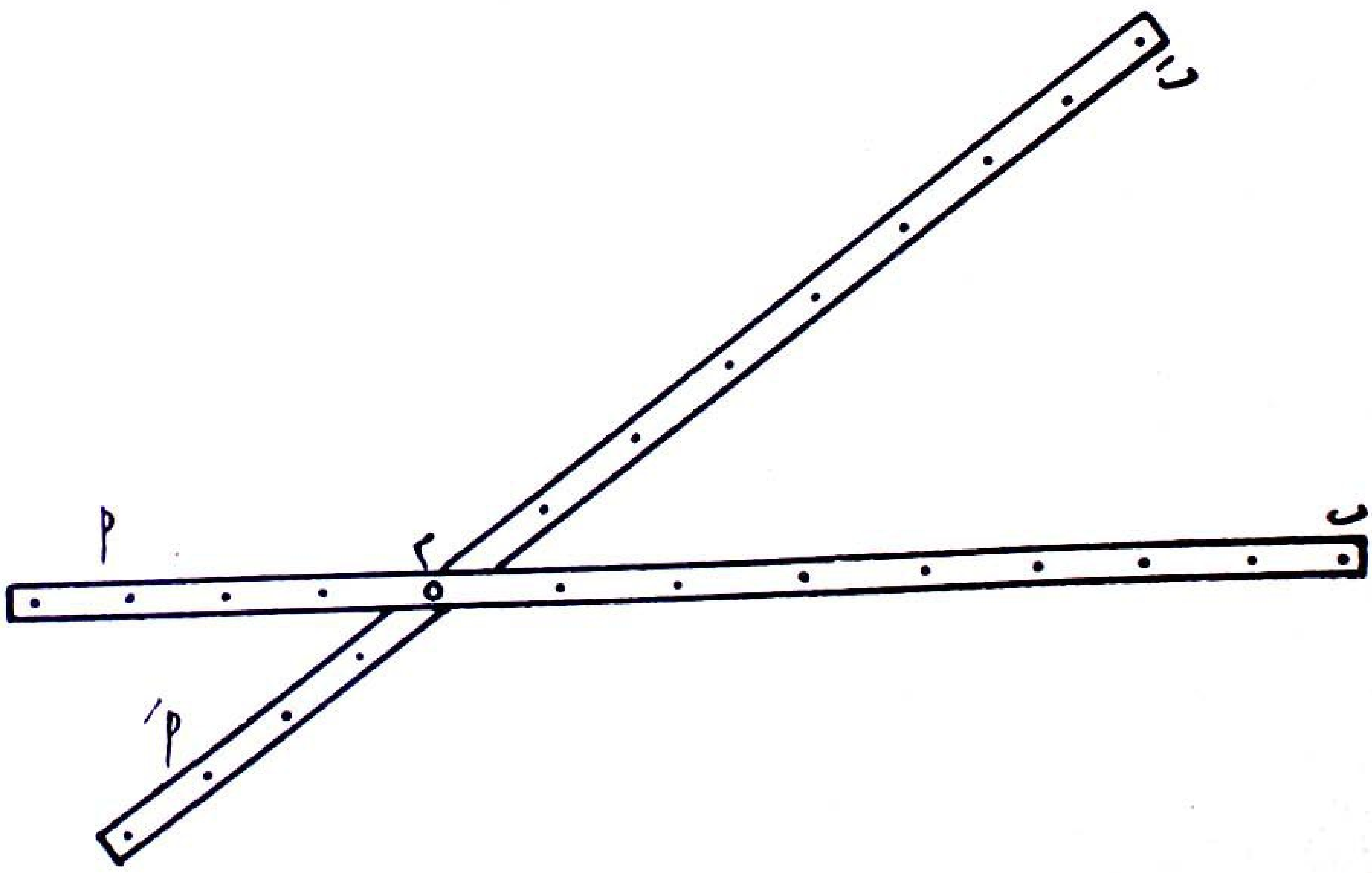
ا – الزوايا المتناظرة فيهما متساوية .

و ب – الأضلاع المتناظرة فيهما متناسبة .

أي انه إذا توفر أحد الشرطين لا يكون هذا الشرط كافياً لتشابه الشكلين .

أجهزة تستخدم في التصغير والتكبير

المنساب (فرجار التناسب) Proportional



الشكل (١٣)

تركيبه : يتكون المنساب من ساقين متساويين ا ب ، ا′ ب′ متصلين اتصالاً مفصلياً في م بحيث يكون م ا = م ا′ .

وعليه يكون م ب = م ب′

على كل ساق عدة ثقوب يمكن نقل م الى أي زوج منها بحيث يظل م ا = م ا′

∴ المثلثان م ا ا′ ، م ب ب′ متساويا الساقين وهما متشابهان لتساوي زواياهما مهما تغيرت قيمة ∠ ا م ا′

∴ ا ا′ : ب ب′ = م ا : م ب دائماً .

استخدامه :

إذا أردنا رسم شكل يشابه الشكل س ص ع ل وليكن س′ص′ع′ل′ بحيث تكون نسبة التشابه بينهما ٨ : ٣ نثبت الساقين مفصلياً في م بحيث يكون م ا : م ب = ٣ : ٨ وعلى ذلك يكون ب ب′ : ا ا′ = ٨ : ٣

نطبق ا ا′ على طرفي الضلع س ص فتكون الفتحة ب ب′ هي طول الضلع س′ ص′ المناظر له .

وبنفس الطريقة توجد أطوال الأضلاع الاخرى للشكل دون البحث عن إيجاده بطرق حسابية وبذلك يسهل رسم الشكل مع رسم زواياه بحيث تكون مساوية لزوايا الشكل الاساسي ، أما إذا اريد تصغير الشكل يطبق ب ب′ على الضلع س ص فتكون الفتحة ا ا′ هي طول الضلع المناظر له وهو س′ص′ ثم نكمل العمل .

ملاحظة :

تستخدم أجهزة أخرى للتصغير والتكبير كالمنساخ وآلة التصوير وغير ذلك .

التشابه والحياة العملية

يستخدم التشابه في الحياة العملية في اشياء كثيرة منها ما يأتي :

١ – تعيين عرض نهر ، أو البعد بين نقطتين يصعب الوصول اليهما .

٢ ايجاد ارتفاع منارة أو شجرة أو منزل أو جبل .

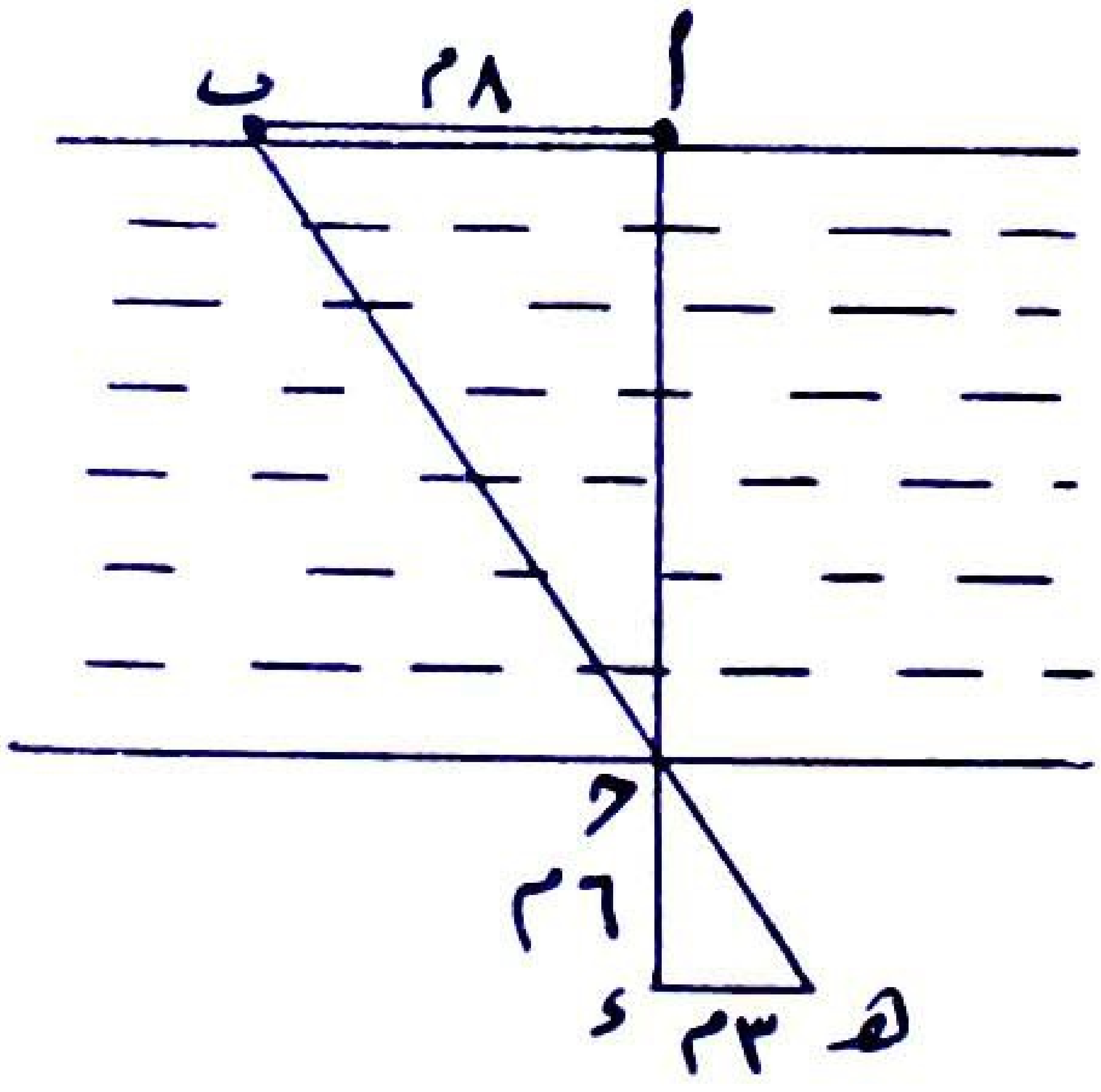
٣ – ايجاد طول الصورة في المرايا والعدسات .

والمجهر وآلات التصوير والفانوس السحري والنظارة الفلكية أجهزة كلها تستخدم فيها العدسات والمرايا للحصول على صور مكبرة للمرئيات لتظهر واضحة للعين المجردة .

قياس عرض نهر باستخدام التشابه :

مثال : اراد شخص أن يقيس عرض نهر ا حـ فوقف في حـ الشكل(١٤)

أمام شجرة ا الواقعة على حافة النهر من الطرف الآخر وسار عمودياً على حافة النهر بمسافة ٦ م فوصل الى ء . ثم سار من ء باتجاه عمودي على ا ء حتى هـ مسافة ٣ م فوجد أن هـ ، حـ ، ب على استقامة واحدة فاذا علم أن المسافة ا ب = ٨ م فاحسب عرض النهر .



الشكل (١٤)

الحل : المثلثان ا ب حـ ، ء هـ حـ فيهما :

∠ ا حـ ب = ∠ هـ حـ ء بالتقابل بالرأس .

، ∠ ا = ∠ ء = ٯ ، ∠ ب = ∠ هـ بالتبادل .

∴ المثلثان متشابهان (لتساوي زواياهما) فالأضلاع متناسبة ونكتب :

احب
ءحه

$$\frac{\text{ا ح}}{\text{ء ح}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ء ه}}$$

وبتعويض الأطوال المفروضة نجد :

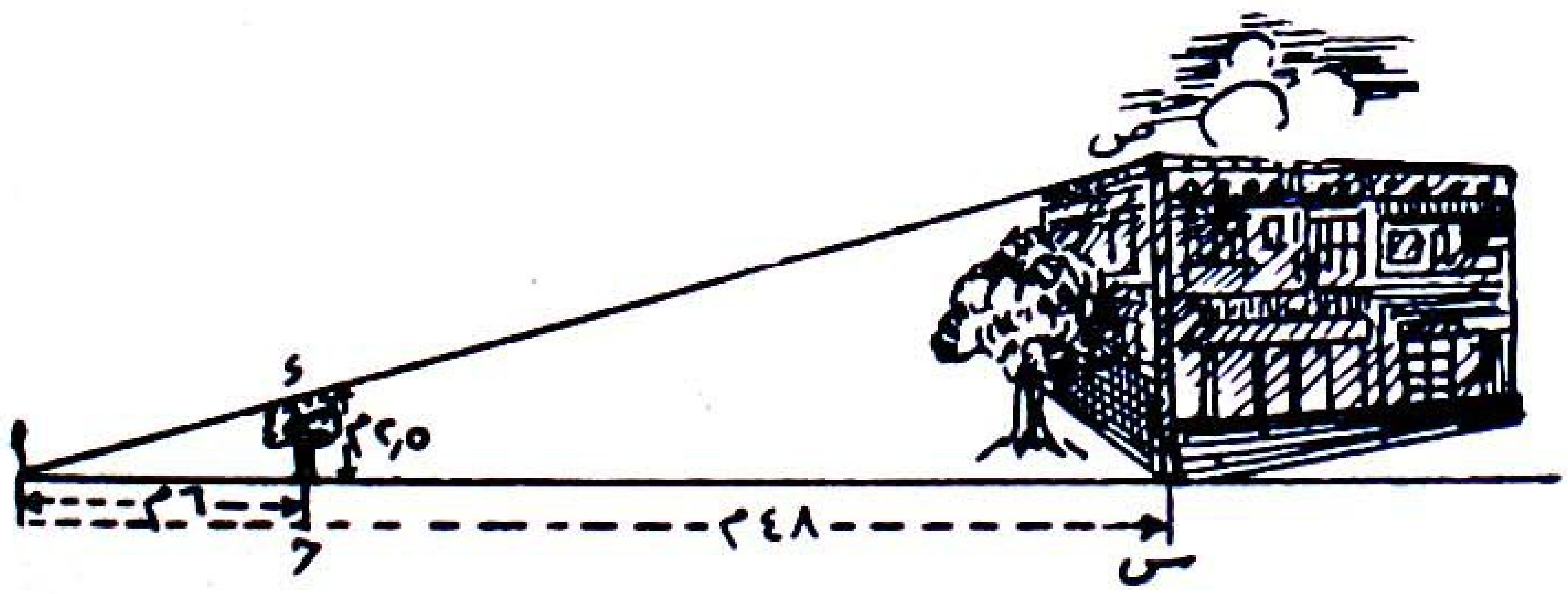
$$\frac{\text{ا ح}}{٦} = \frac{٨}{٣}$$

$$\therefore \text{ ا ح} = \frac{٦ \times ٨}{٣} = ١٦ \text{ م عرض النهر .}$$

قياس ارتفاعات الاجسام

مثال :

اراد شخص قياس ارتفاع منزل من نقطة تبعد عنه بمقدار ٤٨ متراً فاتخذ شجرة تبعد عن نفس النقطة بمقدار ٦ أمتار وارتفاعها ٢٫٥ متر فأوجد ارتفاع المنزل مستعينا بنظرية التشابه .



(الشكل ١٥)

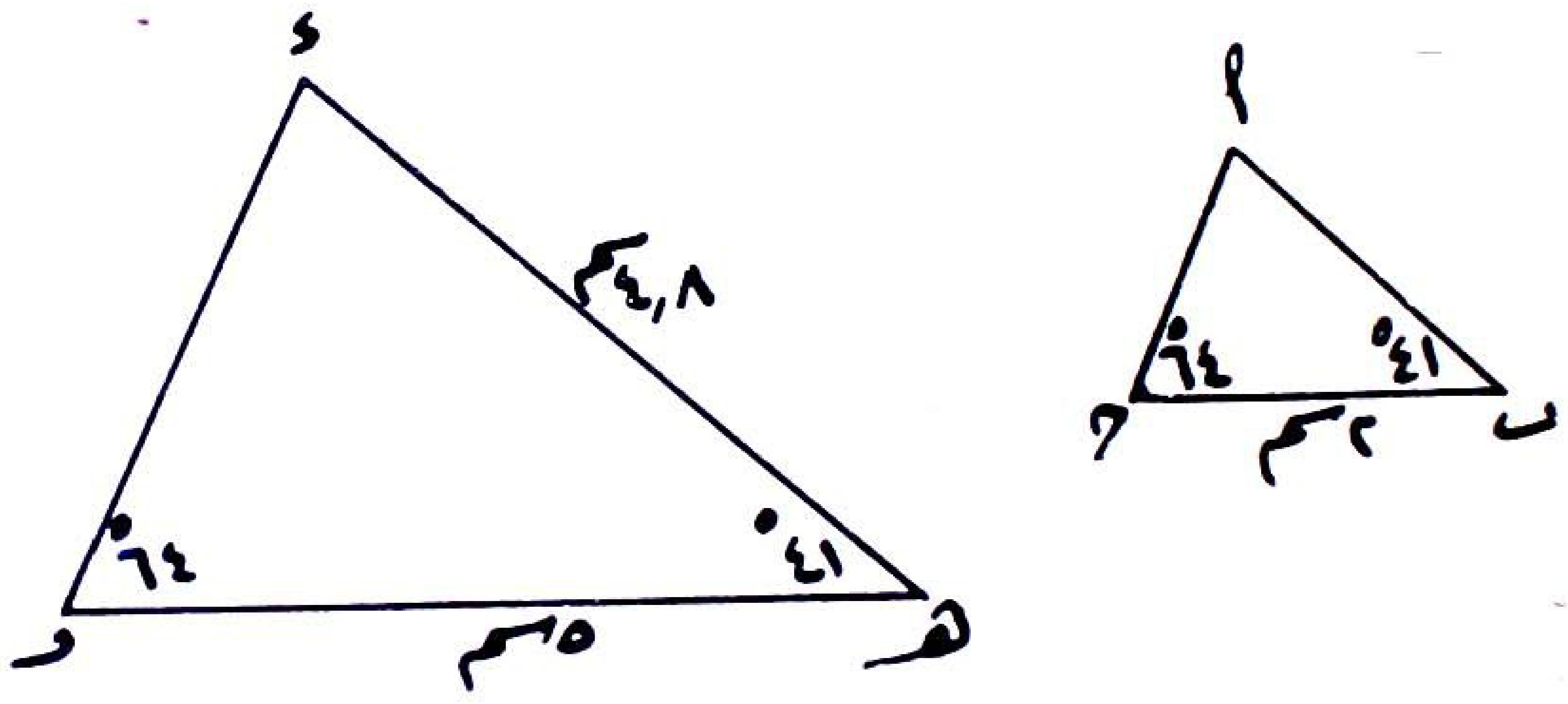
نفرض أن ا هي النقطة الـــتي منها قاس ارتفاع المـنزل وان ارتفاع الشجرة حـ ى وارتفاع المنزل س ص . الشكل (١٥)

$\triangle$ ا حـ ى يشابه $\triangle$ ا س ص

$$\therefore \frac{\text{ا حـ}}{\text{ا س}} = \frac{\text{حـ ى}}{\text{س ص}} \qquad \therefore \frac{٦}{٤٨} = \frac{٢{,}٥}{\text{س ص}}$$

$$\therefore \text{س ص} = \frac{٤٨ \times ٢{,}٥}{٦} = ٢٠ \text{ متراً}$$

تمرين (٣)



الشكل (١٦)

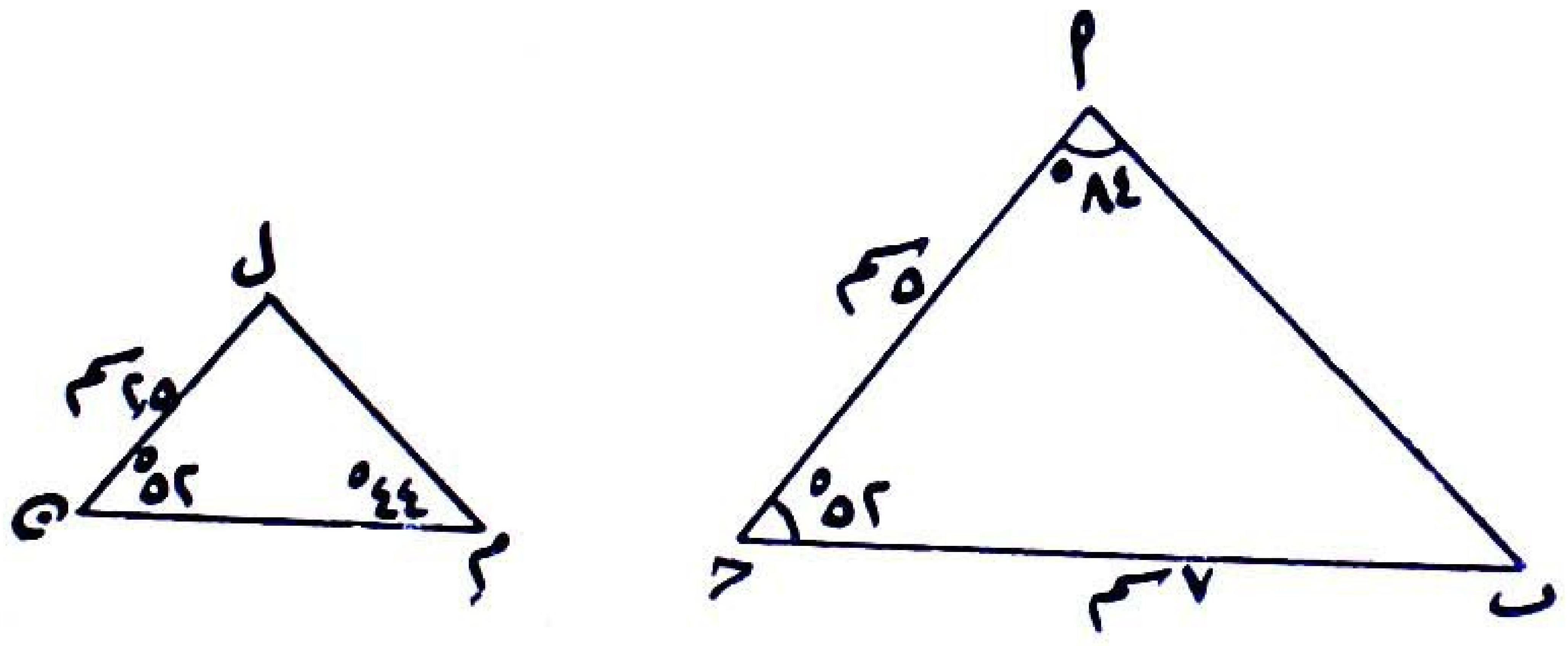
١ – في الشكل (١٦) اثبت ان $\triangle\triangle$ متشابهان ثم اوجد طول الضلع ا ب

٢ – ارسم متوازي الاضـــلاع ا ب حـ ى الذي فيـــه ب حـ = ٥ سم ، حـ ى = ٣,٥ سم ، $\angle$ ب حـ ى = ٥٠° ثم ارسم متوازي اضلاع آخر يشابهه بحيث يكون طول الضلع المناظر الى ب حـ يساوي ٤ سم .

٣ ـ ارسم الشكل الرباعي س ص ع ل الذي فيه $\angle$ س = ٩٠° ،
س ص = ٦ سم ، ص ع = ٤,٥ سم ، ع ل = ٥,٥ سم ، ل س = ٣,٥ سم
ثم ارسم شكلا رباعياً آخر يشابهه وليكن م د هـ وبحيث يكون
الضلع د هـ المناظر الى س ص = ٧,٢ سم

٤ ـ ارسم الشكل الرباعي ل م د و الذي فيه ل م = ٣ سم ،
م د = ٤,٥ سم ، د و = ٤,٦ سم ، و ل = ٤ سم ، زاوية ل م د = ٦٥°
ثم ارسم شكلاً آخر يشابهه بحيث يكون ضلعه المناظر للضلع د و
يساوي ٣,٢ سنتمتراً .

ثم بين بالقياس ان الشكلين متشابهان أي ينطبق عليهما شرطا التشابه



الشكل (١٧)

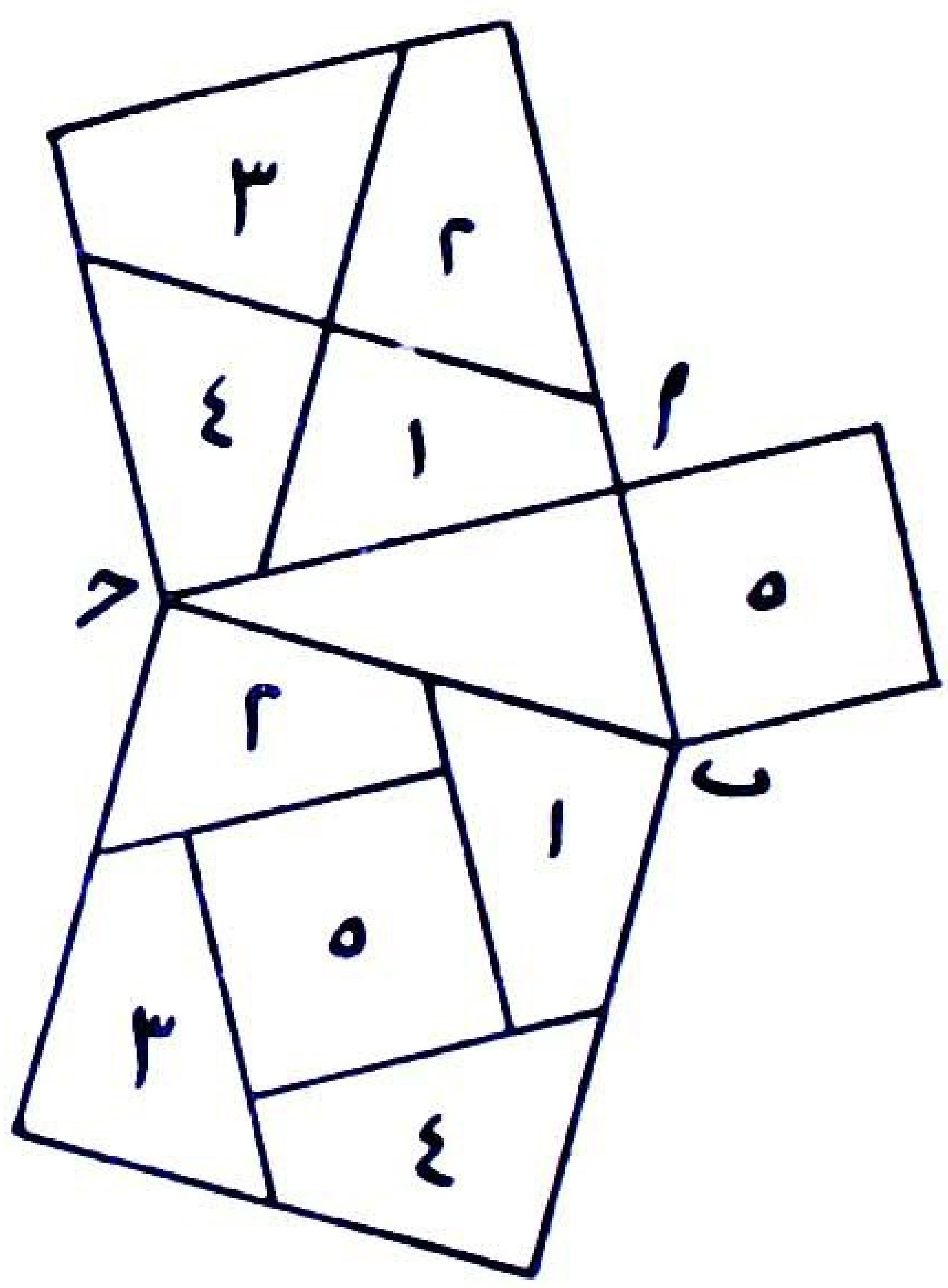
٥ ـ في الشكل (١٧) أثبت أن المثلث ا ب حـ يشابه المثلث ل د م ثم استنتج
طول م د .

الباب الثاني

نظرية فيثاغورث[1] وعكسها

تدريب :

١ – ارسم مثلثاً ا ب حـ قائم الزاوية في ا على قطعة من الورق المقوى وارسم خارجه على أضلاعه ثلاثة مربعات . الشكل (١٨)



الشكل (١٨)

---

(١) فيثاغورث Pythagoras عالم وفيلسوف يوناني عاش في القرن السادس قبل الميلاد .

٢ – ارسم من مركز المربـع المنشأ على الضلع القائم الأكبر ا ح مستقيمين أحدهما يوازي الوتر ب ح والآخر عمودي عليه .

٣ – قص الورق المقوى وفق الخطوط المرسومة في المربعـين على الضلعين القائمين .

٤ – طبق الاشكال الرباعية ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ والمربع ٥ على المربـع الكبير كما في الشكل تجدها مساوية لسطح المربـع الكبير المنشأ على الوتر .

ومما سبق نستنتج :

المربـع المنشأ على الوتر في المثلث القائم الزاوية يكافىء مجموع المربعـين المنشأين على الضلعين القائمين .

١ – نظرية فيثاغورث

في المثلث القائم الزاوية المربع المنشأ على الوتر يكافىء مجموع المربعين المنشأين عـلى الضلعين الآخرين

المعطيات : ا ب ح مثلث قائم الزاوية في ا (الشكل ١٩)

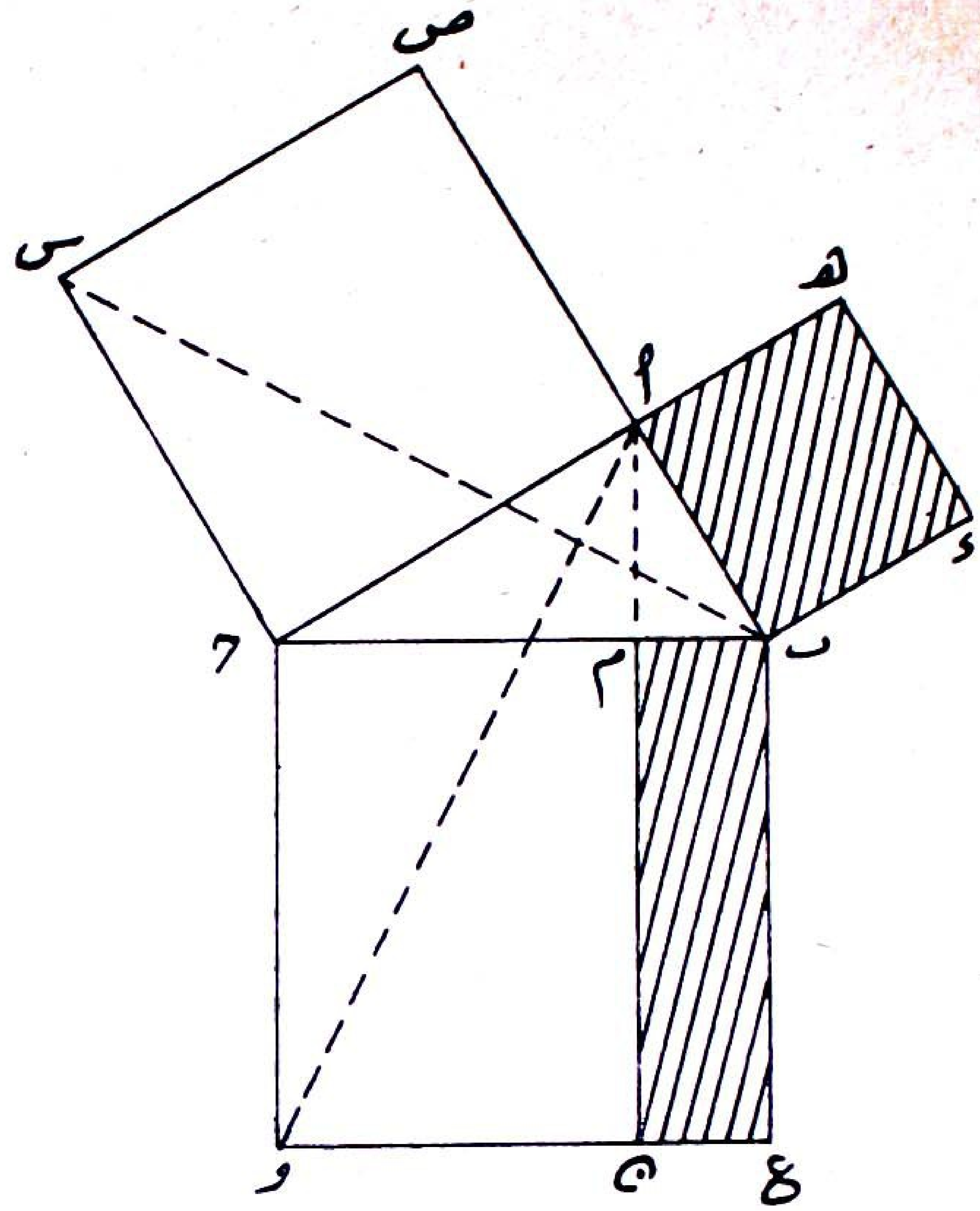
المطلوب : اثبات أن $\overline{\text{ا ب}}^{٢} + \overline{\text{ا ح}}^{٢} = \overline{\text{ب ح}}^{٢}$

العمل : نرسم المربعات ا ب ى هـ ، ا ح س ص ، ب ح و ع على اضلاع المثلث خارجاً عنه . ثم نرسم المستقيم ا م د يوازي ح و ويقطع ب ح في م ، و ع في د ثم نصل ب س ، ا و

البرهان : ∵ ∠ ب ا ح = قائمة ، ∠ ص ا ح = قائمة من المعطيات .

∴ ∠ ب ا ح + ∠ ص ا ح = ٢ق ∴ ب ا ص مستقيم واحد.

في △△ ا ح و ، س ح ب



(الشكل ١٩)

فيهما
ا حـ = س حـ (ضلعا مربع واحد)
، حـ و = حـ ب (" " ")
، ∠ ا حـ و = ∠ س حـ ب

(لأن كلاً منهما = ∠ ا حـ ب + ق)

∴ يتطابق المثلثان وينتج انهما متكافئان

ولكن Δ ا حـ و يكافىء $\frac{1}{2}$ المستطيل م حـ و ى (نظرية)

، △ س ح ب يكافىء $\frac{1}{2}$ المربع ا ح س ص (نظرية)

∴ المستطيل م ح و د يكافىء المربع ا ح س ص

وبمثل البرهان السابق يمكن اثبات أن المستطيل م ب ع د يكافىء المربع ا ب ى هـ

∴ المستطيل م ح و د + المستطيل م ب ع د يكافىء المربع ا ح س ص + المربع ا ب ى هـ

∴ المربع ب ح و ع يكافىء المربع ا ح س ص + المربع ا ب ى هـ

∴ $\overline{\text{ب ح}}^{2} = \overline{\text{ا ح}}^{2} + \overline{\text{ا ب}}^{2}$

وهو المطلوب

ملاحظة : ١ ـ يمكن ذكر نظرية فيثاغورث بالصيغة الآتية :

مربع الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع مربعي الضلعين القائمين .

ملاحظة : ٢ ـ نكتب علاقة فيثاغورث :

$\overline{\text{ا ح}}^{2} + \overline{\text{ا ب}}^{2} = \overline{\text{ب ح}}^{2}$ بالشكل الآتي

$\overline{\text{ا ب}}^{2} = \overline{\text{ب ح}}^{2} - \overline{\text{ا ح}}^{2}$

ونذكر ذلك بالصيغة الآتية :

مربع الضلع القائم في المثلث القائم الزاوية يساوي مربع الوتر ناقصاً (مطروحاً منه) مربع الضلع القائم الآخر

نتيجة : من برهان النظرية السابقة علمنا أن :

مساحة المربع ا ح س ص = مساحة المستطيل ح م د و

$\therefore$ | $\overline{\text{ا ح}}^{2} = \text{ح ب} \times \text{ح م}$ | (لأن ح و = ح ب)

وبالمثل | $\overline{\text{ا ب}}^{2} = \text{ب ح} \times \text{ب م}$ |

تمرين : أثبت صحة العلاقتين المذكورتين في النتيجة

من تشابه $\triangle$ ا م ح ، $\triangle$ ا ب ح

ثم من تشابه $\triangle$ ا م ب ، $\triangle$ أ ب ح

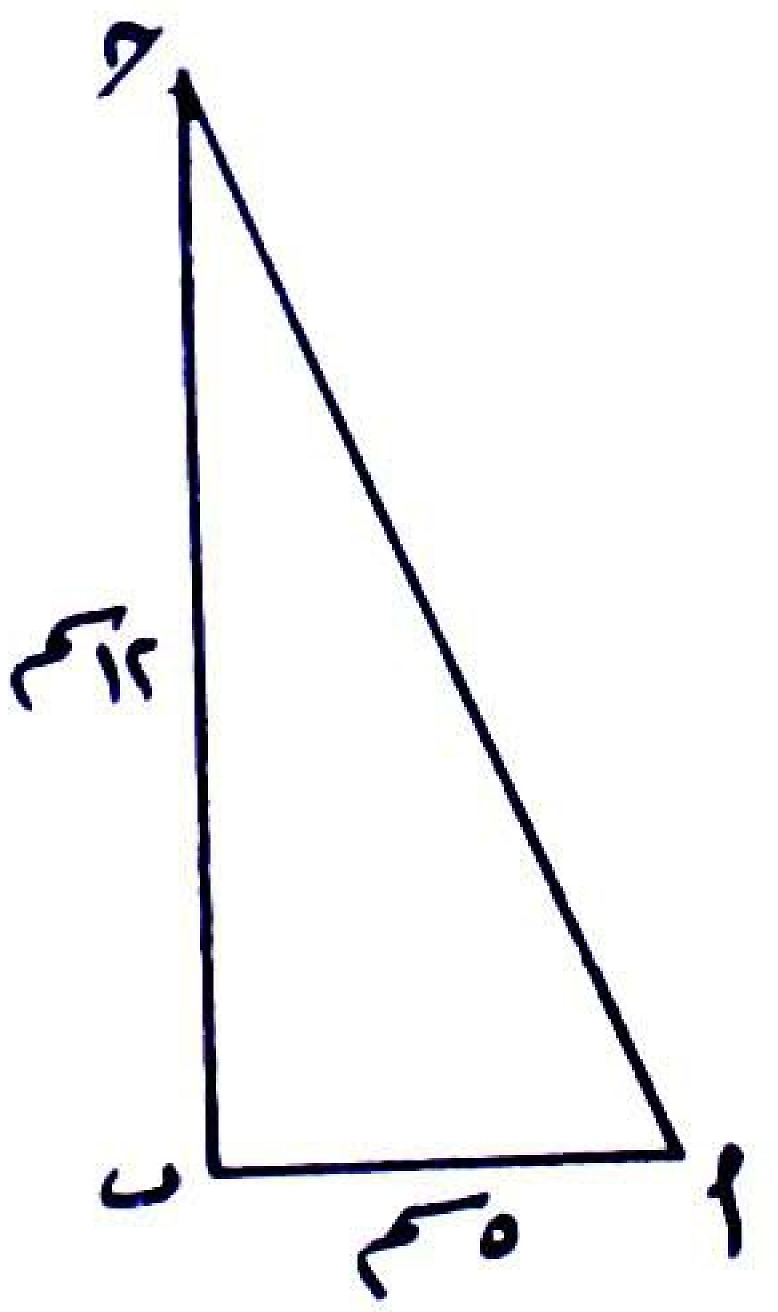
واستنتج منهما برهاناً آخر لنظرية فيثاغورث بجمع العلاقتين .

تمرين محلول (١) :

ا ب ح مثلث قائم الزاوية في ب فيه ا ب = ٥ سم ،

ب ح = ١٢ سم . أوجد طول ا ح .

الحل :



الشكل (٢٠)

$\because$ $\angle$ ب = ق الشكل (٢٠)

$\therefore$ $\overline{\text{أ ح}}^{2} = \overline{\text{أ ب}}^{2} + \overline{\text{ب ح}}^{2}$

(فيثاغورث)

= ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩ سم^{2}

$\therefore$ ا ح = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣ سم

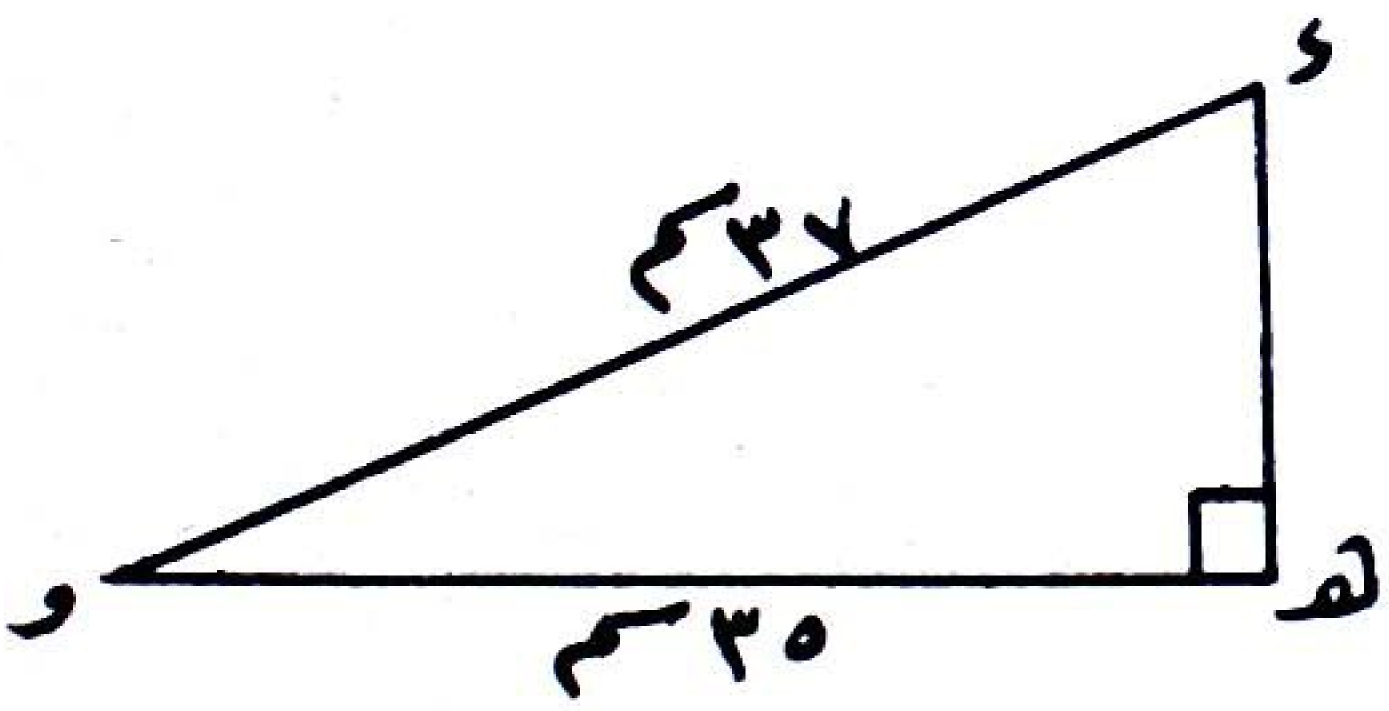
تمرين محلول (٢):

ء هـ و △ قائم الزاوية في هـ فيه ء و = ٣٧ سم ، هـ و = ٣٥ سم اوجـ
طول ء هـ .

الحل :

∵ ∠ هـ = ق الشكل (٢١)

∴ $\overline{\text{ء هـ}}^{٢} = \overline{\text{ء و}}^{٢} - \overline{\text{و هـ}}^{٢}$ (فيثاغورث)



الشكل (٢١)

$$\overline{\text{ء هـ}}^{٢} = (٣٧)^{٢} - (٣٥)^{٢} = ١٤٤$$

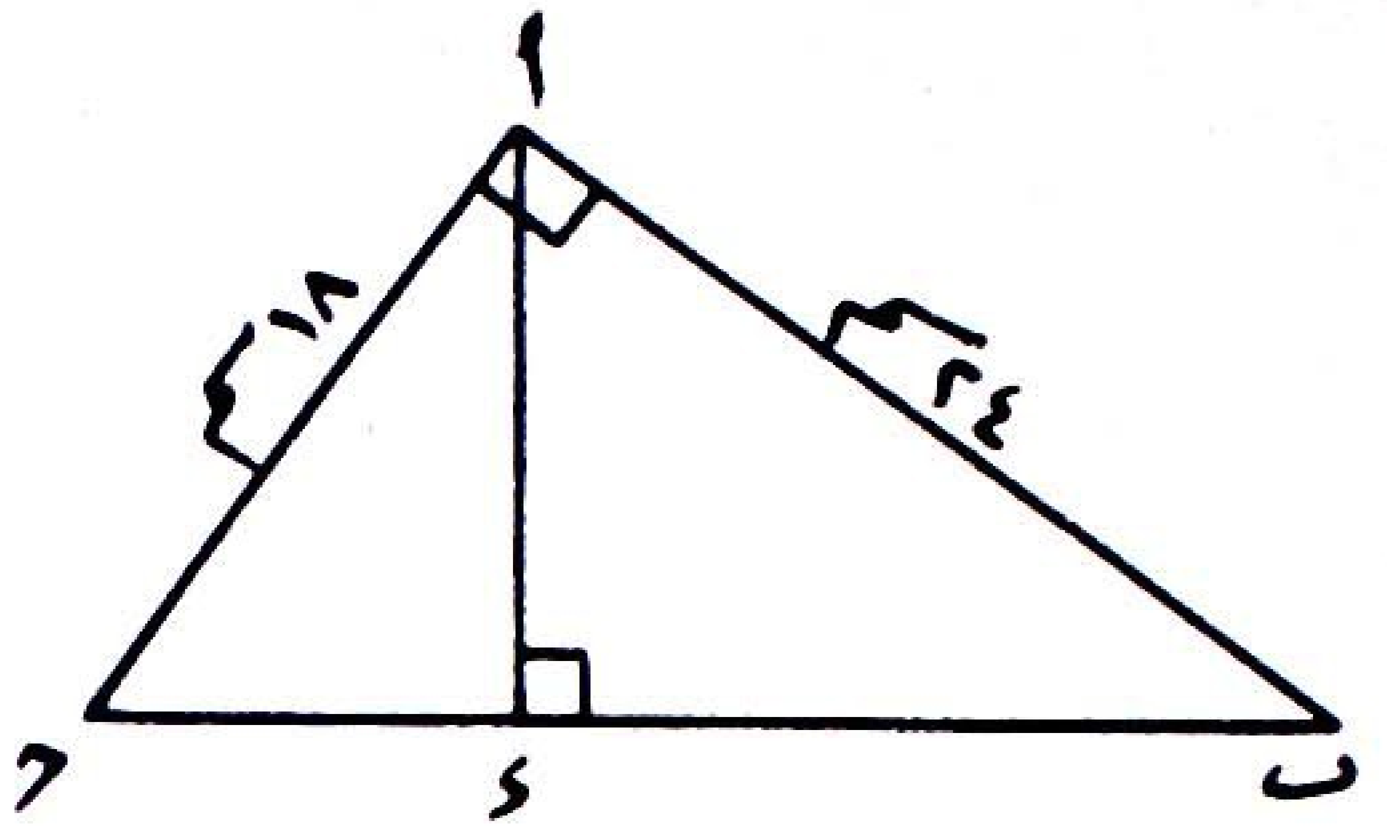
$$\therefore \text{ء هـ} = \sqrt{١٤٤} = ١٢ \text{ سم}$$

تمرين محلول (٣):

ا ب حـ △ قائم الزاوية في ا فيه ا ب = ٢٤ سم ، ا حـ = ١٨ سـ
انزل العمود ا ء على ب حـ . أوجد طول ب ء ثم أوجد طول ا ء .

الحل : اولا :

∵ ∠ أ = ق الشكل (٢٢)



الشكل (٢٢)

∵ $\overline{ب ج}^{٢} = \overline{أ ب}^{٢} + \overline{أ ج}^{٢}$ (فيثاغورث)

$= (٢٤)^{٢} + (١٨)^{٢} = ٩٠٠$ سم^{٢}

∴ ب ج = $\sqrt{٩٠٠}$ = ٣٠ سم

ثانيا :

∵ أ ء ⊥ ب ج ، ∠ أ = ق

∴ $\overline{ا ب}^{٢}$ = ب ء × ب ج (نتيجة فيثاغورث)

∴ $(٢٤)^{٢}$ = ب ء × ٣٠

∴ ب ء = $\frac{٥٧٦}{٣٠}$ = ١٩,٢ سم

Δ ا ب ء قائم الزاوية في ء

∴ $\overline{\text{ا ى}}^{2} = \overline{\text{ا ب}}^{2} - \overline{\text{ب ى}}^{2}$ (فيثاغورث)

$= (٢٤)^{٢} - (١٩٫٢)^{٢} = ٢٠٧٫٣٦$ سم^{٢}

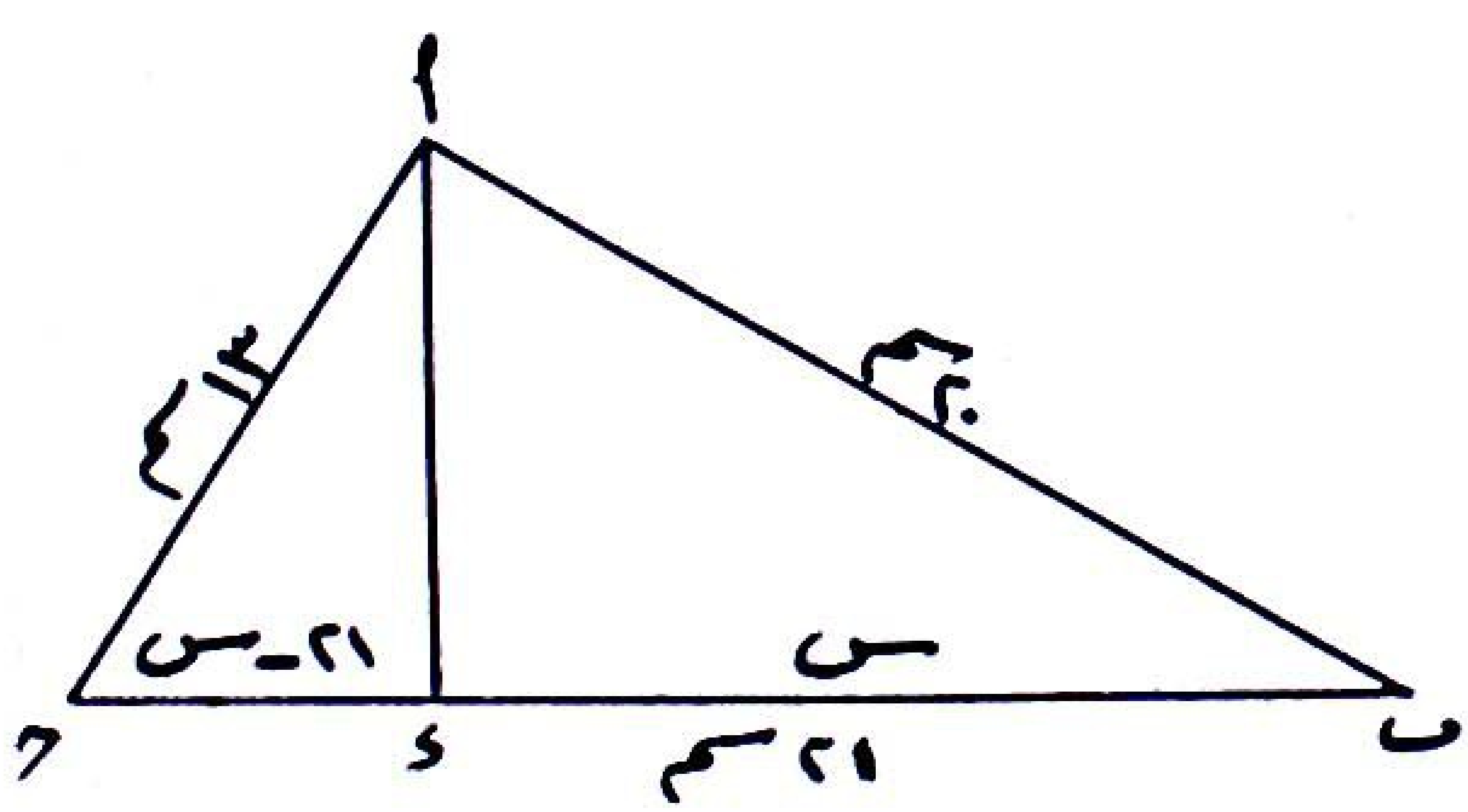
∴ ا ى $= \sqrt{٢٠٧٫٣٦} = ١٤٫٤$ سم

تمرين محلول (٤):

ا ب حـ مثلث فيه ا ب = ٢٠ سم ، ب حـ = ٢١ سم ، ا حـ = ١٣ سم. انزل العمود ا ى على ب حـ . أوجد طول ا ى ثم أوجد طول العمود النازل من حـ على ا ب .

المعطيات

ا ب حـ △ فيه
ا ب = ٢٠ سم ،
ب حـ = ٢١ سم ،
ا حـ = ١٣ سم ،
ا ى ⊥ ب حـ
الشكل (٢٣)



المطلوب

اولاً : إيجاد طول ا ى .

الشكل (٢٣)

ثانياً : إيجاد طول الارتفاع النازل من حـ على ا ب

الحـــل

نفرض ان ب ى = س سم فيكون حـ ى = ٢١ – س

ونفرض أن الارتفاع النازل من حـ على ا ب = ص سم

$\triangle$ ا ب ى فيه $\angle$ ى = ق

$\therefore\ \overline{\text{ا ى}}^{\,٢} = \overline{\text{ا ب}}^{\,٢} - \overline{\text{ب ى}}^{\,٢}$

$= ٤٠٠ - \text{س}^٢$ .... (١)

، $\triangle$ ا ى حـ فيه $\angle$ ى = ق

$\therefore\ \overline{\text{ا ى}}^{\,٢} = \overline{\text{ا حـ}}^{\,٢} - \overline{\text{حـ ى}}^{\,٢}$

$١٦٩ - (٢١ - \text{س})^٢$ .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

$٤٠٠ - \text{س}^٢ = ١٦٩ - (٢١ - \text{س})^٢$

$٤٠٠ - \text{س}^٢ = ١٦٩ - ٤٤١ + ٤٢\text{س} - \text{س}^٢$

$٤٢\text{س} = ٦٧٢$

$\therefore\ \text{س} = \frac{٦٧٢}{٤٢} = ١٦$ سم

بالتعويض عن قيمة س في (١) ينتج :

$\overline{\text{ا ى}}^{\,٢} = (٢٠)^٢ - (١٦)^٢ = ١٤٤$

$\therefore$ ا ى $= \sqrt{١٤٤} = ١٢$ سم

وهو المطلوب اولاً

مساحة $\triangle$ ا ب حـ $= \frac{١}{٢}$ ب حـ × ا ى $= \frac{١}{٢} × ١٢ × ٢١ = ١٢٦$ سم^٢

ولكن مساحة △ ا ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ا ب × ص

∴ ١٢٦ = $\frac{١}{٢}$ × ٢٠ × ص

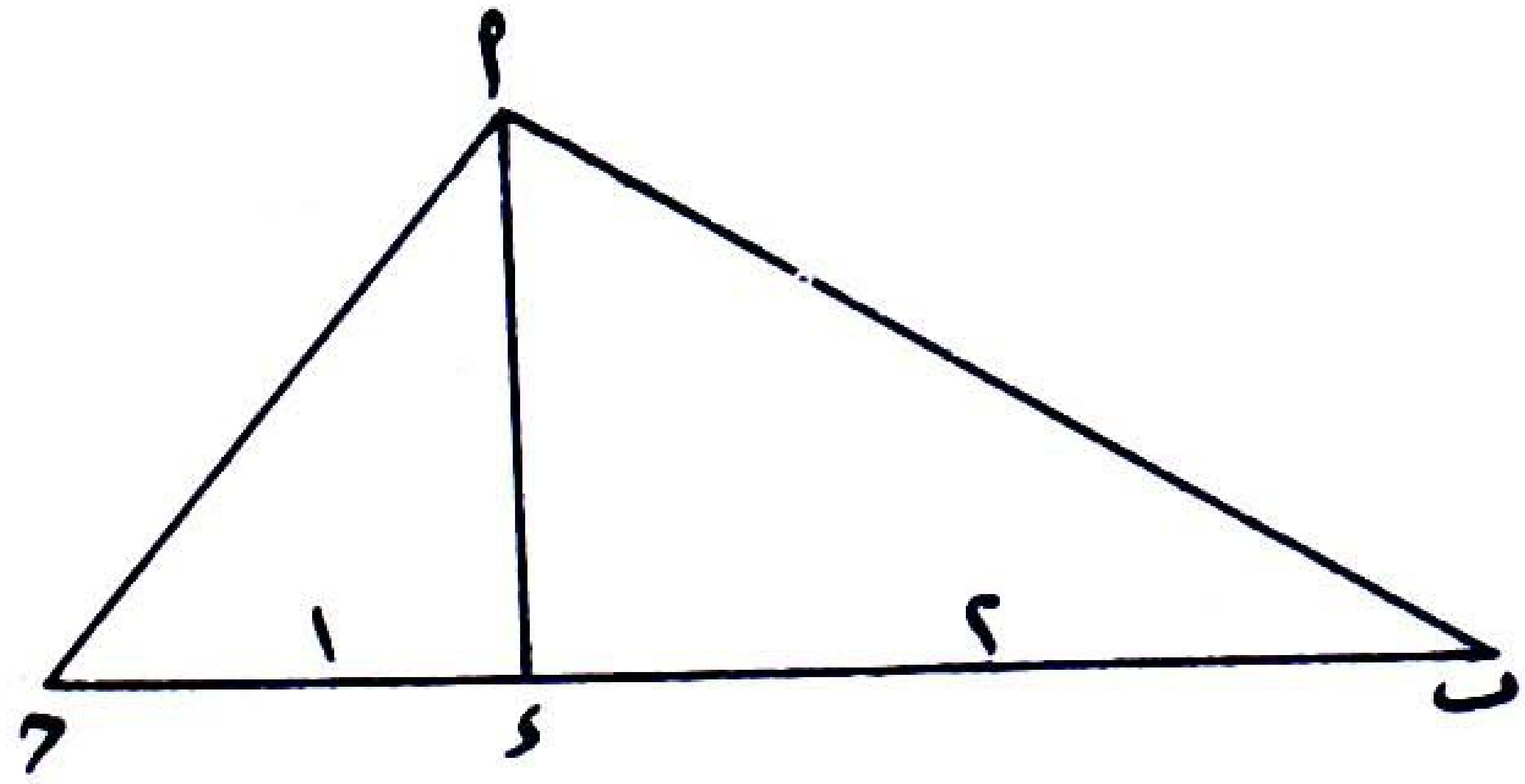
∴ ص = ١٢٫٦ سم

وهو المطلوب ثانياً

تمرين محلول (٥)

ا ب حـ △ انزل العمود ا ء على ب حـ فاذا كان ب ء يساوي ٢ حـ ء ،

فاثبت ان $\overline{\text{ا ب}}^{٢} - \overline{\text{ا حـ}}^{٢} = ٣\,\overline{\text{حـ ء}}^{٢}$



الشكل (٢٤)

المعطيات ا ب حـ △ ، ا ء ⊥ ب حـ

حـ ء = $\frac{١}{٢}$ ب ء الشكل (٢٤)

المطلوب اثبات أن :

$\overline{\text{أ ب}}^{٢} - \overline{\text{أ حـ}}^{٢} = ٣\,\overline{\text{حـ ء}}^{٢}$

البرهان △ اب ء فيه ∠ ء = ق

∴ $\overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{بء}}^2 + \overline{\text{اء}}^2$

ولكن ب ء = ٢ ح ء

∴ $\overline{\text{بء}}^2 = ٤\,\overline{\text{حء}}^2$

∴ $\overline{\text{اب}}^2 = ٤\,\overline{\text{حء}}^2 + \overline{\text{اء}}^2$ .... (١)

△ احء فيه ∠ ء = ق

∴ $\overline{\text{اح}}^2 = \overline{\text{اء}}^2 + \overline{\text{حء}}^2$ .... (٢)

بطرح (٢) من (١) ينتج أن $\overline{\text{اب}}^2 - \overline{\text{اح}}^2 = ٣\,\overline{\text{حء}}^2$

وهو المطلوب

تمرين محلول (٦) :

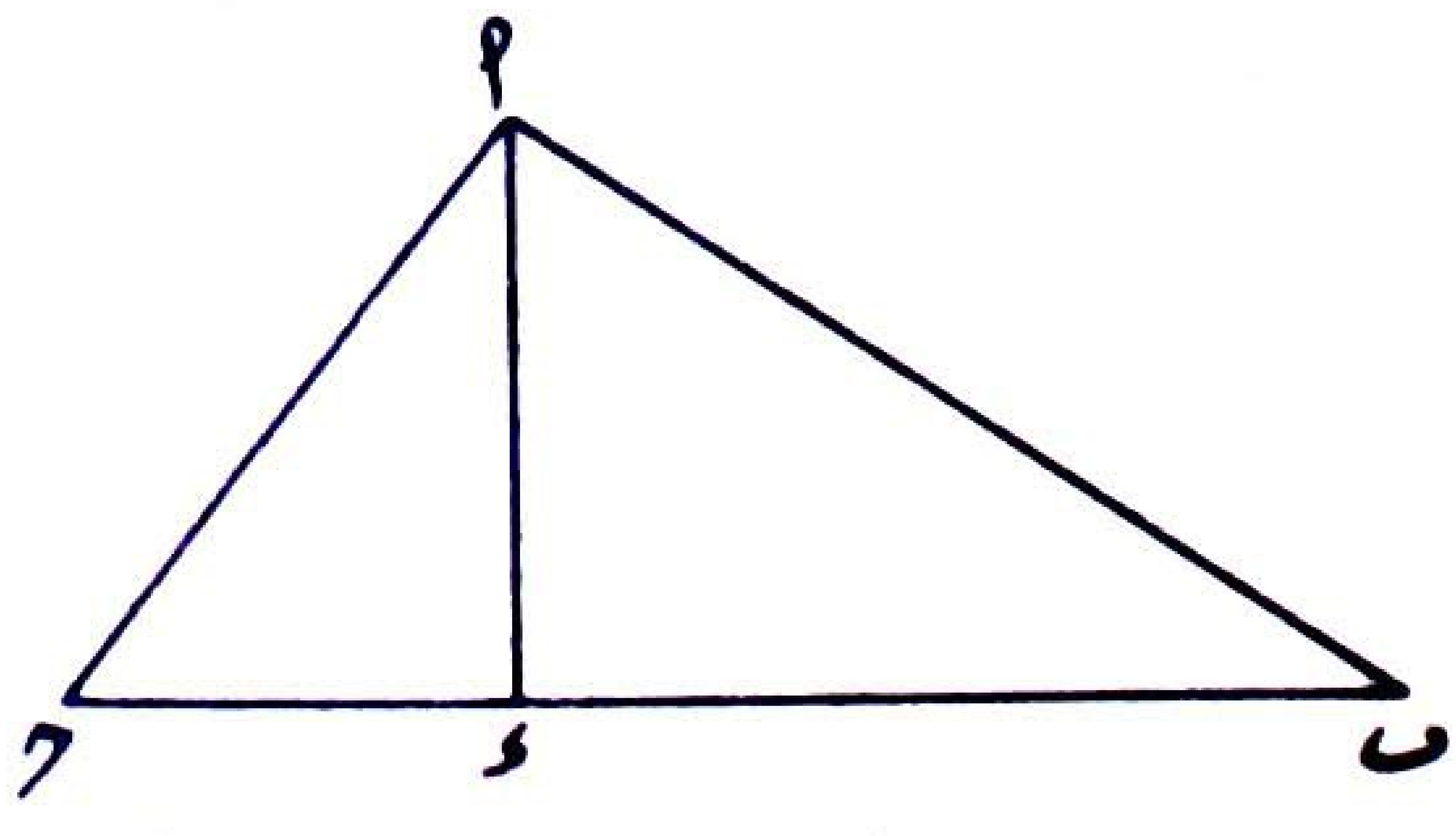
اب ح △ قائم الزاوية في ا انزل العمود اء على ب ح . أثبت أن

$\overline{\text{اء}}^2 = \text{بء} \times \text{ءح}$

المعطيات: اب ح △ قائم الزاوية في ا انزل العمود اء على ب ح الشكل ٢٥

المطلوب : اثبات أن :

$\overline{\text{اء}}^2 = \text{بء} \times \text{ءح}$



الشكل (٢٥)

البرهان : $\because \triangle$ ا ب د قائم الزاوية في د

$$\therefore \overline{\text{اد}}^{2} = \overline{\text{اب}}^{2} - \overline{\text{بد}}^{2}$$

، $\because \overline{\text{اب}}^{2} = \text{بد} \times \text{بحـ}$ (نتيجة فيثاغورث)

$$\therefore \overline{\text{اد}}^{2} = \text{بد} \times \text{بحـ} - \overline{\text{بد}}^{2}$$

$$= \text{بد} \left(\text{بحـ} - \text{بد} \right)$$

$$= \text{بد} \times \text{دحـ}$$

وهو المطلوب

تمرين (٤)

١ – س ص ع $\triangle$ قائم الزاوية في ص فاذا علم أن (أ) س ص = ٣ سم ، ص ع = ٤ سم ، احسب س ع ، (ب) س ص = ١٢ بوصة ، س ع = ١٣ بوصة احسب ص ع ، (حـ) ص ع = ٢ ياردة ، س ع = ٢٫٥ ياردة احسب س ص ، (ى) س ص = ٣ قدم ، س ع = $\frac{١٣}{٤}$ قدم احسب ص ع

٢ – سلم يرتكز بطرفه العلوي على حائط رأسي عند نقطة مرتفعه عن سطح الارض بمقدار ١٢ قدماً ويرتكز طرفـــه السفلي على الارض الافقية في نقطة تبعد عن الحائط بمقدار ٣٫٥ قدم – أوجد طول السلم .

٣ – أبحرت سفينة متجهة نحو الجنوب فقطعت مسافة ١٣٢ ميلاً ثم اتجهت نحو الغرب فقطعت مسافة ٢٢٤ ميلاً احسب بعد السفينة عن نقطة الابتداء.

٤ – ا ب حـ مثلث فيه ا ب = ١٧ سم ، ا حـ = ١٠ سم انزل العمود ا ى على ب حـ فقابله في ى فاذا كان ا ى = ٨سم فاوجد مساحة المثلث ا ب حـ

٥ – ا ب حـ مثلث فيه ∠ ا = ٩٠° ، ا ب = ٦ بوصة ، ا حـ = ٨ بوصة انزل العمود ا ى على ب حـ فلاقاه في ى اوجد :

أ – طول كل من ب ى ، ى حـ

ب – طول ا ى

حـ – العلاقة بين ا ى ^٢ ، ب ى × ى حـ

٦ – س ص ع مثلث فيه س ص = س ع = ٢٦سم ، ص ع = ٢٠ سم أوجد مساحة المثلث وأوجد طول العمود النازل من ص على س ع.

٧ – ا ب حـ مثلث متساوي الساقين فيه ا ب = ا حـ فاذا كانت قاعدته ب حـ = ١٢ سم وكل من ساقيه ١٠ سم أوجد :

أ – ارتفاع المثلث .

ب – مقدار الارتفاع النازل من ب على ا حـ

٨ – ل م ن مثلث قائم الزاوية في م فيه ل ن = ٣٤ بوصة فرضت نقطة مثل هـ على م ن بحيث كان م هـ = ١٢ سم ، ل هـ = ٢٠ سم أوجد طول ل م ثم مساحة المثلث ل ن هـ

٩ – رصدت سفينتان في وقت واحد ومن نقطة واحدة فوجد أن السفينة الاولى على بعد ٨٠٠ متراً في اتجاه الشمال الغربي ووجدت السفينة الثانية على بعد ١٥٠٠ متر في الجنوب الغربى أوجد البعد بين السفينتين في تلك اللحظة بالكيلو مترات .

١٠ – ا ب حـ مثلث فيه ا ب =١٧ سم ، ب حـ = ٢١ سم ، حـ ا = ١٠ سم أوجد ارتفاعيه النازلين من ا ، ب

١١ – ا ب حـ مثلث فيه ا ب = ٢٠ سم ، ب حـ = ٧ سم ، ا حـ = ١٥ سم أوجد أطوال ارتفاعاته الثلاثة .

١٢ – ا ب حـ مثلث ما اسقط العمود ا ى على ب حـ أو امتداده من أي جهة أثبت أن

$$\overline{\text{ا حـ}}^{٢} + \overline{\text{ب ى}}^{٢} = \overline{\text{ا ب}}^{٢} + \overline{\text{ى حـ}}^{٢}$$

١٣ – ا ب حـ مثلث قائم الزاوية في ا فيه ا حـ = ٧ ا ب . رسم حـ ى عمودي على ب حـ ويساويه أثبت أن ب ى = ١٠ ا ب

١٤ – أثبت أن في المثلث القائم الزاوية مجموع مربعي الضلعين المحيطين بالزاوية القائمة = ٤ أمثال المستقيم المتوسط المرسوم الى منتصف الوتر .

١٥ – في المثلث القائم الزاوية ٤ أمثال مجموع المربعين المنشأين على المستقيمين المتوسطين المرسومين من زاويتيه الحادتين = ٥ أمثال مربع الوتر .

١٦ – ا ب حـ مثلث متساوي الأضلاع . س نقطة على ب حـ بحيث :

ب س = $\frac{٣}{٨}$ ب حـ . أثبت أن ا س = $\frac{٧}{٨}$ ا ب

١٧ – ا ب حـ مثلث متساوي الأضلاع مد ب حـ بقدر نفسه الى ى ، مد ا ب بقدر نفسه الى هـ أثبت أن :

أولاً : $\overline{\text{ى ا}}^{٢} = ٣\,\overline{\text{ب حـ}}^{٢}$

ثانياً : $\overline{\text{هـ ى}}^{٢} = ٧\,\overline{\text{ب حـ}}^{٢}$

١٨ – ا ب حـ ى شكل رباعي قطراه ا حـ ، ب ى متقاطعان في م – ومتعامدان أثبت أن :

$$\overline{\text{ا ب}}^{٢} + \overline{\text{حـ ى}}^{٢} = \overline{\text{ب حـ}}^{٢} + \overline{\text{ا ى}}^{٢}$$

١٩ – ا ب حـ مثلث ما فرضت أي نقطة م وانزل منها الأعمدة م س ، م ص م ع على الأضلاع ب حـ ، حـ ا ، ا ب أو امتدادانها من أي جهـة على الترتيب أثبت أن :

$$\overline{\text{اع}}^{2} + \overline{\text{ب س}}^{2} + \overline{\text{حـ ص}}^{2} = \overline{\text{ا ص}}^{2} + \overline{\text{حـ س}}^{2} + \overline{\text{ب ع}}^{2}$$

٢٠ – ا ب حـ $\triangle$ قائم الزاوية في ب فيه ا ب = ب حـ ، ب هـ عمود نازل من ب على ا حـ أثبت أن : $\overline{\text{ا حـ}}^{2} = ٤\,\overline{\text{ب هـ}}^{2}$

٢١ – ا ب حـ ء معين وصل قطراه أثبت أن : $٤\,\overline{\text{ا ب}}^{2} = \overline{\text{ا حـ}}^{2} + \overline{\text{ب ء}}^{2}$

ملاحظة : يمكن كتابة التمرين السابق بالصيغة الآتيـة :

مجموع المربعات المنشأة على أضلاع المعين تـكافىء مجموع المربعين المنشأين على القطرين .

٢٢ ـ ا ب حـ $\triangle$ قائم الزاوية في حـ فيه $\angle$ ا = $\frac{١}{٢}$ $\angle$ ب برهن أن

$\overline{\text{ا حـ}}^{2} = ٣\,\overline{\text{ب حـ}}^{2}$

٢٣ – ا ب حـ $\triangle$ قائم الزاوية في حـ فيه $\angle$ ا = ٣٠° مد حـ ب على استقامته إلى ء بحيث كان ب ء = ب حـ برهن على أن $\overline{\text{ا ء}}^{2} = ٧\,\overline{\text{ب حـ}}^{2}$

٢٤ – ا ب حـ $\triangle$ منفرج الزاوية في حـ رسم الارتفاع ا ء فاذا كان حـ ء = ب حـ برهن على أن : (ا ب + ا حـ) (ا ب – ا حـ) = $٣\,\overline{\text{ب حـ}}^{2}$

٢٥ ـ دائرتان متقاطعتان طول وترهما المشترك = ٢٤ سم وقطر أحدهما ٧٤سم وقطر الاخرى ٤٠ سم ـ أوجد البعد بين مركزيها .

٢٦ ـ ا ب حـ ء مستطيل أخذت النقط هـ ، و ، س ، ح على أضلاعه اب ، ب حـ ، حـ ء ، ء ا ـ أو امتداداتها من أي جهة على الترتيب بحيث كان هـ و = س ح أثبت أن :ـ

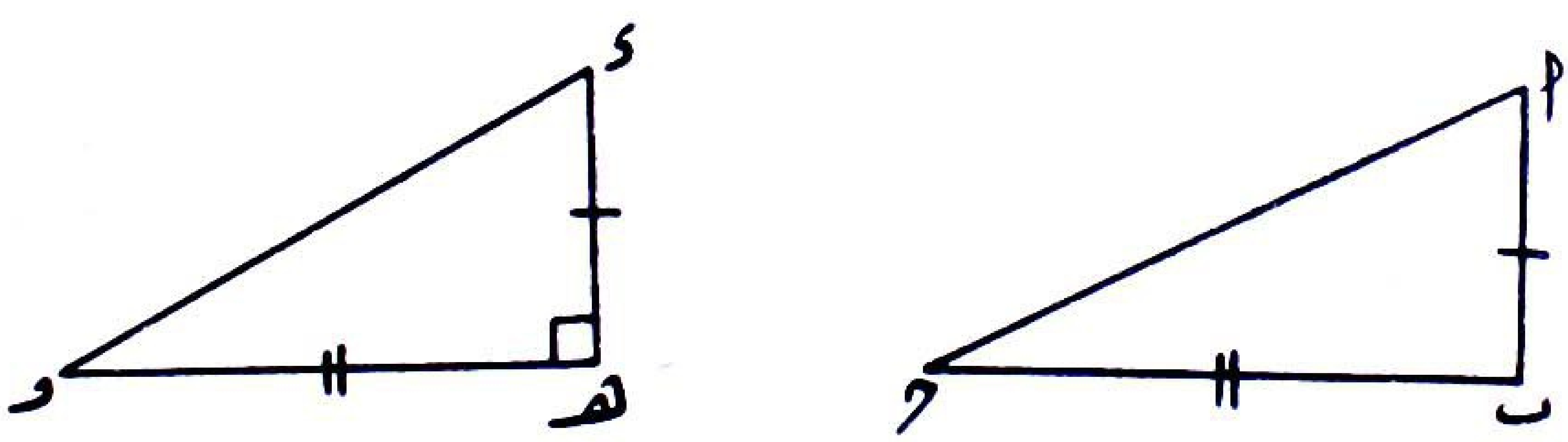
$$\overline{\text{ا س}}^{2} + \overline{\text{حـ ح}}^{2} = \overline{\text{ا و}}^{2} + \overline{\text{حـ هـ}}^{2}$$

٢٧ ـ ا ب حـ ء مستطيل م نقطة داخله أو خارجه أثبت أن :

$$\overline{\text{ا م}}^{2} + \overline{\text{حـ م}}^{2} = \overline{\text{ب م}}^{2} + \overline{\text{ء م}}^{2}$$

عكس نظرية فيثاغورث

إذا كان مربع أحد أضلاع مثلث يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين كانت الزاوية المقابلة لهذا الضلع قائمة .



الشكل (٢٦)

المعطيات : ا ب حـ مثلث فيه $\overline{\text{ا حـ}}^{2} = \overline{\text{ا ب}}^{2} + \overline{\text{ب حـ}}^{2}$ الشكل (٢٦)

المطلوب : اثبات أن $\angle$ ب = ٩٠°

العمـــل : نرسم المثلث ء هـ و قائم الزاوية في هـ . بحيث ان ء هـ = اب ، هـ و = ب حـ

البرهان : $\overline{\text{ء و}}^{٢} = \overline{\text{ء هـ}}^{٢} + \overline{\text{هـ و}}^{٢}$ (لأن ∠ هـ = ق عملا)

$= \overline{\text{ا ب}}^{٢} + \overline{\text{ب حـ}}^{٢}$ (لان ء هـ = ا ب ، هـ و = ب حـ عملا)

$= \overline{\text{ا حـ}}^{٢}$ فرضا

∴ ء و = ا حـ

∴ △△ ا ب حـ ، ء هـ و

فيهما:
- ا ب = ء هـ عملا
- ، ب حـ = هـ و عملا
- ، ا حـ = ء و برهانا

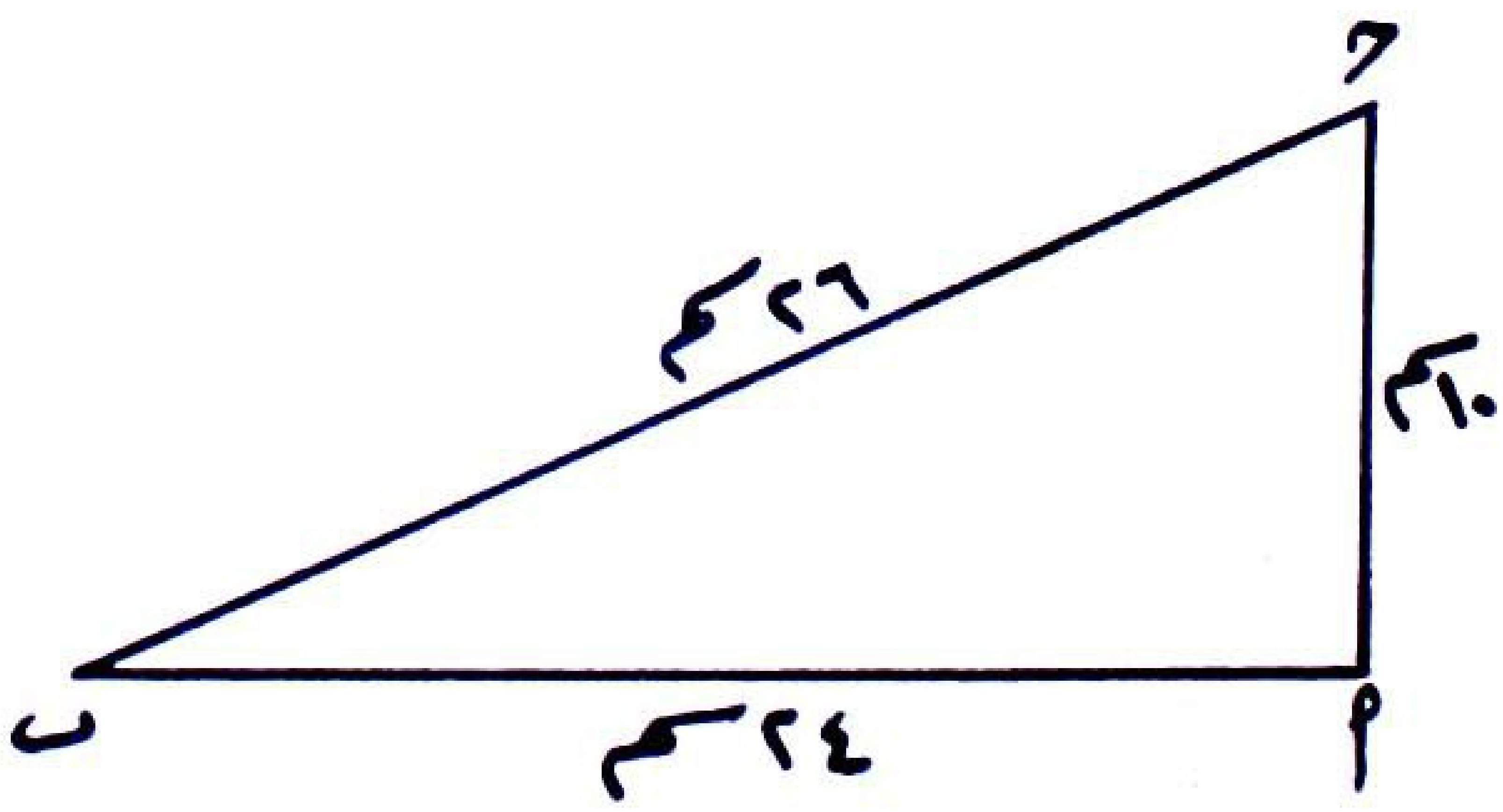
∴ ينطبق المثلثان وينتج ان :

∠ ا ب حـ = ∠ ء هـ و = ق

وهو المطلوب

تمرين محلول (١) :

ا ب حـ △ فيه ا ب = ٢٤ سم ، ا حـ = ١٠ سم ، ب حـ = ٢٦ سم
الشكل (٢٧) اثبت ان ∠ ا = ق



الشكل (٢٧)

البرهان : $\overline{\text{ا ب}}^{٢} + \overline{\text{ا ح}}^{٢} = ٢٤^{٢} + ١٠^{٢} = ٦٧٦$ سم^{٢}

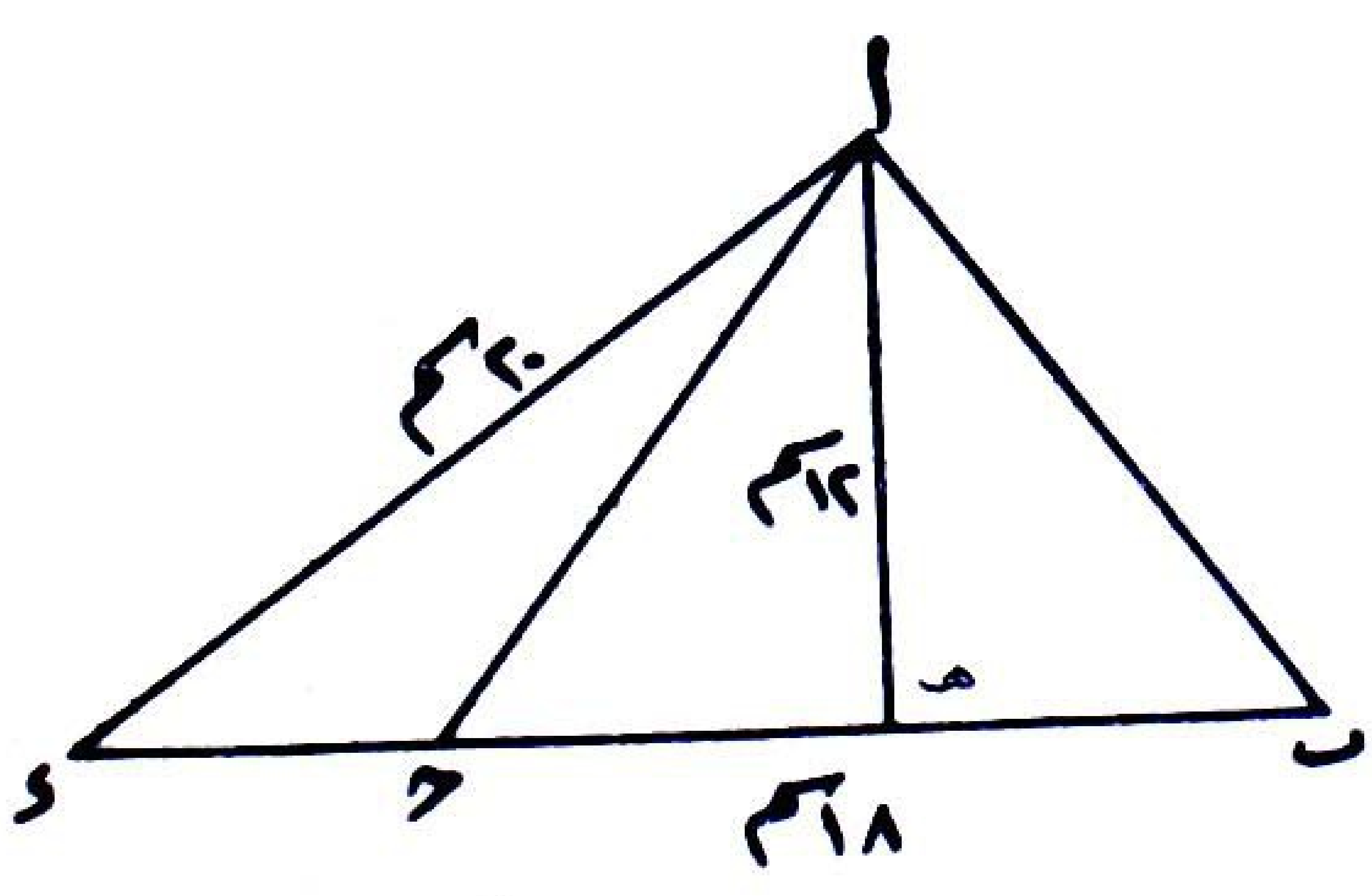
، $\overline{\text{ب ح}}^{٢} = ٢٦^{٢} = ٦٧٦$ سم^{٢}

وبالمقارنة ينتج $\overline{\text{ا ب}}^{٢} + \overline{\text{ا ح}}^{٢} = \overline{\text{ب ح}}^{٢}$

$\therefore \angle$ ا = ق وهو المطلوب

تمرين محلول (٢) :

ا ب ح مثلث متساوي الساقين فيه ا ب = ا ح ، ب ح = ١٨ سم وطول العمود النازل من ا على ب ح = ١٢ سم . أخذت نقطة ء على امتداد ب ح بحيث ان ا ء = ٢٠ سم برهن أن $\angle$ ب ا ء = ق



الشكل (٢٨)

المعطيات : ا ب ح $\triangle$ فيه ا ب = ا ح

ب ح = ١٨ سم ، ا هـ = ١٢ سم ، ا ء = ٢٠ سم الشكل (٢٨)

المطلوب : اثبات أن $\angle$ ب ا ء = ٩٠°

البرهان : $\because$ ا هـ $\perp$ ب ح ، ا ب ح $\triangle$ متساوي الساقين.

∴ هـ منتصف ب حـ

∴ ب هـ = ٩ سم

$\triangle$ ا هـ ب قائم الزاوية في هـ

∴ $\overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{اهـ}}^2 + \overline{\text{بهـ}}^2$

= ١٤٤ + ٨١ = ٢٢٥

∴ ا ب = $\sqrt{٢٢٥}$ = ١٥ سم

∵ $\triangle$ ا هـ ى قائم الزاوية في هـ

∴ $\overline{\text{هـى}}^2 = \overline{\text{اى}}^2 - \overline{\text{اهـ}}^2$

= ٤٠٠ − ١٤٤ = ٢٥٦ سم^2

∴ هـ ى = $\sqrt{٢٥٦}$ = ١٦ سم

∴ ب ى = ٩ + ١٦ = ٢٥ سم

في $\triangle$ ا ب ى :

$\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{اى}}^2 = ١٥^2 + ٢٠^2 = ٦٢٥$

، $\overline{\text{بى}}^2 = ٢٥^2 = ٦٢٥$

∴ $\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{اى}}^2 = \overline{\text{بى}}^2$

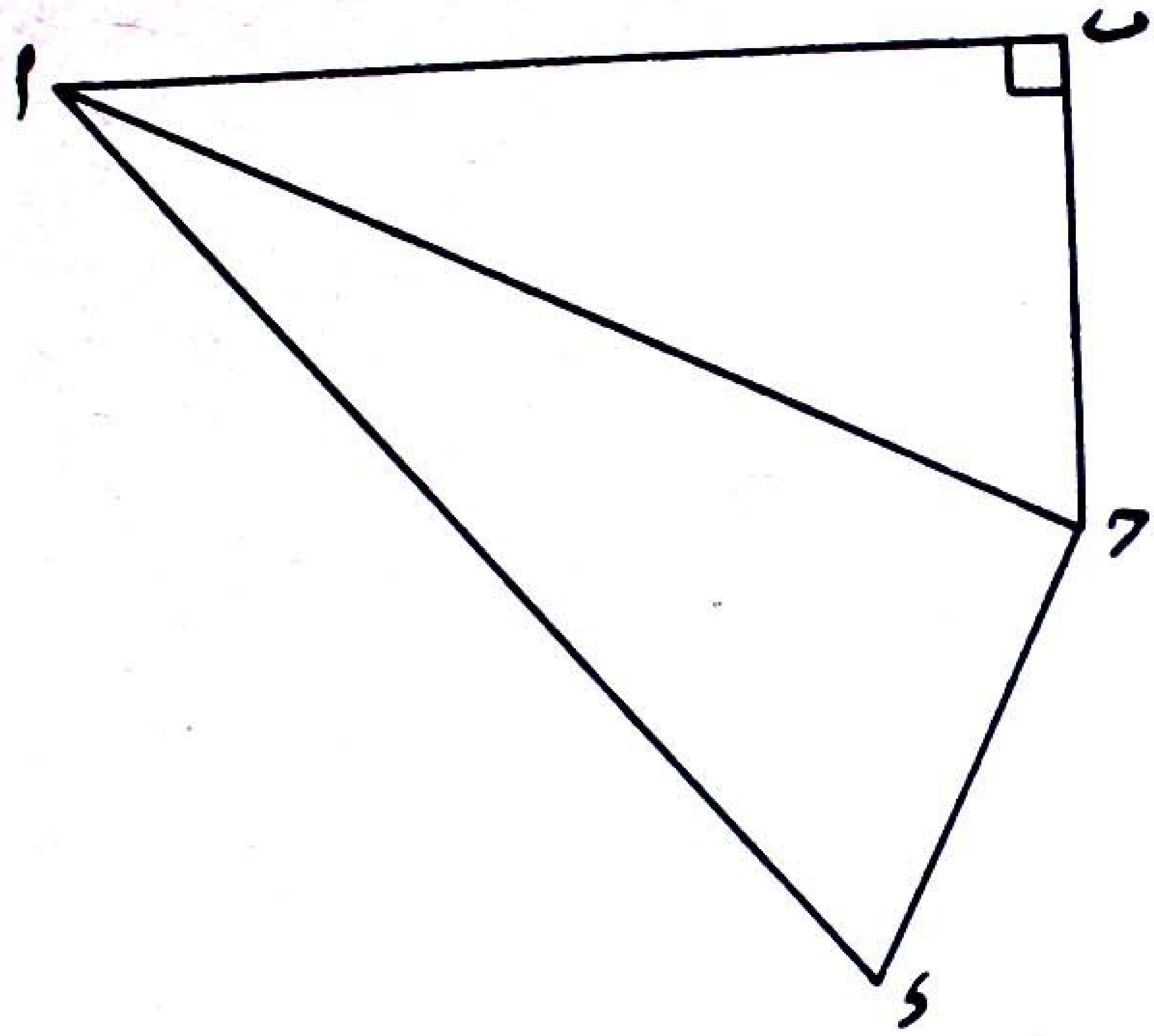
∴ $\angle$ ب ا ى = ق

وهو المطلوب

تمرين محلول (٣) :

ا ب حـ ى شكل رباعي فيه $\angle$ ب = ق فاذا كان مجموع المربعات المنشأة

على ا ب ، ب حـ ، حـ ء = المربع المنشأ على ا ء فبرهن على ان $\angle$ ا حـ ء قائمة



الشكل (٢٩)

المعطيات : $\angle$ ب = ق ، $\overline{\text{ا ب}}^{٢} + \overline{\text{ب حـ}}^{٢} + \overline{\text{حـ ء}}^{٢} = \overline{\text{ا ء}}^{٢}$

الشكل(٢٩)

المطلوب : اثبات ان $\angle$ ا حـ ء = ق

البرهان : $\because \angle$ ب = ق $\quad \therefore \overline{\text{ا حـ}}^{٢} = \overline{\text{ا ب}}^{٢} + \overline{\text{ب حـ}}^{٢}$ (فيثاغورث)

لكن $\underbrace{\overline{\text{ا ب}}^{٢} + \overline{\text{ب حـ}}^{٢}} + \overline{\text{حـ ء}}^{٢} = \overline{\text{ا ء}}^{٢}$

$\therefore \overline{\text{ا حـ}}^{٢} + \overline{\text{حـ ء}}^{٢} = \overline{\text{ا ء}}^{٢}$

$\therefore \angle$ ا حـ ء = ق (عكس نظرية فيثاغورث)

وهو المطلوب

تمارين (٥)

١ – استنتج أي المثلثات الآتية قائم الزاوية اذا كانت اطوال اضلاعها

ا) ٦ ، ٨ ، ١٠ ب) ٧ ، ٦ ، ٨

حـ) ٦,٥ ، ٢,٥ ، ٦ ء) ٨ ، ٥ ، ١٧

هـ) ١١ ، ٦٠ ، ٦١ و) ١٢ ، ١٦ ، ٢٠

ز) ٣٣ ، ٥٦ ، ٦٥ ح) ٩ ، ١٠ ، ١٣

ط) ٢١ ، ٧٥ ، ٦٣ ي) ١٢ ، ١٣ ، ٥

٢ – حقق ان ٢ س ، س^{٢} – ١ ، س^{٢} + ١ حيث س > ١ أطوال اضلاع مثلث قائم الزاوية

٣ – ا ب حـ △ فيه اب = ١٠,٥ سم ، ب حـ = ٨,٤ سم ، ا حـ = ٦,٣ سم اثبت انه قائم الزاوية في حـ ـ اوجد طول العمود النازل من حـ على اب

٤ – ا ب حـ ء شكل رباعي فيه ∠ ب قائمة برهن على انه اذا كان مجموع المربعين المنشأين على ا ب ، ب حـ مكافئا مجموع المربعين المنشأين على ا ء ، حـ ء كانت ∠ ء قائمة

٥ – س ص ع △ قائم الزاوية في ع فيه س ع = ٣٦ سم ، ص ع = ٢٧ سم مد ص ع الى ء فاذا كان س ء = ٦٠ سم فاثبت ان ∠ ص س ء = ق

٦ – ا ب حـ مثلث انشىء خارجه وعلى اضلاعه ب حـ ، حـ ا ، ا ب باعتبار انها اوتار المثلثات القائمة الزاوية المتساوية الساقين س ب حـ ، ص ا حـ ، ع ا ب فاذا كان س ب = ١٠ سم ، ص حـ = ٨ سم ، ع ا = ٦ سم فاثبت ان ع ا ص مستقيم

٧ – المثلثان ا ب حـ ، ب ء حـ يشتركان في القاعدة ب حـ فاذا كان ا حـ = ٣ سم ، ا ب = ٤ سم ، ب ء = ١٢ سم ، ء حـ يساوي ١٣ سم وكانت ∠ ب ا حـ قائمة فاثبت ان ∠ ء ب حـ قائمة

٨ – ه و ل مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في ه ، رسم على و ل المستطيل و ل ء ع بحيث كان و ع = و ه ثم نصف ع ء في س ونصف ل ء في ص اثبت ان ∠ و س ص قائمة

٩ – س ص ع ل شكل رباعي فيه ∠ ص = ق انزل العمودان س م ، ع ن على القطر ص ل فاذا كان $\overline{\text{س م}}^2 + \overline{\text{ص ن}}^2 = \overline{\text{ل م}}^2 + \overline{\text{ل ن}}^2$

فبرهن على ان ∠ ل = ق

١٠ – ا ب ح مثلث قائم الزاوية في ا انزل ا ء عموداً على ب ح لاقاه في ء برهن ان

$$2\,\overline{\text{ء ا}}^2 + \overline{\text{ء ب}}^2 + \overline{\text{ء ح}}^2 = \overline{\text{ب ح}}^2$$

١١ – ا ب ح ء مستطيل ، ن نقطة خارجة انزلت الاعمدة ن س ، ن ل ، ن ع ، ن ص على الاضلاع ا ب ، ب ح ، ح ء ، ء ا أو امتداداتها على الترتيب فاذا كان $\overline{\text{ن س}}^2 + \overline{\text{ن ل}}^2 + \overline{\text{ن ع}}^2 + \overline{\text{ن ص}}^2$ تساوي $\overline{\text{ا ح}}^2$

فبرهن على ان :

∠ ا ن ح = ق

١٢ – م ن ل مثلث ما انزل م ه عمودي على ن ل لاقاه في ه وكان :

$$2\,\overline{\text{ه م}}^2 + \overline{\text{ه ن}}^2 + \overline{\text{ه ل}}^2 = \overline{\text{ن ل}}^2$$

برهن على ان :

△ م ن ل قائم الزاوية في م

نظرية فيثاغورث واستخدامها في ايجاد الجذر التربيعي لاعداد ليست مربعات كاملة

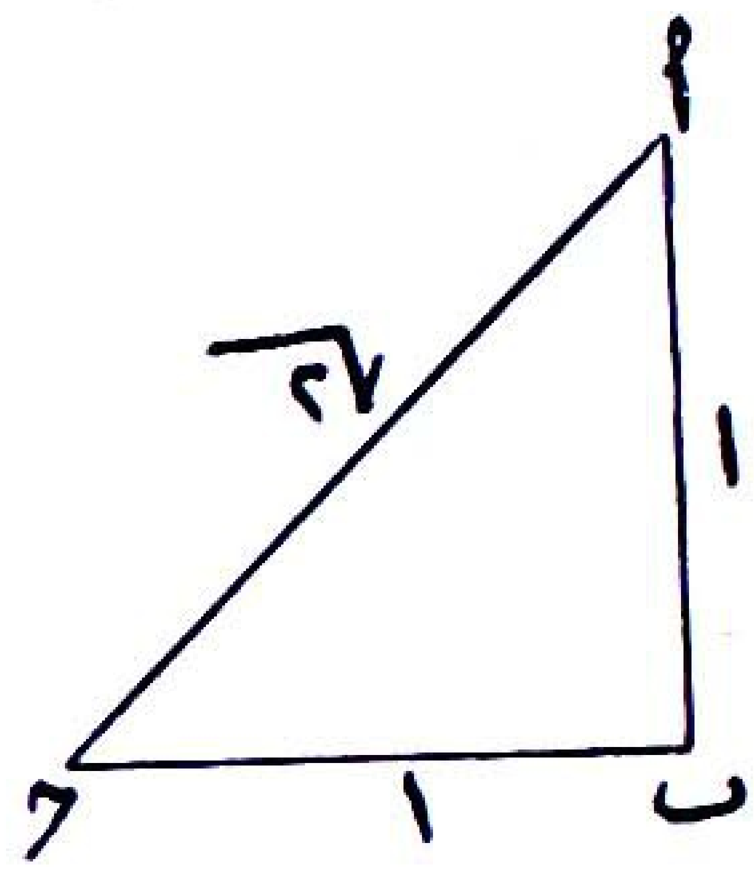
مثال (١) :

اوجد قيمة $\sqrt{2}$ بالطريقة الهندسية

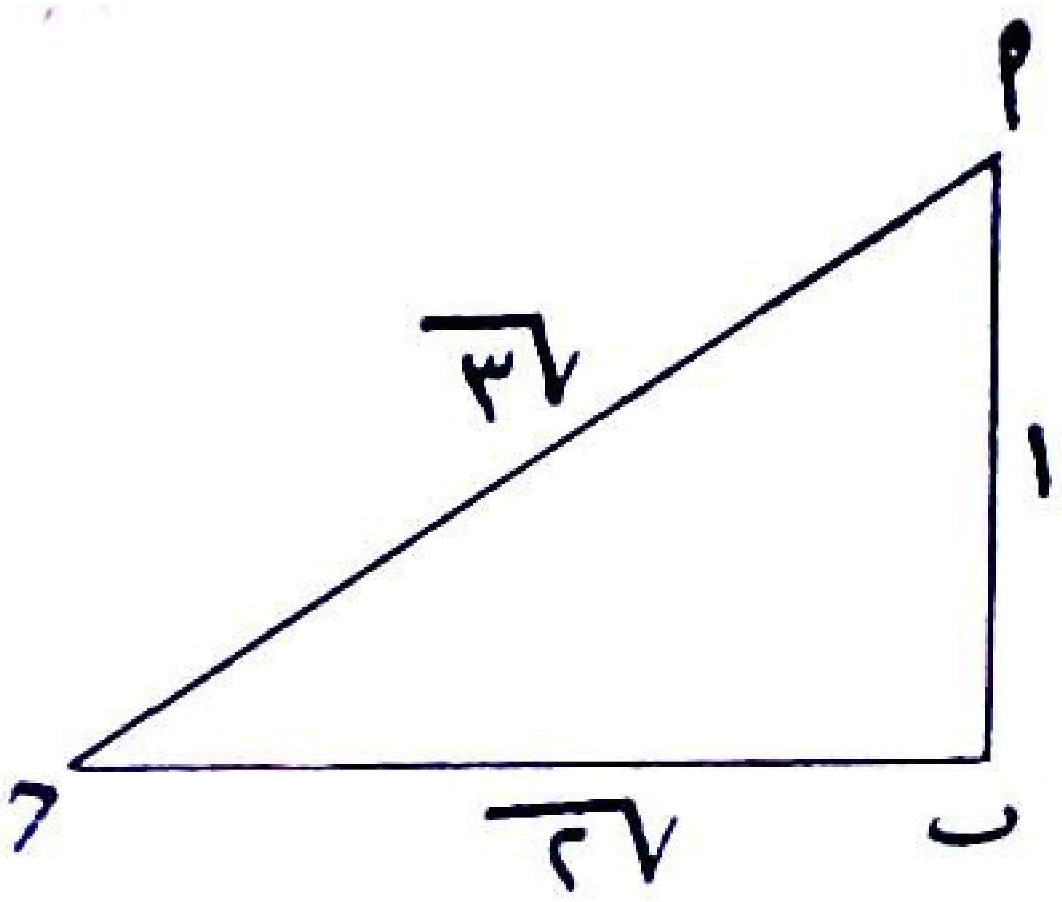
العمل : نرسم مثلثا قائم الزاوية ا ب ح فيه ا ب = ب ح = الوحدة (شكل ٣٠)

فيكون طول ا ح = $\sqrt{٢}$ لان $\overline{\text{ا ح}}^{٢} = \overline{\text{ا ب}}^{٢} + \overline{\text{ب ح}}^{٢}$

اي $\overline{\text{ا ح}}^{٢} = ١ + ١ = ٢ \therefore \text{ا ح} = \sqrt{٢}$



الشكل (٣٠)



الشكل (٣١)

مثال (٢) :

اوجد قيمة $\sqrt{٣}$ بالطريقة الهندسية

العمل : نرسم المثلث ا ب ح القائم الزاوية في ب بحيث ان ا ب = ١ ، ب ح = $\sqrt{٢}$ الشكل (٣١)

فيكون طول ا ح = $\sqrt{٣}$ لأن $\overline{\text{ا ح}}^{٢} = \overline{\text{ا ب}}^{٢} + \overline{\text{ب ح}}^{٢}$

$= ١ + (\sqrt{٢})^{٢}$

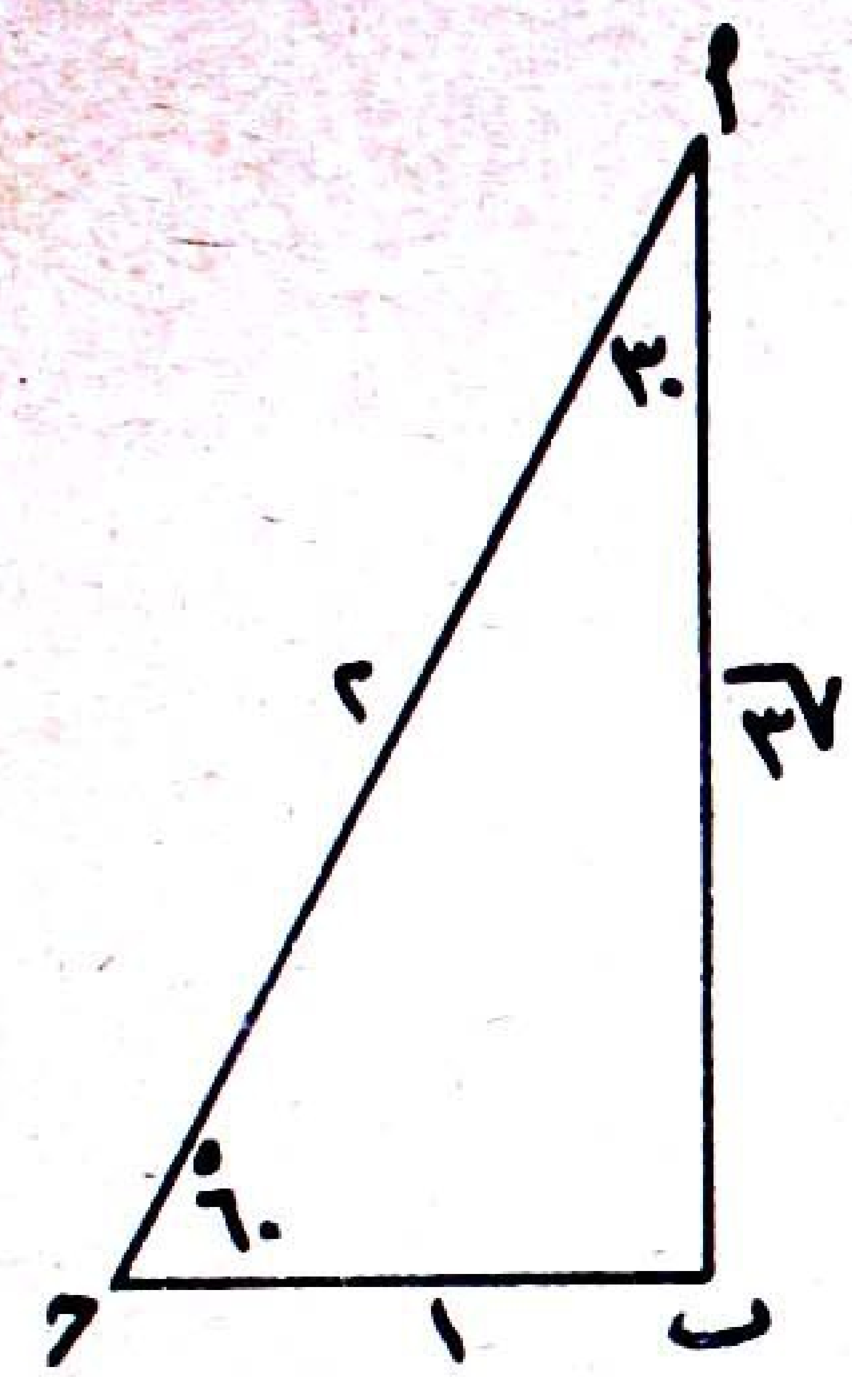
$= ١ + ٢ = ٣$

$\therefore \text{ا ح} = \sqrt{٣}$

حل آخر

العمل : ١ ـ نرسم $\triangle$ ا ب ح القائم الزاوية في ب بحيث يكون ب ح = الوحدة ،

ا ح = ٢ من هذه الوحدة (الشكل ٣٢) فيكون طول ا ب = $\sqrt{٣}$ لأن



$$\overline{\text{ا ب}}^{٢} = \overline{\text{ا ح}}^{٢} - \overline{\text{ب ح}}^{٢}$$

$$= ٤ - ١ = ٣$$

$$\therefore \text{ا ب} = \sqrt{٣}$$

الشكل (٣٢)

مثال (٣) :

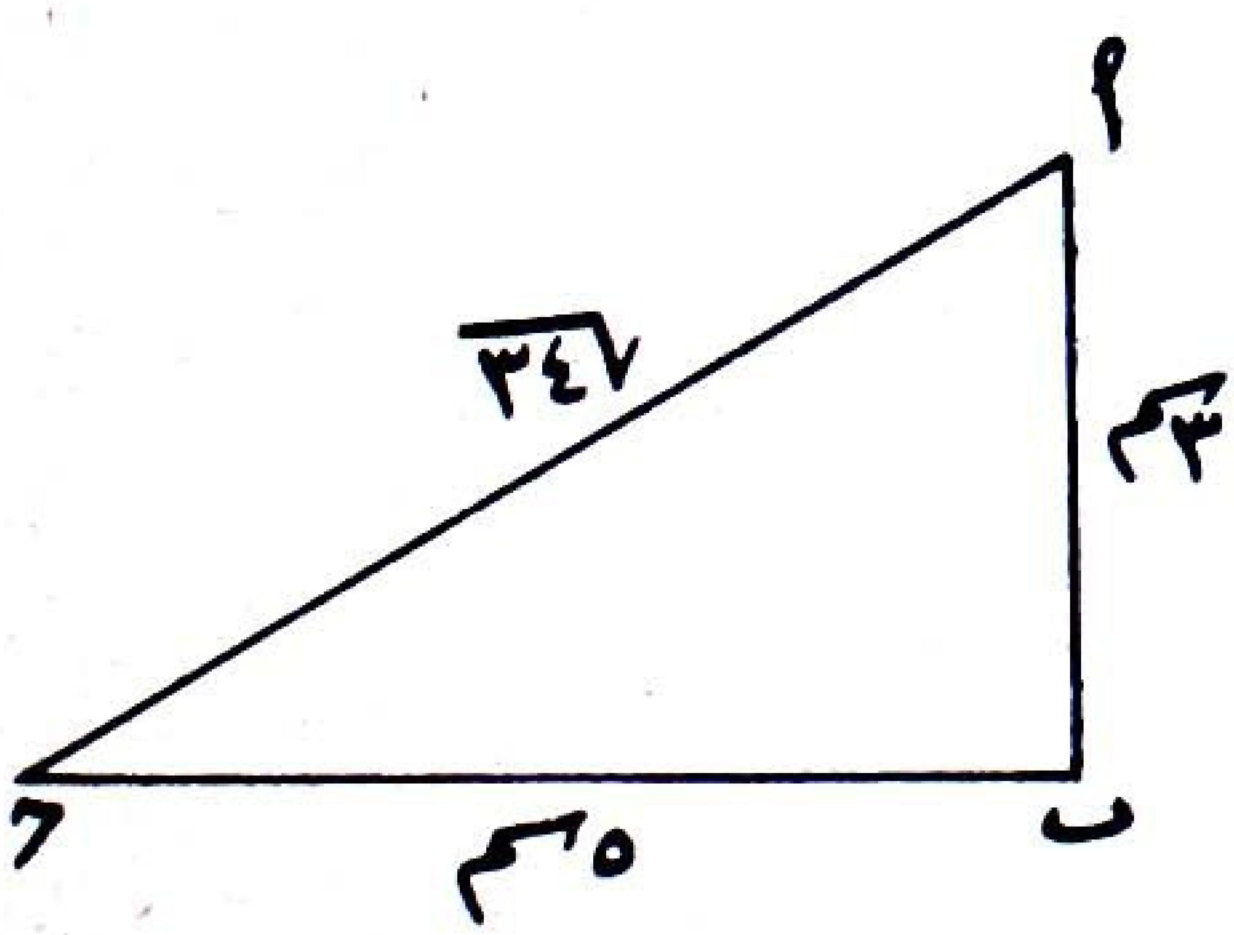
أوجد قيمة $\sqrt{٣٤}$

العمل : $٣٤ = ٣^{٢} + ٥^{٢}$

نرسم مثلثاً قائم الزاوية

فيه ا ب = ٣ سم ،

ب ح = ٥ سم (الشكل ٣٣)



$$\therefore \overline{\text{ا ح}}^{٢} = (٣)^{٢} + (٥)^{٢}$$

$$= ٩ + ٢٥ = ٣٤$$

$$\therefore \text{ا ح} = \sqrt{٣٤}$$

الشكل (٣٣)

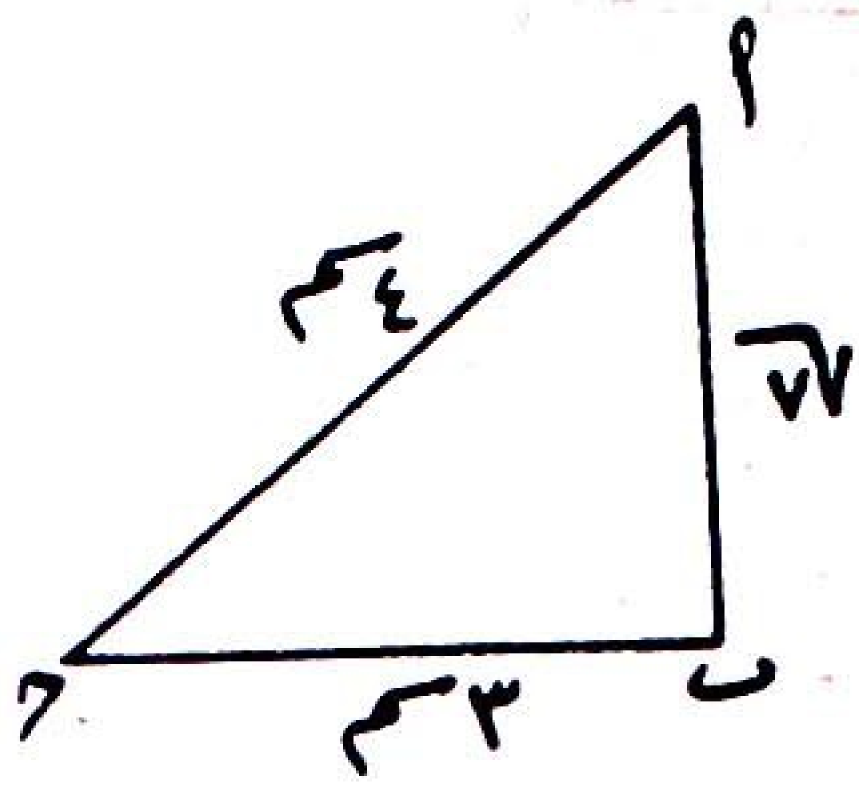
مثال (٤) :

أوجد قيمة $\sqrt{٧}$

العمل : $\because$ ٧ = $(٤)^{٢}$ − $(٣)^{٢}$ نرسم مثلثاً قائم الزاوية فيه

ب حـ = ٣ سم ، ا حـ = ٤ سم

(الشكل ٣٤).



الشكل (٣٤)

$\therefore$ $\overline{\text{ا ب}}^{\,٢}$ = ١٦ − ٩ = ٧

$\therefore$ ا ب = $\sqrt{٧}$

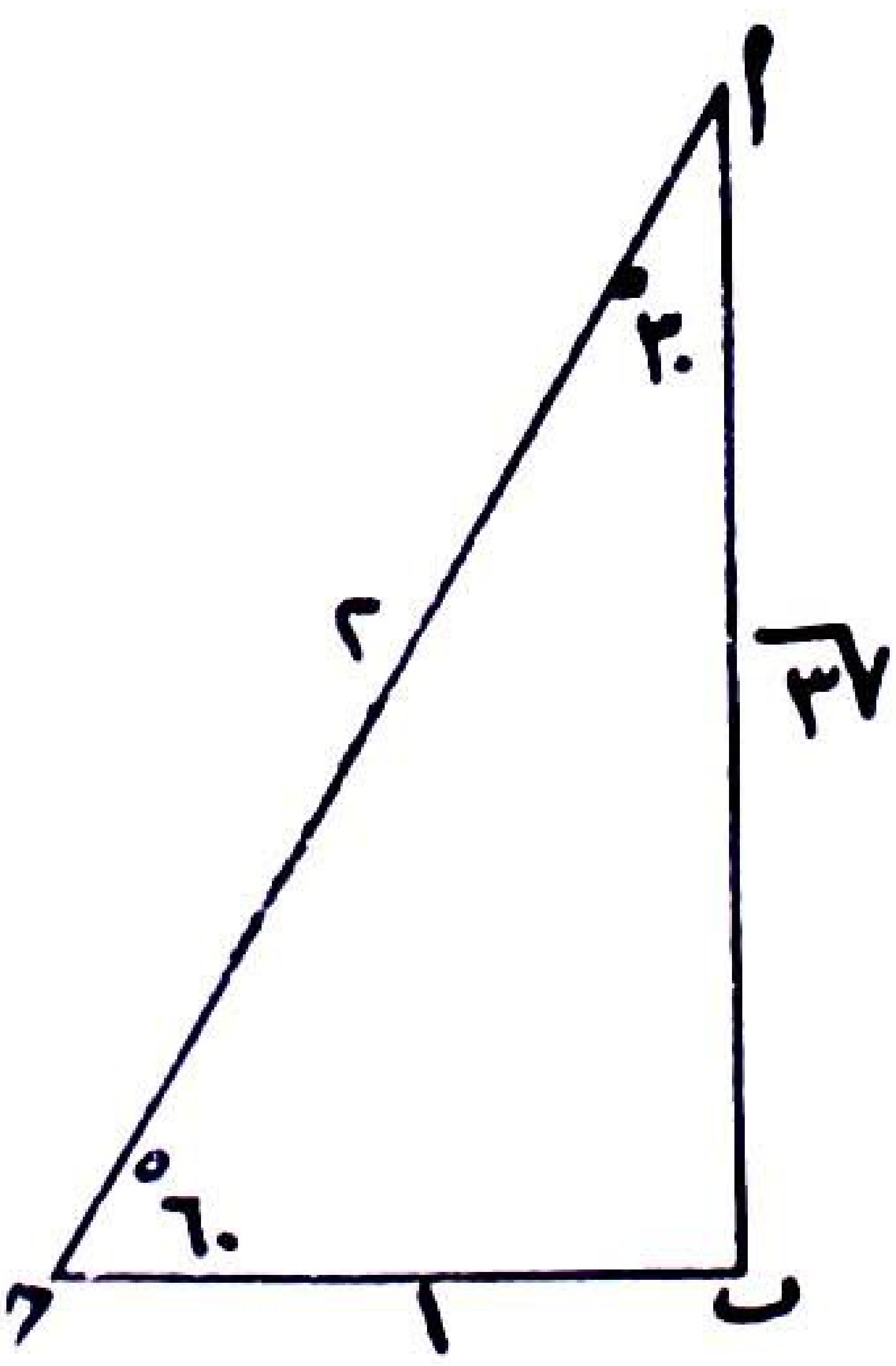
المثلث الثلاثيني الستيني

المثلث القائم الزاوية الذي احدى زاويتيه الحادتين = ٣٠° يسمى بالمثلث الثلاثيني الستيني (الشكل ٣٥) ولهذا المثلث خواص هامة جداً وهي :

١ ـ الضلع المقابل للزاوية ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ لوتر (وهذه النتيجة درست بالمرحلة المتوسطة)

٢ ـ إذا كان أحد ضلعي القائمة في المثلث القائم الزاوية = $\frac{١}{٢}$ الوتر كانت الزاوية المقابلة لهذا الضلع = ٣٠°

٣ ـ إذا كان الضلع المقابل للزاوية ٣٠° = الوحدة ، يكون الوتر = ٢ من نفس هذه الوحدة



الشكل (٣٥)

٤ ـ (وباستخدام نظرية فيثاغورث) مربـع الضلع المقابل للزاوية ٦٠° (ا ب

في الرسم $\overline{ا\ ب}^{٢}$) = $(٢)^{٢} - (١)^{٢} = ٣$

∴ الضلع المقابل للزاوية ٦٠° = $\sqrt{٣}$ من الوحدات

٥ ـ النسبة بين أطوال أضلاع المثلث الثلاثيني الستيني هي ١ : $\sqrt{٣}$: ٢

حيث أن ١ رمز لطول الضلع المقابل للزاوية ٣٠°

، $\sqrt{٣}$ رمز لطول الضلع المقابل للز وية ٦٠°

، ٢ رمز لطول الضلع المقابل للزاوية ٩٠°

(أي الوتر) أنظر الشكل (٣٥)

٦ ـ إذا كانت النسبة بين أضلاع مثلث هي ١ : $\sqrt{٣}$: ٢ كان المثلث ثلاثيني ستيني (عكس القاعدة السابقة في ٤)

ملاحظة (١) :

انظر في الشكل (٣٥)

إذا علم طول ب حـ فإن ا حـ = ٢ ب حـ ، ا ب = ب حـ × $\sqrt{٣}$

» » » ا حـ » ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ا حـ ، ا ب = $\frac{١}{٢}$ ا حـ × $\sqrt{٣}$

» » » ا ب » ب حـ = ا ب × $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، ا حـ = ا ب × $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

ملاحظة (٢) :

∵ $\sqrt{٤} = ٢$

∴ $\sqrt{٤} \times \sqrt{٤} = ٢ \times ٢ = ٤$

، $\sqrt{٢٥} \times \sqrt{٢٥} = ٥ \times ٥ = ٢٥$

وبالمثل $\sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = ٢$ ، $\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = ٣$

، $\sqrt{١٣} \times \sqrt{١٣} = ١٣$ وهكذا . . . .

من ذلك نستنتج أن :

(١) $(\sqrt{٣})^{٢} = ٣$ ، (ب) $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)^{٢} = \frac{١}{٣}$ ،

(حـ) $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} = \frac{٣}{٤}$

تمارين عامة (٦)
على نظرية فيثاغورث وعكسها

١ - ا ب حـ △ قائم الزاوية في ا ، ى نقطة ما على ا ب ، هـ نقطة اخرى على ا حـ برهن ان $\overline{\text{ب هـ}}^{٢} + \overline{\text{حـ ى}}^{٢} = \overline{\text{ى هـ}}^{٢} + \overline{\text{ب حـ}}^{٢}$

٢ - ا ب حـ مثلث متساوي الساقين رسم من حـ العمود حـ ى على الساق ا ب برهن على أن :

$\overline{\text{ا ب}}^{٢} + \overline{\text{ب حـ}}^{٢} + \overline{\text{حـ ا}}^{٢} = \overline{\text{ب ى}}^{٢} + ٢\,\overline{\text{ا ى}}^{٢} + ٣\,\overline{\text{حـ ى}}^{٢}$

٣ - ا ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب . نصف ب حـ في ى برهن على أن :

$\overline{\text{ا حـ}}^{٢} = \overline{\text{ا ى}}^{٢} + \frac{٣}{٤}\,\overline{\text{ب حـ}}^{٢}$

٤ - ا ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، ى منتصف الوتر ا حـ أثبت أن :

$\overline{\text{ا ب}}^{٢} + \overline{\text{ب حـ}}^{٢} + \overline{\text{ا حـ}}^{٢} = ٨\,\overline{\text{ب ى}}^{٢}$

٥ - ا ب حـ ى شكل رباعي فيه القطران ا حـ ، ب ى متعامدان . أثبت أن

$\overline{\text{ا ب}}^{٢} + \overline{\text{حـ ى}}^{٢} = \overline{\text{ا ى}}^{٢} + \overline{\text{ب حـ}}^{٢}$

٦ - ا ب حـ ى مستطيل ، س نقطة داخله أثبت أن :

$\overline{\text{س ا}}^{٢} + \overline{\text{س حـ}}^{٢} = \overline{\text{س ب}}^{٢} + \overline{\text{س ى}}^{٢}$

٧ — ا ب حـ ء شكل رباعي فيه $\angle$ ب قائمة ،

$\overline{\text{ا ء}}^2 = \overline{\text{ا ب}}^2 + \overline{\text{ب حـ}}^2 + \overline{\text{حـ ء}}^2$ اثبت ان حـ ء عمودي على القطر ا حـ

٨ — ا ب حـ ء مربع رسم على ضلعه ب حـ خارجاً عن المربع المثلث ب هـ حـ متساوي الساقين وقائم الزاوية في هـ . فاذا كان طول ضلع المربع ٢ ل

فأثبت ان $\overline{\text{ء هـ}}^2 = ١٠ \text{ ل}^2$

٩ — ا ب حـ مثلث فيه ا ب = ا حـ انزل العمود ا ء على ب حـ أثبت ان

اولا : $\overline{\text{ب ء}}^2 = \frac{١}{٤} \overline{\text{ب حـ}}^2$

ثانياً : $\overline{\text{ا ب}}^2 + \overline{\text{ا حـ}}^2 = ٢ \overline{\text{ا ء}}^2 + \frac{١}{٢} \overline{\text{ب حـ}}^2$

١٠ — س ص ع مثلث متساوي الاضـلاع ، هـ نقطة على ص ع بحيث كان

ص هـ $= \frac{١}{٣}$ ص ع . والمطلوب اثبات ان :

$٩ \overline{\text{س هـ}}^2 = ٧ \overline{\text{ص س}}^2$

١١ — ا ب حـ مثلث.م ملتقى ارتفاعاته برهن على ان :

$\overline{\text{م ا}}^2 + \overline{\text{ب حـ}}^2 = \overline{\text{م ب}}^2 + \overline{\text{ا حـ}}^2 = \overline{\text{م حـ}}^2 + \overline{\text{ا ب}}^2$

١٢ — ا ب حـ ء شكل رباعي فيه $\angle$ ا ب حـ = ٩٠° ، ا ب يساوي ٤ سم ، ب حـ = ٣ سم ، حـ ء = ١٣ سم ، ء ا = ١٢ سم اثبت ان $\angle$ حـ ا ء قائمة .

١٣ – ا ب حـ مثلث فيه ا ب = ٩ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، حـ ا = ١٥ سم رسمت دائرة مركزها ا ونصف قطرها ا ب . اثبت ان ب حـ يمس الدائرة (أي ان ب حـ عمودي على نصف القطر ا ب)

١٤ – ا ب حـ مثلث متساوي الأضلاع مد ب حـ على استقامته إلى د بحيث كان ٤ حـ د = ٣ ب حـ أثبت ان ١٦ $\overline{\text{ا د}}^{2}$ = ٣٧ $\overline{\text{ا ب}}^{2}$

١٥ – ا ب حـ مثلث . م نقطة داخلة انزلت الاعمدة م د ، م هـ ، م و على ب حـ ، حـ ا ، ا ب على الترتيب اثبت ان :

$\overline{\text{ب د}}^{2}$ + $\overline{\text{حـ هـ}}^{2}$ + $\overline{\text{ا و}}^{2}$ = $\overline{\text{د حـ}}^{2}$ + $\overline{\text{هـ ا}}^{2}$ + $\overline{\text{و ب}}^{2}$

١٦ – ا ب حـ مثلث فيه ا ب = ١٥ سم ، ا حـ = ١٣ سم والعمود النازل من ا على ب حـ يساوي ١٢ سم ، احسب طول ب حـ

اولا : اذا كانت زاوية حـ حادة

ثانياً : اذا كانت زاوية حـ منفرجة

١٧ – د هـ و مثلث نصف د هـ في ل . وانزل العمود ل م على هـ و فإذا كان $\overline{\text{د و}}^{2}$ = $\overline{\text{م و}}^{2}$ − $\overline{\text{هـ م}}^{2}$ فاثبت ان : $\angle$ هـ د و قائمة

١٨ – ا ب حـ مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه ١٠ سم . اوجد مساحته اذا علمت ان $\sqrt{٣}$ = ١٫٧٣٢ تقريباً

الباب الثالث

المحل الهندسي

اذا تحركت نقطة هندسية بلا قيد أو شرط في مستوى الورقة مثلا فإنها ترسم خطوطا تكون منكسرة تارة أو منحنية تارة اخرى أومستقيمة وتتقاطع هذه الخطوط كيفما اتفق .

اما اذا تحركت النقطة في مستو بحيث تكون مقيدة بشرط خاص فانها لاتكون طليقة الحركة بل ترسم اشكالا هندسية مستوية ونوع هذه الاشكال يتوقف على شرط الحركة .

امثلة عملية توضح الحركة المقيدة لنقطة ما

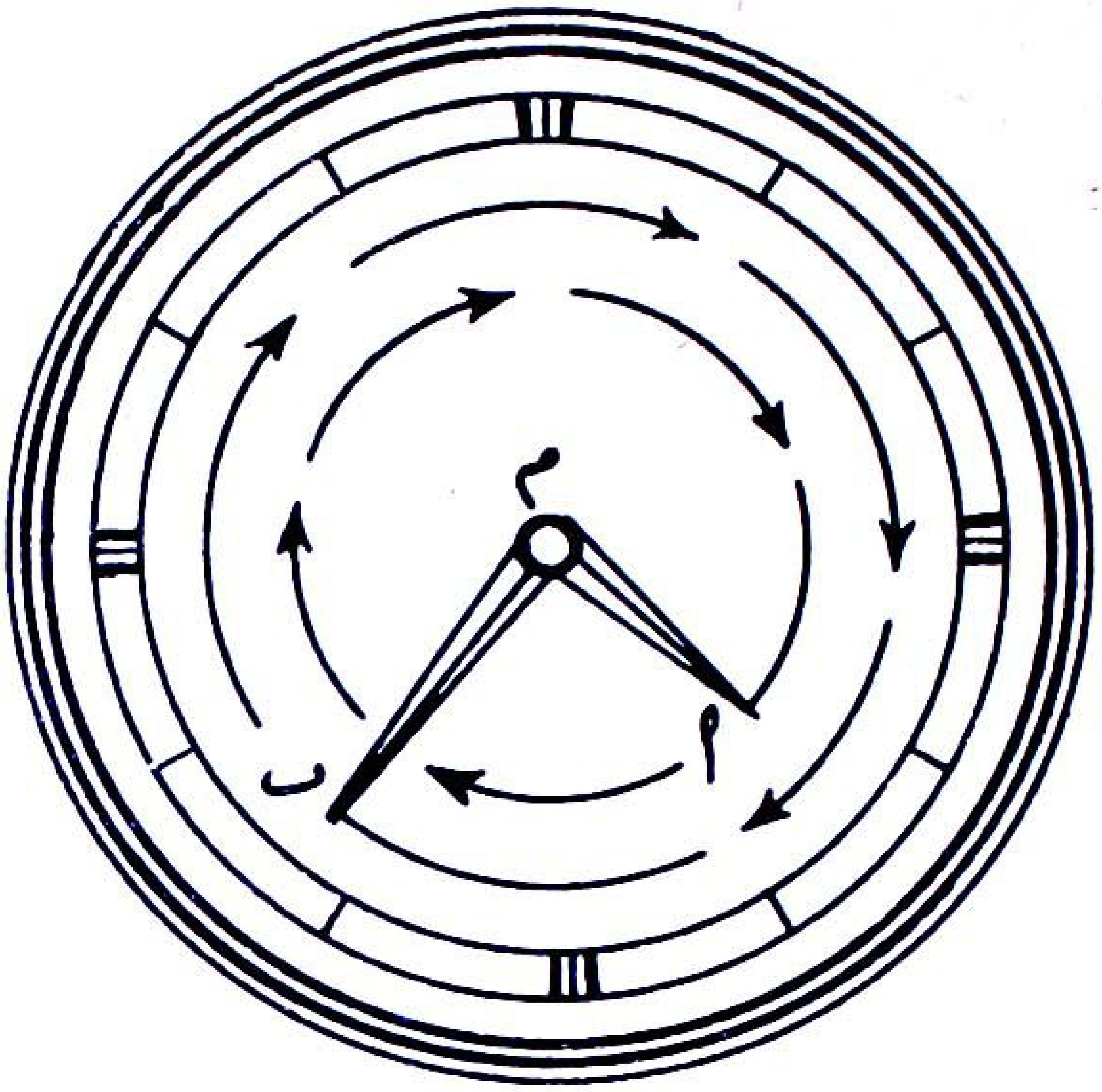
مثال (١) :

انظر الى ساعة يدك تجد ان كلا من عقربى الساعات والدقائق يتحركان حركة مقيدة .

١ – طرف عقرب الساعات ا يتحرك بشرط ان يكون بعده عن محور الساعة م دائماً ثابتا ولذا فإنه يسيرعلى محيط دائرة نصف قطرها م ا الشكل (٣٦)

٢ – طرف عقرب الدقائق ب يتحرك بشرط ان يكون بعده عن محور الساعة م دائماً ثابتا ولذا فانه يسير على محيط دائرة نصف قطرها م ب

فيكون محيط الدائرة في هاتين الحالتين هو **المحل الهندسي** لطرفي عقرب

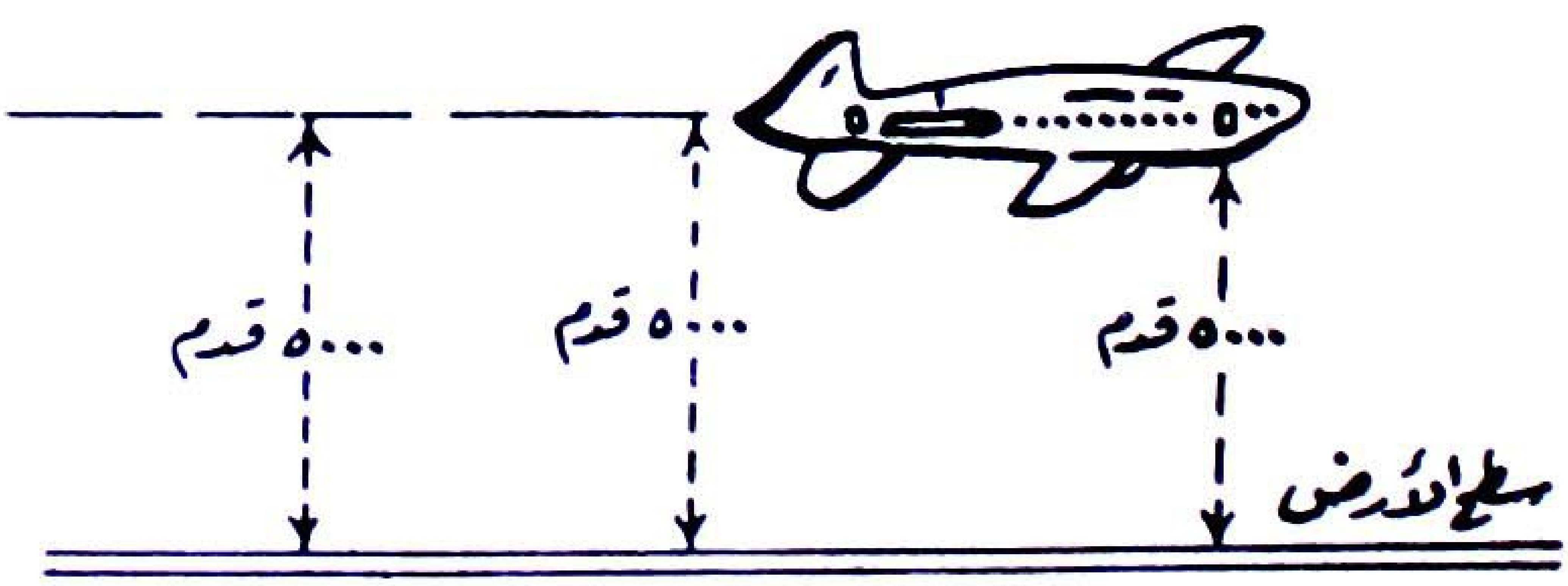


الشكل (٣٦)

الدقائق وعقرب الساعات حيث ان هاتين النقطتين تسيران مقيدتين بشرط وان المسار الذي تعينه هاتين النقطتين يسمى بالمحل الهندسي للنقطتين المتحركتين .

مثال (٢):

طائرة تطير موازية لسطح الارض وعلى ارتفاع ٥ آلاف قدم عن سطح البحر الشكل (٣٧)



الشكل (٣٧)

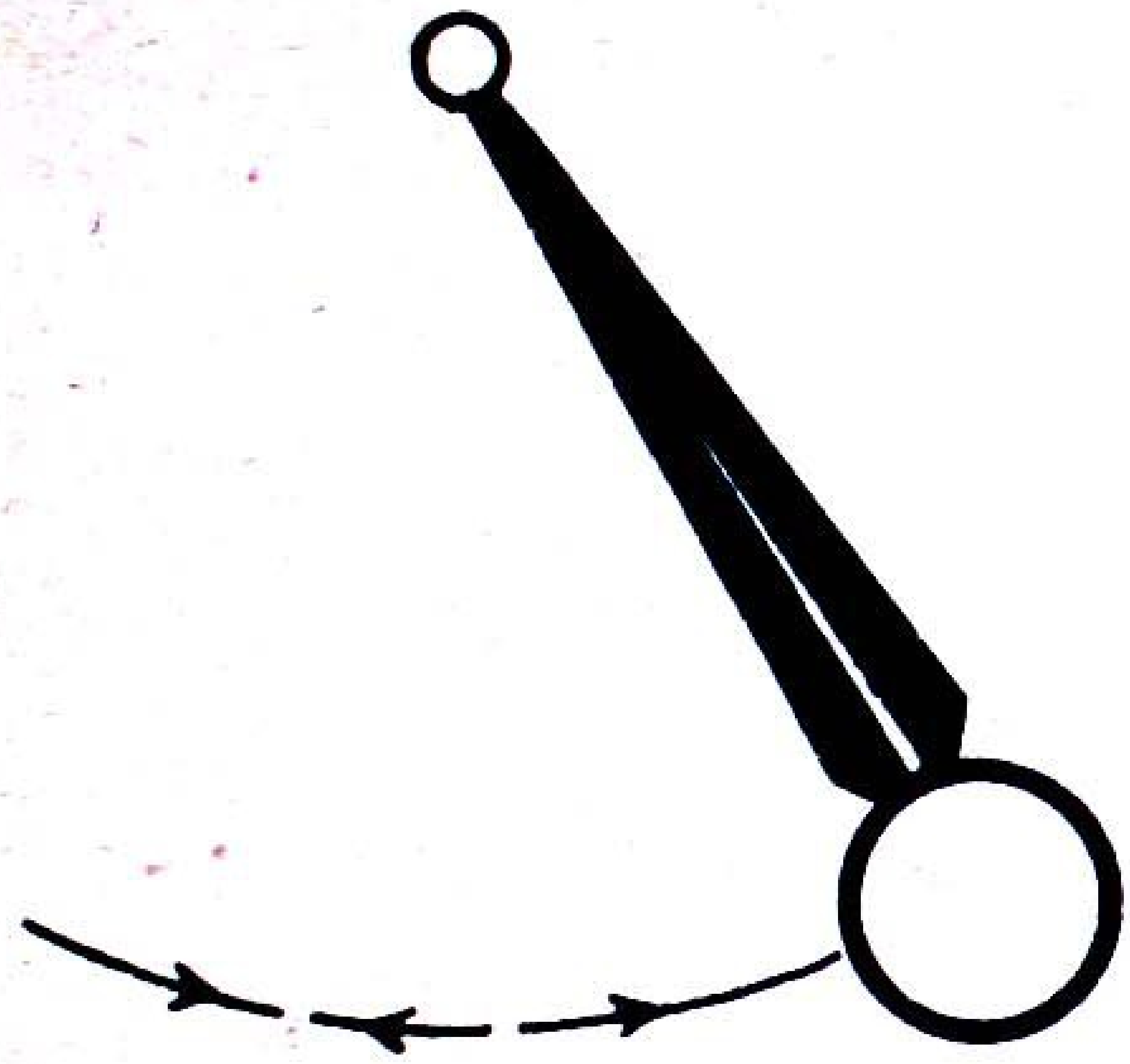
فمسار هذه الطائرة هو خط مستقيم يوازي سطح الارض المستوية أو سطح البحر ويسمى هذا الخط المستقيم المحل الهندسي لتحرك الطائرة .

مثال (٣) :

نهاية نواس الساعة المعلقة على حائط يسير على قوس من دائرة وهو مقيد في سيره بأنه أثناء حركته يكون دائماً على بعد ثابت (طول النواس) من نقطة التعليق الشكل (٣٨) .

فالمحل الهندسي لطرف النواس هو قوس من محيط دائره .

مما سبق من الامثلة يمكن استنتاج أن :



مسار النواس (البندول)

الشكل (٣٨)

تعريف : المحل الهندسي لنقطة تتحرك بشرط معين هوشكل هندسي بحيث:

١ ـ كل نقطة من نقط الشكل تفي بالشرط المعين

٢ ـ كل نقطة تفي بالشرط المعين تقع على هذا الشكل

كيفية ايجاد المحل الهندسي

عرفنا ان الشكل الهندسي الناتج من تحرك نقطة (في مستو) حركة مقيدة عبارة عن خط او اكثر من الخطوط المستقيمة او المنحنية اومحيط دائرة .

∴ لايجاد المحل الهندسي نتبع غالباً الخطوات التالية :

١ ـ تفرض عدة أوضاع متقاربة للنقطة المتحركة تفي كل منها بالشرط المعين .

٢ ـ يرسم الخط الذي يمر بهذه الاوضاع .

٣ ـ تحدد خواص الخط الناتج بدقة هندسيا فنحصل على المحل الهندسي .

٤ ـ نتحقق مما يأتي :

ا ـ ان كل نقطة عليه تفي بالشرط المعين .

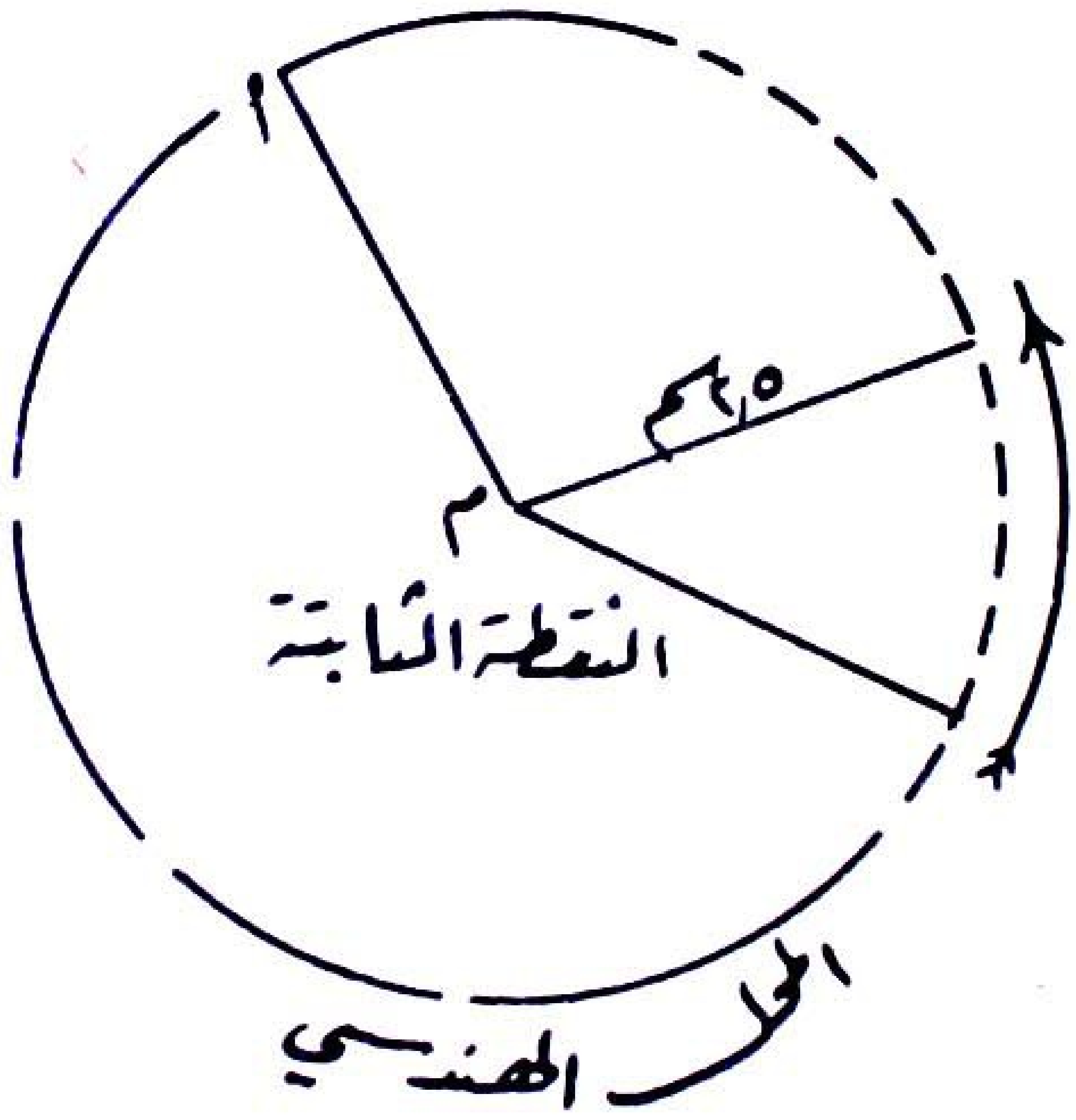
ب ـ ان كل نقطة تفي بالشرط المعين تقع عليه .

الحقائق الاساسية للمحل الهندسي

اولا : المحل الهندسي لحركة نقطة بعدها ثابت عن نقطة معلومة هو محيط دائرة مركزها النقطة المعلومة ونصف قطرها يساوي البعد الثابت .

∵ بعد النقطة المتحركة ثابت عن النقطة المعلومة .

∴ النقطة المتحركة تتحرك على محيط دائرة مركزها النقطة الثابتة .



الشكل (٣٩)

ونصف قطرها البعد بين النقطتين حيث أن أي نقطة من نقط المحيط تفي بالشرط المطلوب .

اذا فرضنا ان النقطة المتحركة هي (ا) وانها تتحرك بحيث تبعد دائماً عن النقطة الثابتة (م) ببعد قدره ٢,٥ سم الشكل (٣٩) .

∴ المحل الهندسي لهذه النقطة هو محيط دائرة مركزها م ونصف قطرها (م ا) يساوي ٢,٥ سم

التحقيق :

١ ـ أي نقطة على المحيط تفي بالشرط المعين .

٢ – أي نقطة خارج او داخل محيط الدائرة لاتفي بالشرط المعين .

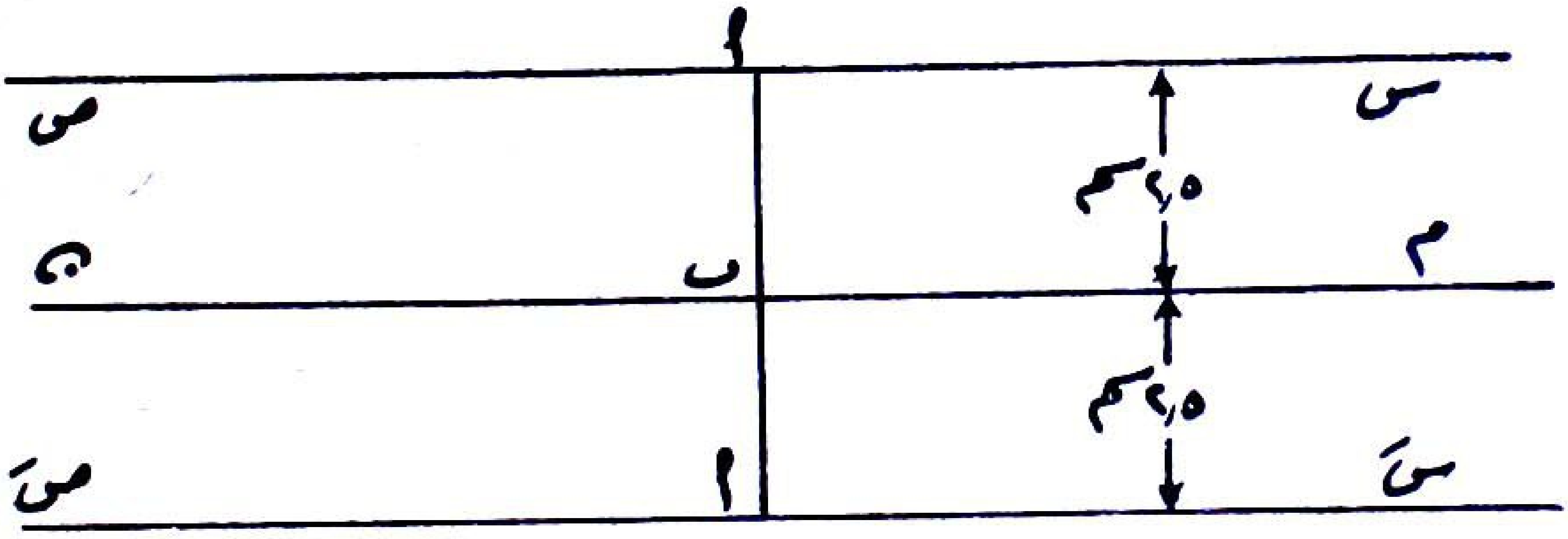
ثانيا : المحل الهندسي لنقطة تتحرك على بعد ثابت بالنسبة لمستقيم ثابت (معلوم)

هو مستقيمان يوازيان المستقيم المفروض وبعداهما عنه يساوي البعد الثابت .

البرهان : ليكن المستقيم المعلوم م ى والمستقيمان الموازيان له س ص ، س′ ص′ يبعدان عنه بمقـدار البعد الثابت (٢٫٥ سم مثلاً) شكل (٤٠)

يبرهن بسهولة :

١ – أن أي نقطة مثل ا تبعد عن م ى بمقـدار ٢٫٥ سم تقع على س ص اذا كانت ا في الجهة العليا ، أو على س′ ص′ اذا كانت ا في الجهة السفلى .



الشكل (٤٠)

٢ – أي نقطة واقعة على س ص أو على س′ ص′ تبعد عن م ى بالمقدار الثابت ٢٫٥ سم .

∴ المحل الهندسي للنقطة التي تبعد عـن المستقيم م ى بعداً ثابتاً هو مستقيمان س ص ، س′ ص′ يوازيان المستقيم م ى ويبعـد كل منها عنـه بالمقدار الثابت .

ثالثاً :

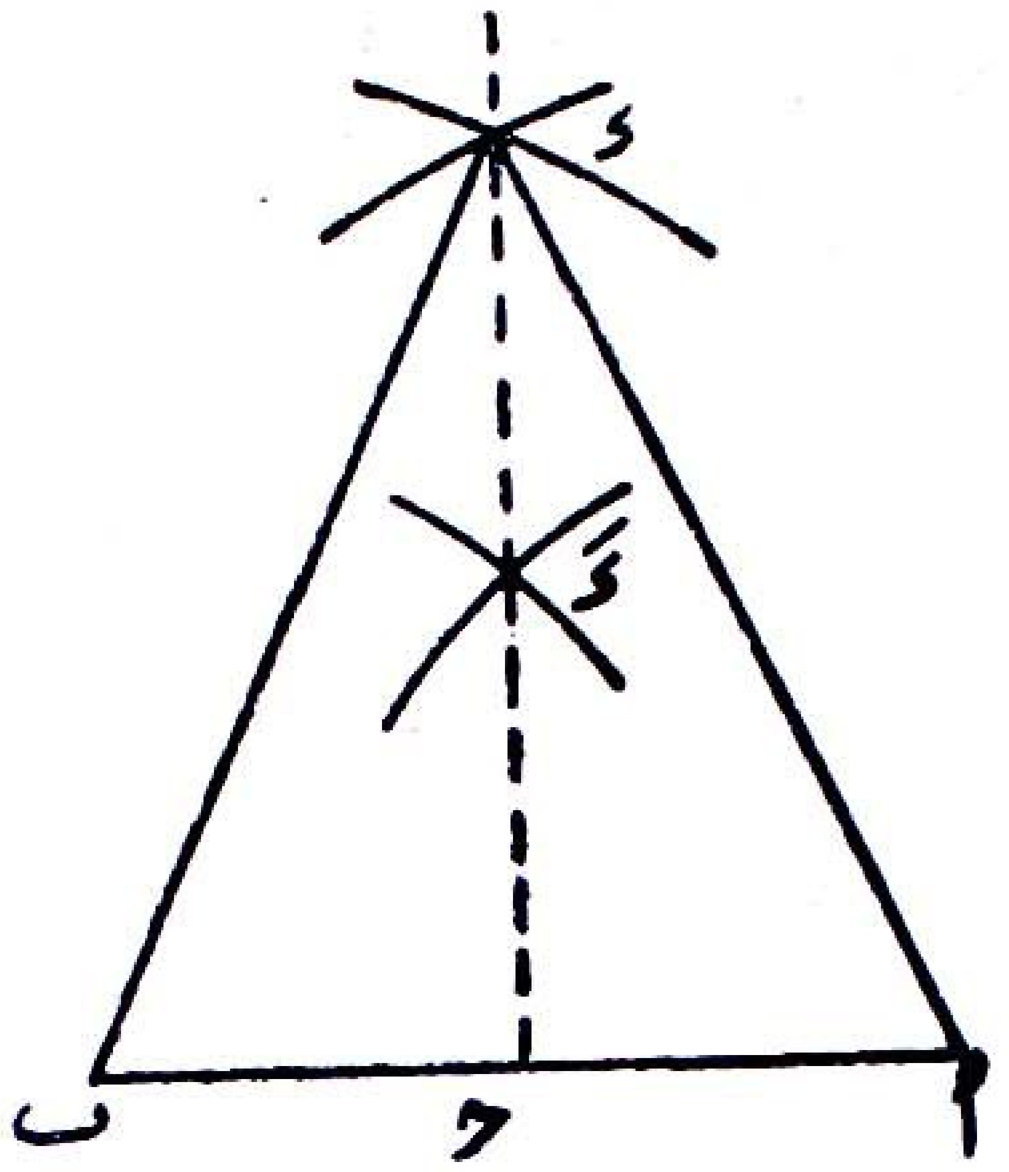
المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون بعداها عن نقطتين معلومتين متساويين

هو العمود على المستقيم الواصل بين النقطتين المعلومتين من منتصفه

المعطيات : ا ، ب نقطتان ثابتتان ، ى نقطة متحركة بحيث ان ى ا = ى ب دائما الشكل (٤١)

المطلوب : اثبات ان العمود المنصف للمستقيم ا ب هو المحل الهندسي للنقطة ى

البرهان : ننصف ا ب في نقطة حـ فتكون احدى نقط المحل الهندسي المطلوب لأن حـ ا = حـ ب



الشكل (٤١)

ثم نفرض ان احدى نقط المحل الهندسي نقطة ى أو ى' نصل ى ا ، ى ب فيكون ى ا = ى ب

في $\triangle\triangle$ ا حـ ى ، ب حـ ى

فيهما	حـ ا = حـ ب	عملا
	ى حـ	مشترك
	ى ا = ى ب	فرضا

∴ يتطابق $\triangle\triangle$ وينتج أن $\angle$ ى حـ ا = $\angle$ ى حـ ب

وبما انهما متجاورتان ∴ كل منهما = ق

∴ ى حـ عمود على ا ب من منتصفه حـ

وبالمثل لو اخذنا النقطة ى' بحيث ى' ا = ى' ب يمكن اثبات ان ى' تقع على العمود ى حـ أو امتداده بالبرهان السابق - كما يمكن اثبات ان كل نقطة على العمود ى حـ تكون على بعدين متساويين من ا ، ب .

∴ **المحل الهندسي المطلوب هو العمود على المستقيم ا ب من منتصفه**

رابعاً :

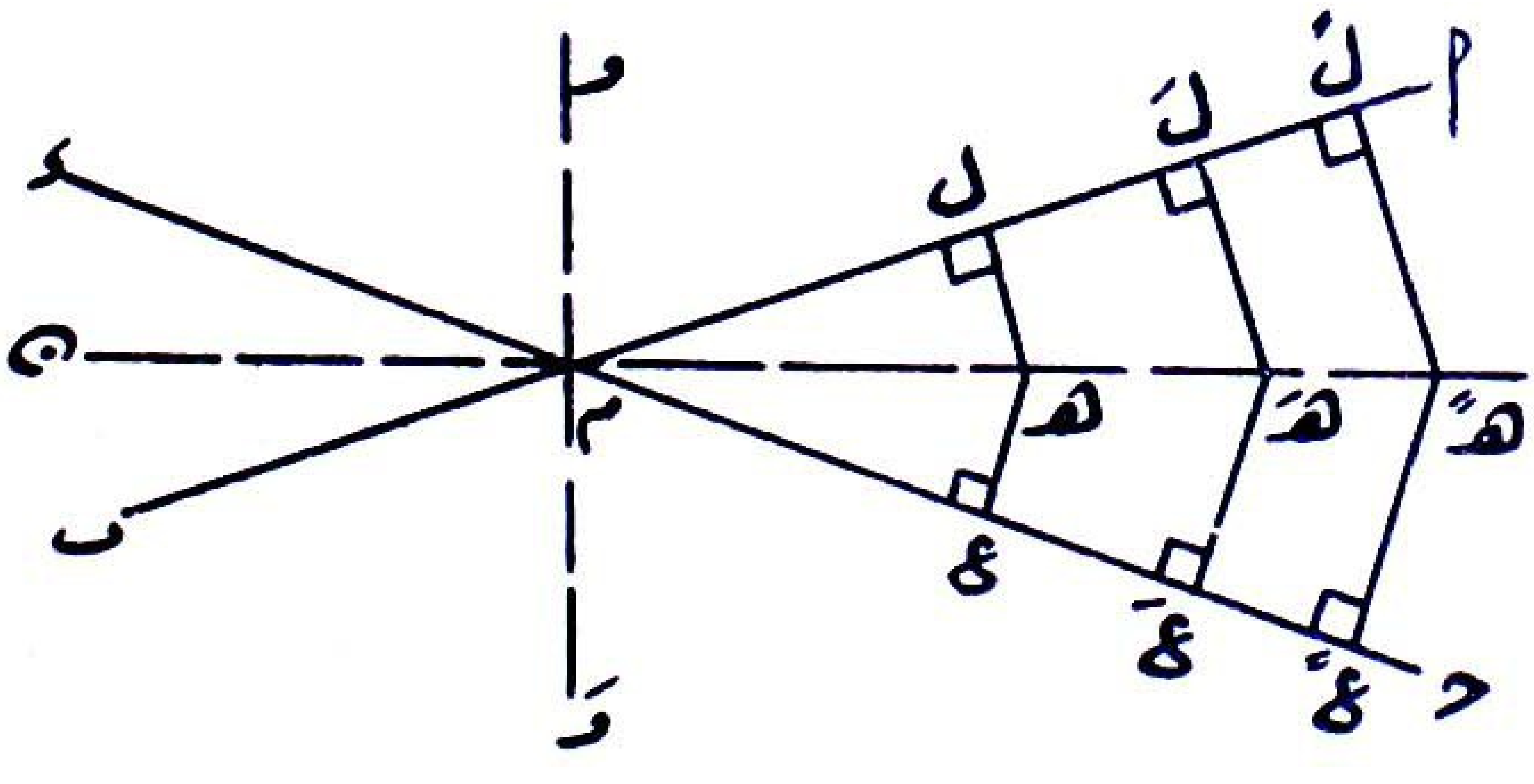
المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون بعداها عن مستقيمين متقاطعين معلومين متساويين هو منصفا الزاويتين المتجاورتين للمستقيمين المعلومين وامتداداهما

المعطيات : ا ب ، حـ ء مستقيمان معلومان ومتقاطعان في م ، هـ نقطة تتحرك بحيث هـ ل وهو بعدها عن ا ب = هـ ع وهو بعدها عن حـ ء الشكل (٤٢)

المطلوب : المحل الهندسى لنقطة هـ .

البرهان : صل هـ م ثم طبق المثلثين هـ ل م ، هـ ع م (زاوية قائمة ووتر وضلع) ينتج من التطابق ان .

∠ هـ م ل = ∠ هـ م ع أي ان م هـ ينصف ∠ ا م حـ وان هـ تقع على هذا المنصف .



الشكل (٤٢)

وبالمثل يمكن اثبات ان اي نقطة على بعدين متساويين من ضلعي الزاوية ا م حـ تقع على منصف هذه الزاوية .

واذا اخذنا عدة نقط مثل هـ' ، هـ" على منصف الزاوية نجد انها متساوية البعدين عن المستقيمين وذلك بتطبيق المثلثين في كل حالة بزاويتين وضلع وينتج في كل مرة ان النقط هـ' ، هـ" على بعدين متساويين من ا ب ، حـ ء

، ∵ امتداد هـ م الى ن ينصف ∠ ء م ب

∴ كل نقطة من نقط (هـ م) وامتداده م ن على بعدين متساويين من ا ب ، حـ ء

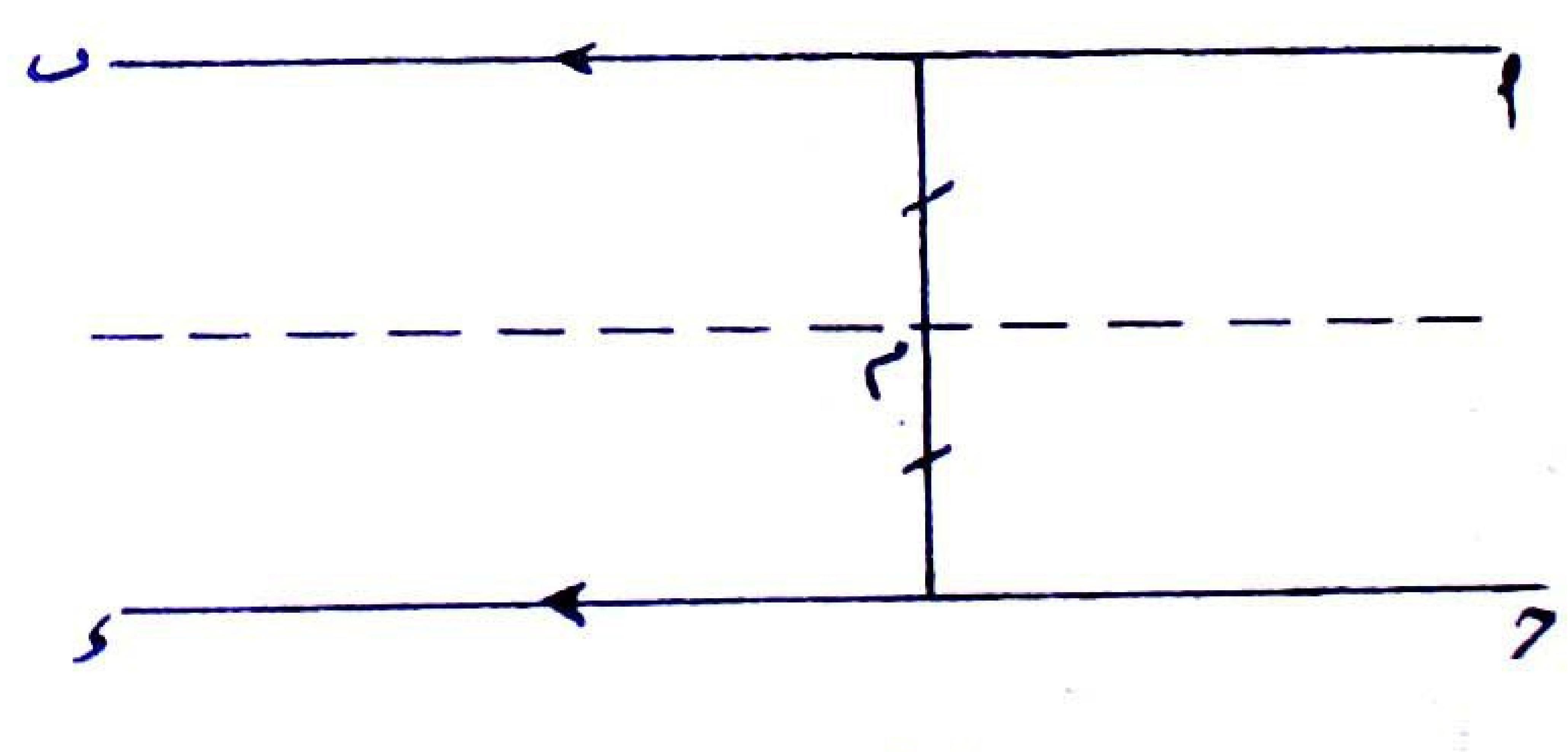
∴ المحل الهندسي لنقطة هـ هو منصف الزاوية بين المستقيمين ا ب ، حـ ء

، ∵ ا ب ، جـ ء يحصران بينهما ٤ زوايا كل اثنتين منهما متقابلتان بالرأس ولهما منصف واحد

∴ المحل الهندسي لنقطة هـ هو منصفا الزاويتين المتجاورتين للمستقيمين وامتدادهما هـ م ن ، و م و'

خامساً :

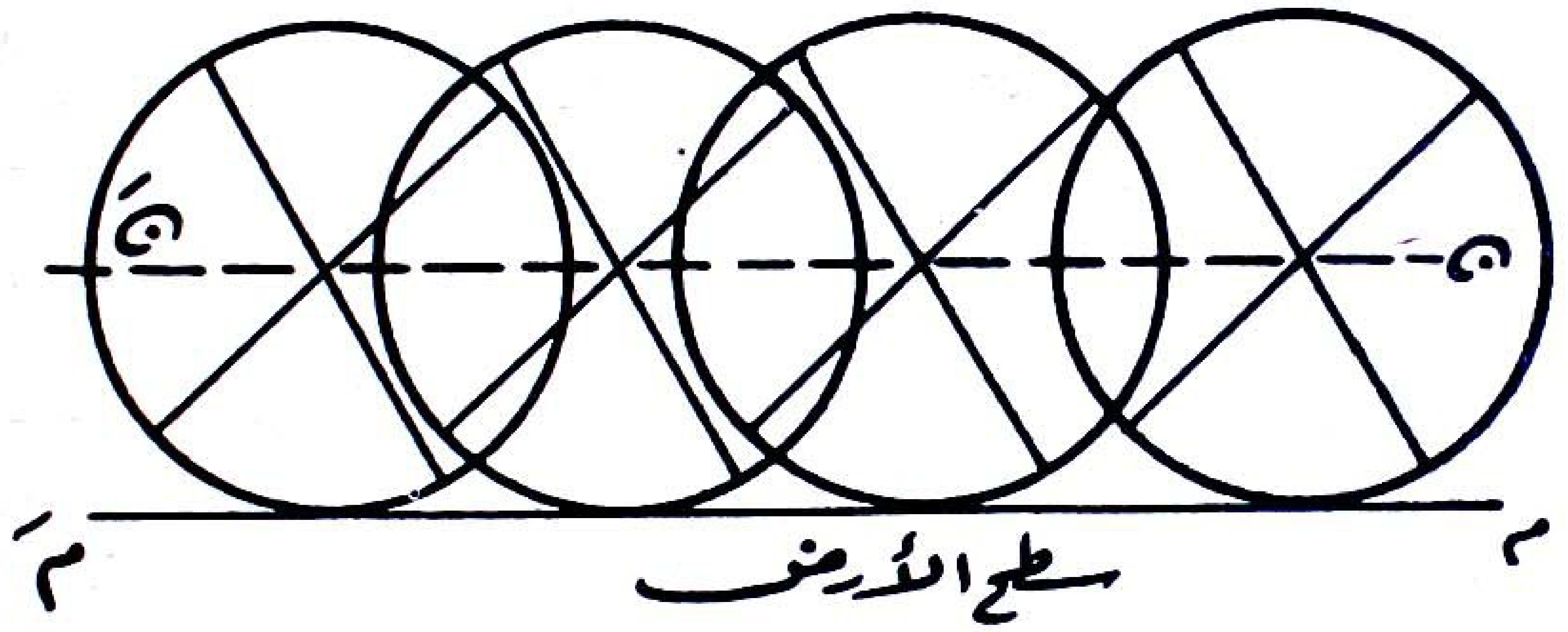
المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث تقع دائماً على بعدين متساويين من مستقيمين متوازيين هو المستقيم الموازي لهما مرسوماً من منتصف البعد بينهما



الشكل (٤٣)

اذا فرضنا النقطة المتحركة م وانها تتحرك بحيث تكون دائماً على بعدين متساويين من المستقيمين الموازيين ا ب ، حـ ء الشكل (٤٣) فإن المحل الهندسي لنقطة م هو مستقيم يوازي كلا منهما ا ب ، حـ ء وينصف البعد بينهما

تمرين عقلي



الشكل (٤٤)

مماسبق اجب عن الاسئلة الآتية :

١ – ما هو المحل الهندسي لنهاية نواس الساعة ؟

٢ – ما هو المحل الهندسي لطفل يتأرجح في ارجوحة ؟

٣ – ما هو المحل الهندسي لمركز العجلة التي بشكل (٤٤)؟

٤ – ما هو المحل الهندسى لنهاية عقرب الدقائق في الساعة ؟

تمارين (٧)

١ – اوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك بشرط ان بعدها عن نقطة ثابتة معلوم ويساوي ٨ سم

٢ – اوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك بشرط ان بعدها عن مستقيم معلوم س ص = ٥ سم

٣ — ا ، ب نقطتان البعد بينهما ٧ سم ارسم المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن ا ، ب

٤ — ا ب ، حـ د مستقيمان متعامدان ومتقاطعان في م . ارسم المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون بعدها عن ا ب = بعدها عن حـ د

٥ — ب حـ مستقيم طوله ١٢ سم ، نقطة ا خارجة عنه وتبعد عنه بمقدار ٧ سم ارسم المحل الهندسي لمنتصفات جميع المستقيمات المرسومة من نقطة ا والمنتهية بالمستقيم المحدود ب حـ .

(١) هل المحل الهندسي محدود الطول ؟

(٢) اوجد طوله اذا كان مستقيماً .

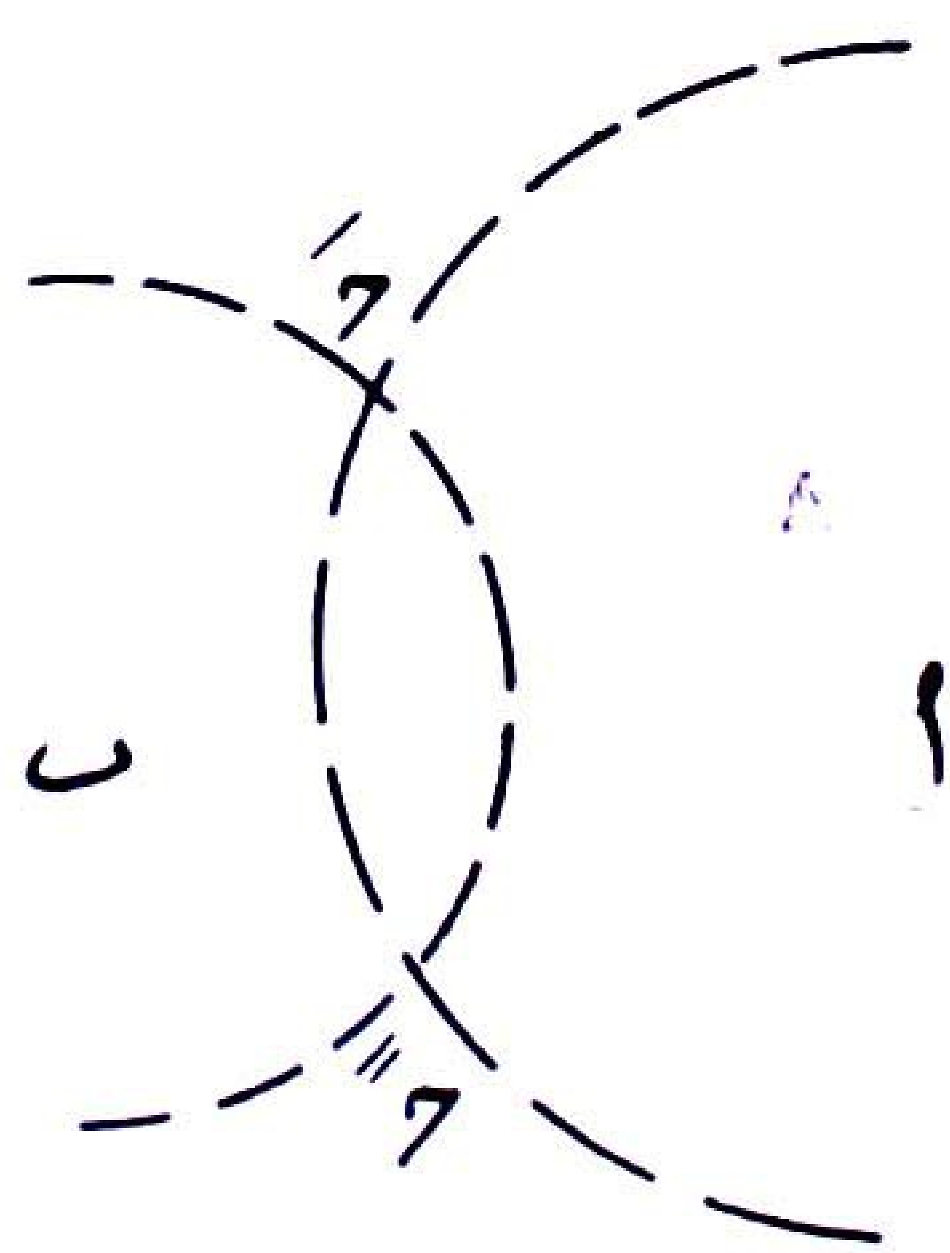
٦ — مستقيمان متوازيان البعد بينهما ٦٫٥ سم اوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون بعداها عن المستقيمين متساوية .

تقاطع المحال الهندسية

اذا تقاطع المحل الهندسي لنقطة ما مع المحل الهندسي لنقطة اخرى فان نقطة (أو نقط) التقاطع تفي بالشرط الخاص لكل مسار وبذلك يمكنك ان تعين موضع اي نقطة تتحرك بحيث تكون في حركتها خاضعه لشرطين معينين في آن واحد .

مثال (١) :

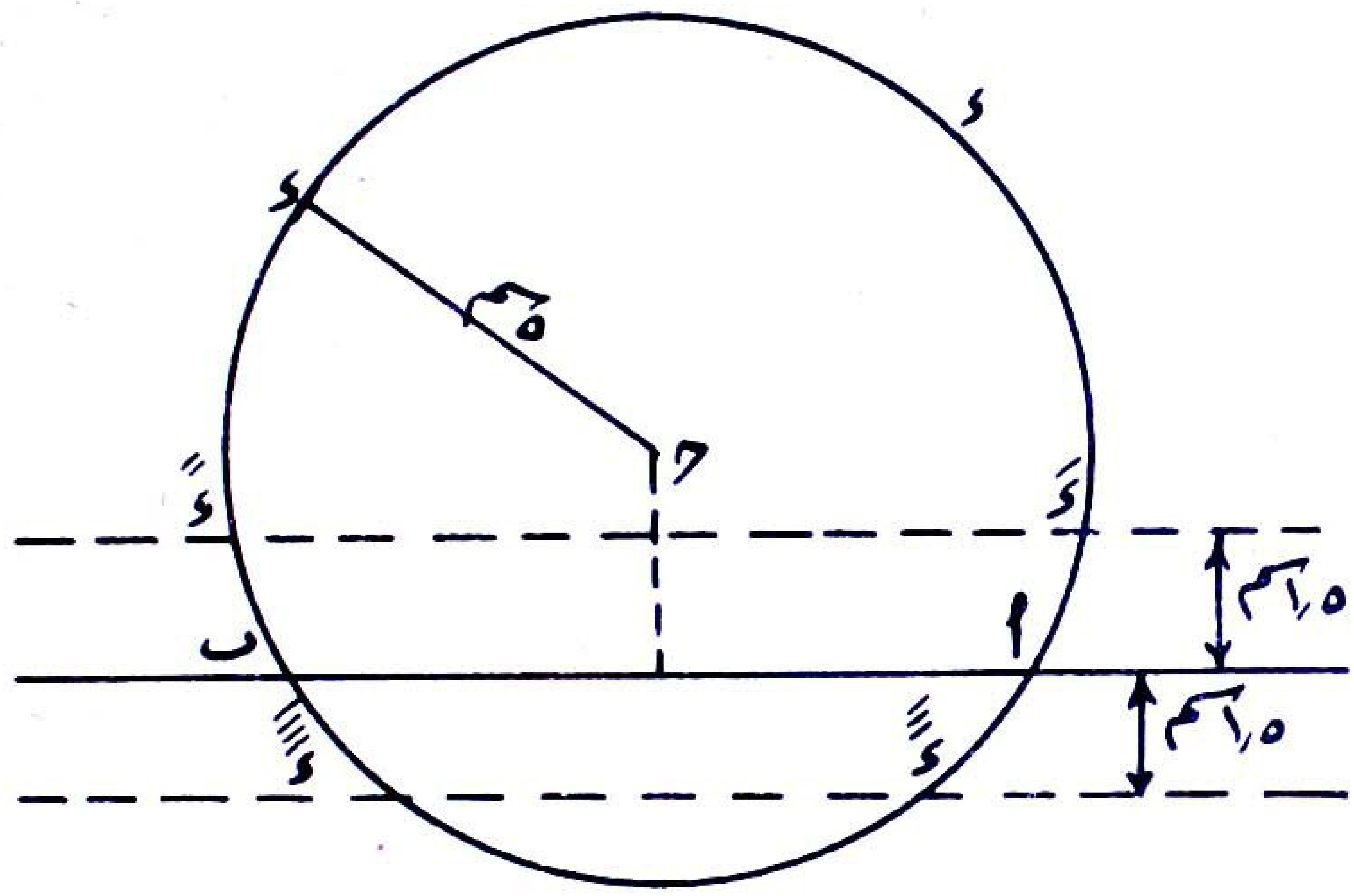
ا ، ب نقطتان معلومتان البعد بينهما ٧ سم اوجد موضع النقطة او النقط التي تبعد عن ا بمقدار ٥ سم وعن ب بمقدار ٣ سم الشكل (٤٥)



الشكل (٤٥)

الحل : ∵ النقطة المطلوبة على بعد ٥ سم من ا

∴ المحل الهندسي لها محيط دائرة مركزها ا . ونصف قطرها ٥ سم



الشكل (٤٦)

، ∵ النقطة المطلوبة على بعد ٣ سم من ب

∴ المحل الهندسي لها هو محيط دائرة مركزها ب ونصف قطرها ٣ سم

، ∵ المحلان الهندسيان تقاطعا في نقطتين هما حـ′ ، حـ″

∴ حـ′ ، حـ″ هما موضعا النقط التى تفي بالشرطين

مثال (٢) مستقيم معلوم اب ونقطة حـ تبعد عنه بمقدار ٢,٥ سم اوجد نقطة او نقطاً على بعد قدره ٥ سم من حـ وعلى بعد ١,٥ سم من ا ب

المحل الهندسي لنقطة على بعد ٥ سم من حـ هو محيط دائرة مركزها حـ ونصف قطرها ٥ سم (انظر الشكل ٤٥) .

والمحل الهندسي لنقطة على بعد ١,٥ سم من المستقيم ا ب هما مستقيمان يوازيان ا ب — وكل في جهة من جهتيه وعلى بعد منه = ١,٥ سم

والمستقيمان تلاقيا مع محيط الدائرة في ٤ نقط هي ء' ، ء" ، ء"' ، ء"" وكل منها تفي بالشرطين .

مثال (٣) :

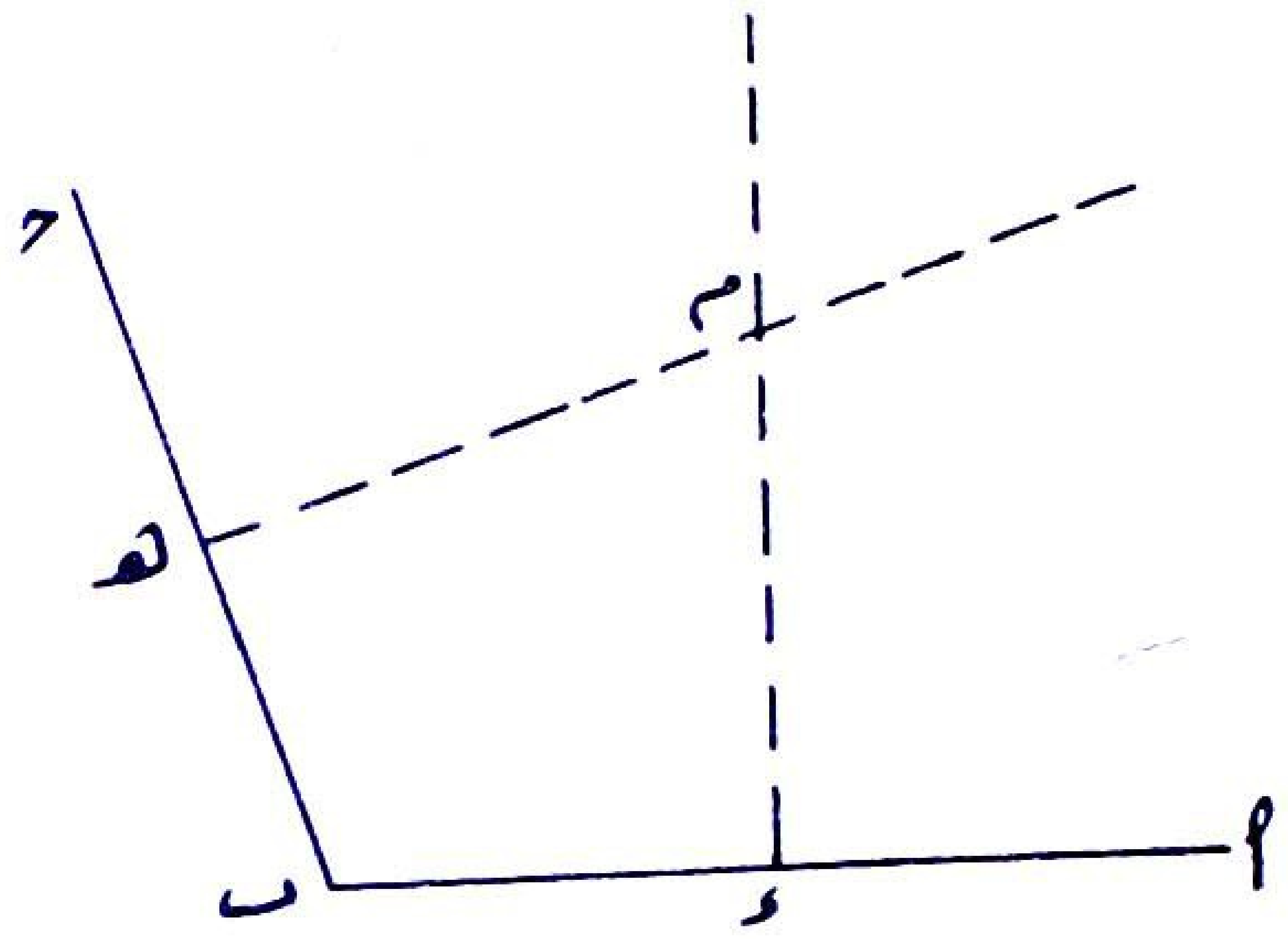
اوجد نقطة على ابعاد متساوية من ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

الحل : نفرض ان النقط الثلاثة هي ا ، ب ، حـ

∴ النقطة المطلوبة على بعدين متساويين من ا ، ب

∴ النقطة تقع على ء م العمود على ا ب من منتصفه ء

، ∵ النقطة المطلوبة على بعدين متساويين من ب ، حـ



الشكل (٤٧)

∴ النقطة تقع على هـ م العمود على ب حـ من منتصفه هـ

∴ نقطة تلاقي العمودين وهي نقطة م تفي بالشرطين معاً

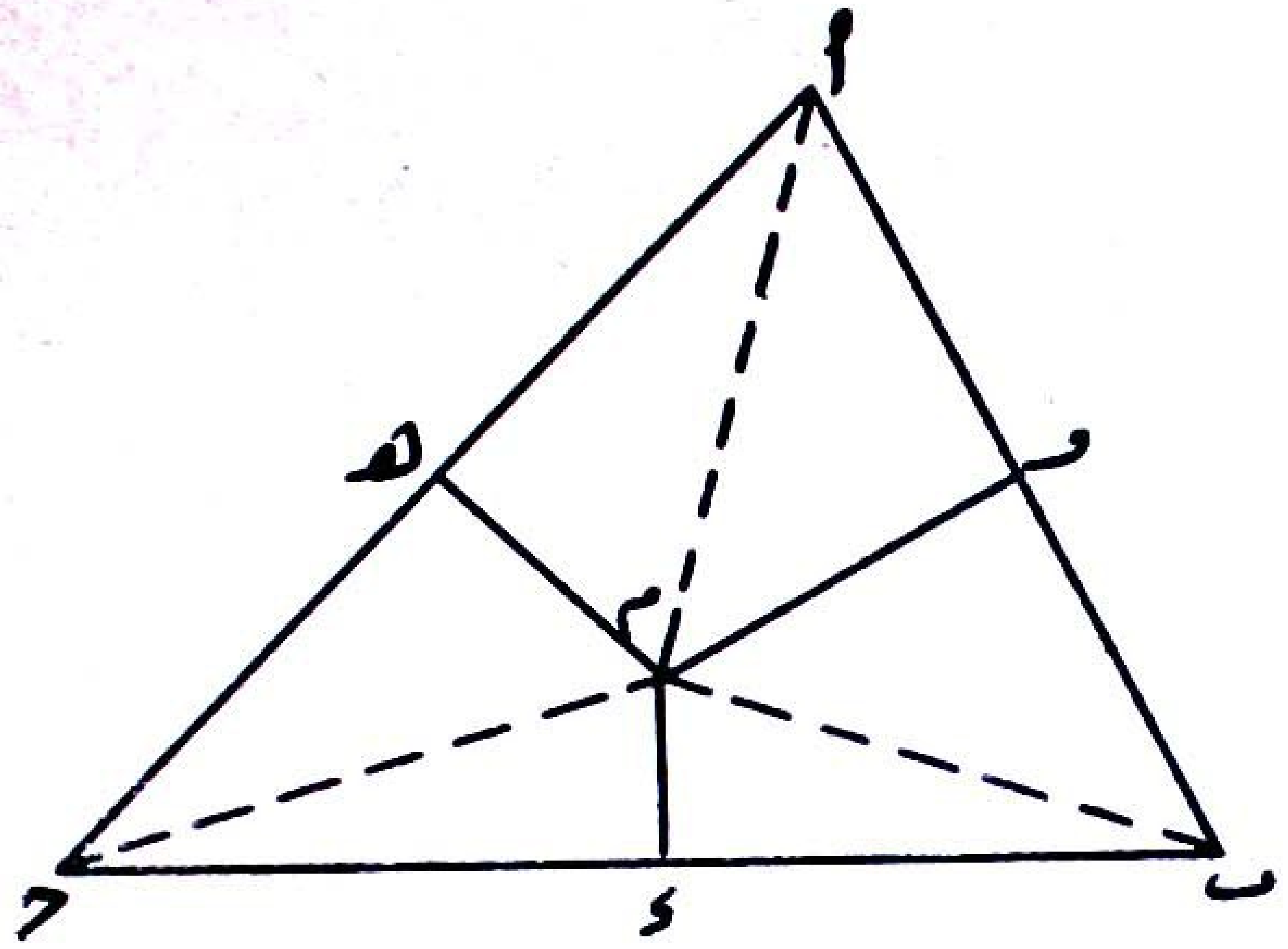
∴ م هي النقطة المطلوبة

الحقيقة الاولى

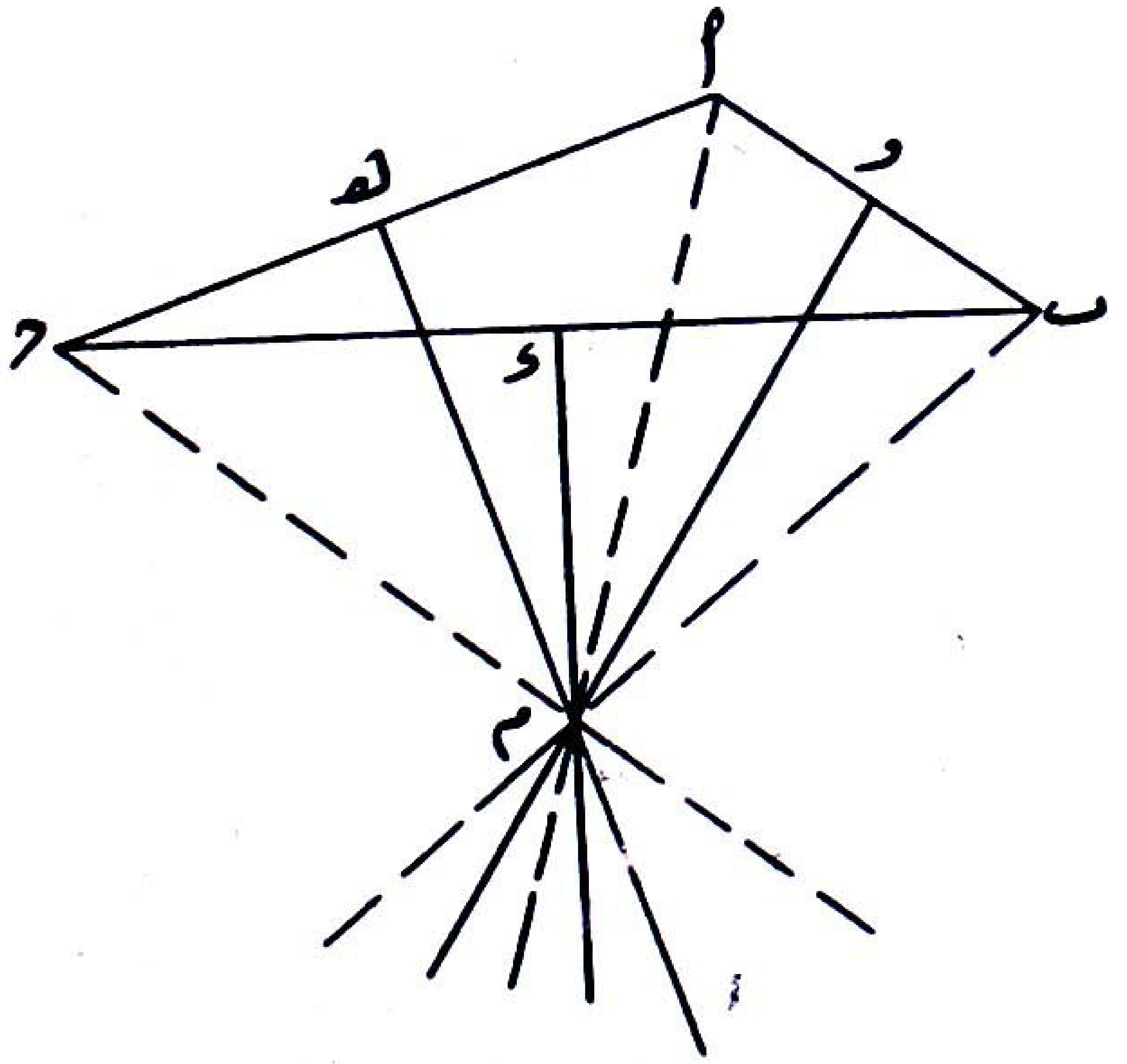
الاعمدة المقامة على اضلاع المثلث من منتصفاتها تتلاقى جميعاً في نقطة واحدة

المعطيات : اب حـ △ نصفت اضلاعه ب حـ ، حـ ا ، ا ب في ء ، هـ ، و على

الترتيب واقيم العمودان و م على اب ، ء م على ب حـ فتلاقيا في م الشكلين (٤٨ ا) ، (٤٨ ب)



(الشكل – ١٤٨)



(الشكل – ٤٨ ب)

المطلوب : اثبات ان العمود المقام على ا حـ من منتصفه هـ يمر بالنقطة م .

البرهان : ∵ و م ⊥ ا ب من منتصفه

∴ و م هو المحل الهندسي للنقط المتساوية البعدين عن ا ، ب

∴ م ا = م ب

، ∵ ء م ⊥ ب حـ من منتصفه .

∴ ء م هو المحل الهندسي للنقط المتساوية البعدين عن ب ، حـ .

∴ م ب = م حـ .

، ∵ م ا = م ب ، م ب = م حـ ∴ م ا = م حـ .

اي ان م متساوية البعدين عن ا ، حـ .

∴ م تقع على المحل الهندسي للنقط المتساوية البعدين عن ا ، حـ .

∴ العمود المقام على ا حـ من منتصفه يمر بالنقطة م أي أن الاعمدة المقامة على اضلاع المثلث من منتصفاتها تتلاقى جميعاً في نقطة واحدة .

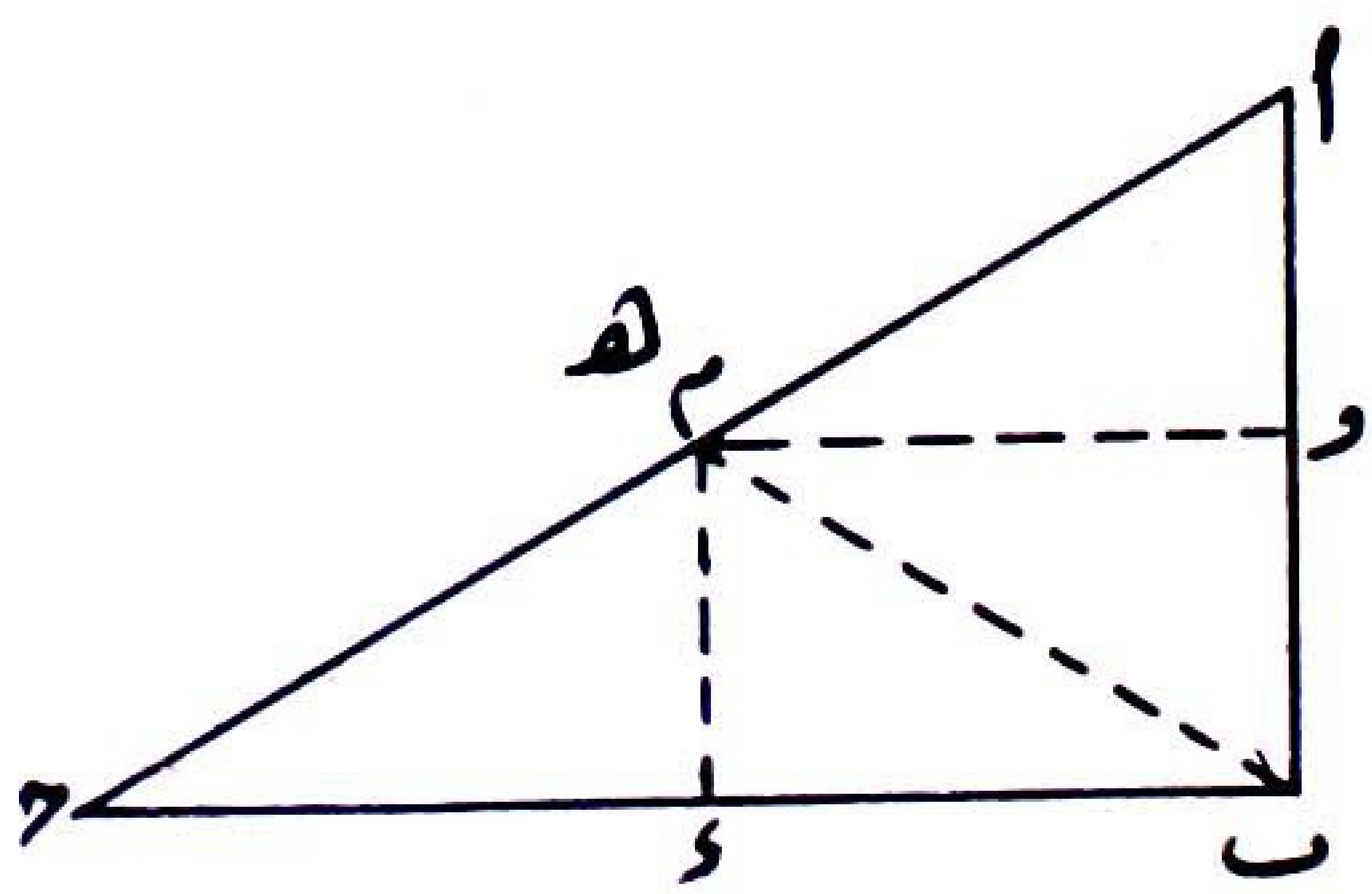
وهو المطلوب

ملاحظات :

١ – ∵ م ا = م ب = م حـ ∴ م مركز الدائرة التي تمر برؤوس △ ا ب حـ وتسمى الدائرة الخارجة للمثلث

٢ – اذا كان المثلث ا ب حـ حاد الزوايا (شكل ٤٨ ا) فان نقطة م تقع داخل المثلث واذا كان المثلث منفرج الزاوية (شكل ٤٨ ب) فان نقطة م تقع تقع خارج المثلث

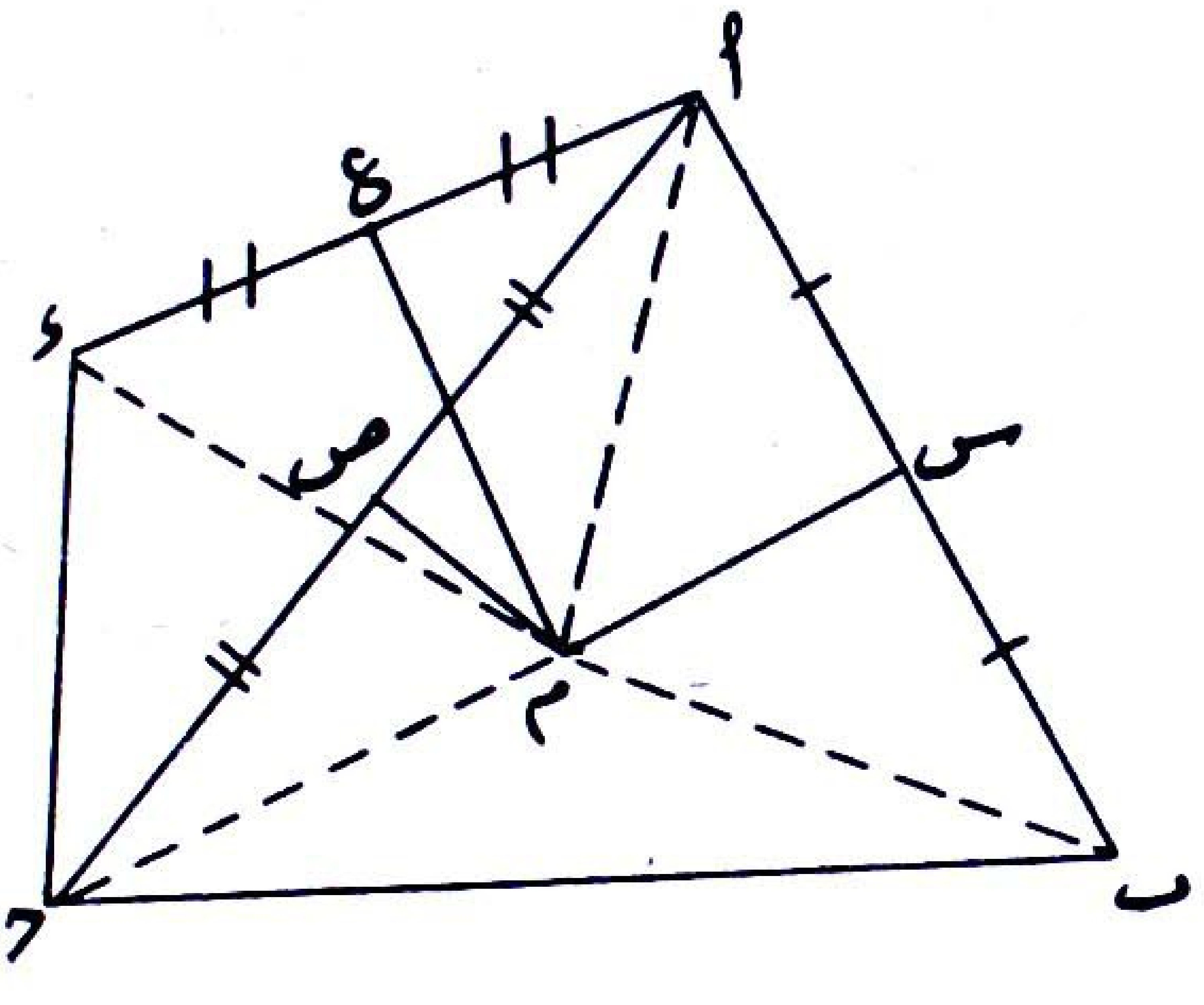
٣ – اذا كان المثلث قائم الزاوية كما في الشكل (٤٩) فان نقطة م تقع على منتصف وتر المثلث القائم الزاوية .



الشكل (٤٩)

تمرين محلول :

ا ب حـ ء شكل رباعي وصل قطره (ا حـ) ونصف في ص ثم نصف ضلعاه أ ب ، أ ء في س ، ع فاذا علم ان الاعمدة المقامة على أ ب ، أ حـ ، أ ء من س ، ص ، ع على الترتيب تتلاقى في نقطة واحدة م الشكل (٥٠) اثبت ان ا ، ب ، حـ ، ء تقع على محيط دائرة واحدة مركزها م



الشكل (٥٠)

العمل نصل م ا ، م ب ، م حـ ، م ء

البرهان ∵ △ ا ب حـ فيه س م ⊥ ا ب من منتصفه ، ص م ⊥ حـ أ من منتصفه .

∴ م ملتقى الاعمدة المقامة على اضلاع المثلث ا ب حـ من منتصفاتها وتكون مركز الدائرة الخارجة للمثلث ا ب حـ

∴ م ا = م ب = م حـ . . . . . . (١)

، بالمثل م ملتقى الاعمدة المقامة على اضلاع △ أ حـ ء من منتصفاتها

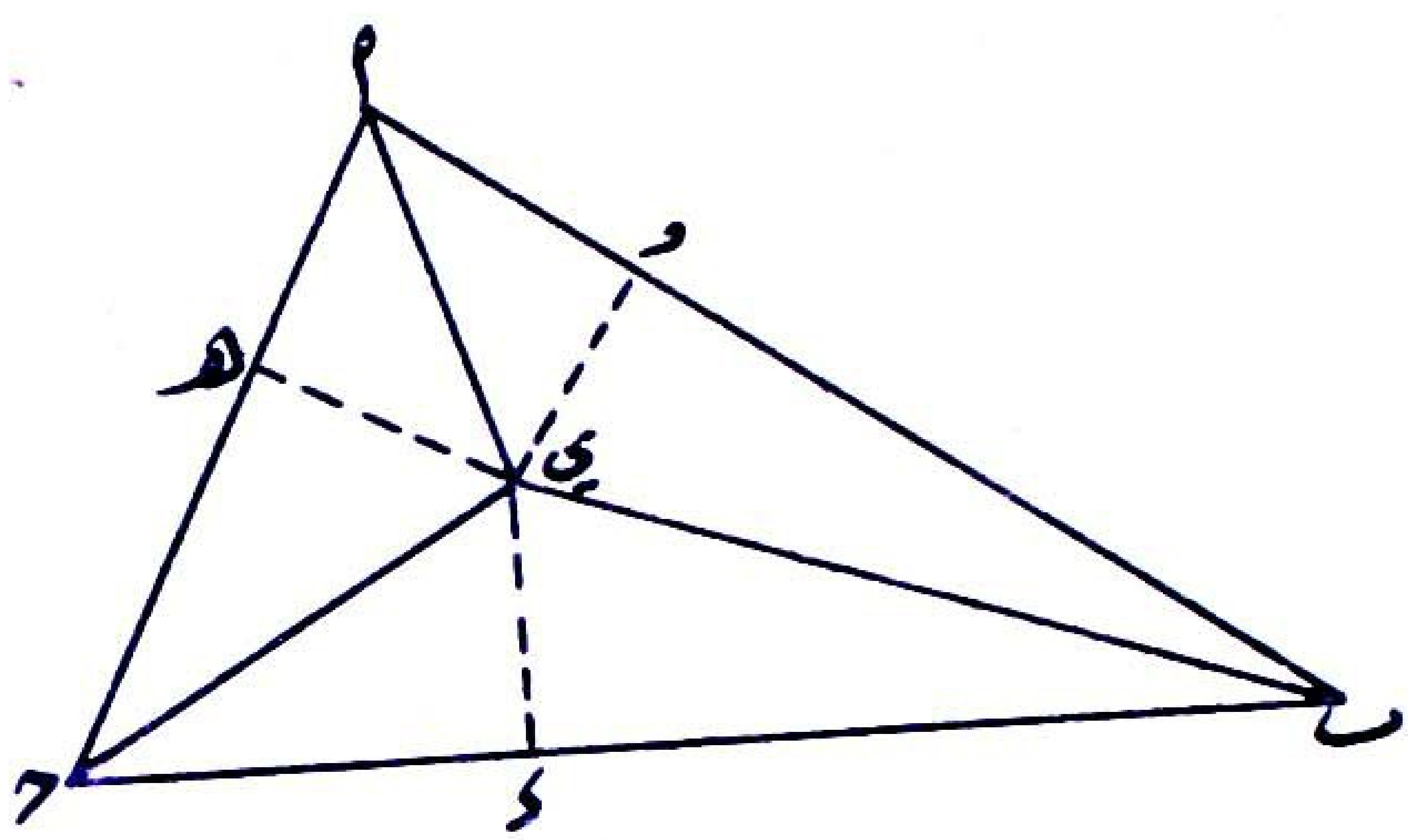
∴ م أ = م حـ = م ء . . . . (٢)

من (١) ، (٢) ينتج ان م ا = م ب = م حـ = م ء

∴ م مركز الدائرة التي تمر برؤوس الشكل ا ب حـ ء وهو المطلوب

الحقيقة الثانية

منصفات زوايا المثلث تتلاقى جميعاً في نقطة واحدة



الشكل (٥١)

المعطيات : ا ب حـ △ نصفت زاويتا ب ، حـ فتلاقى المنصفان في ى الشكل (٥١) .

المطلوب : اثبات ان منصف ∠ ا يمر بالنقطة ى

البرهان : ∵ ب ى ينصف ∠ ا ب حـ

∴ ب ى هو المحل الهندسي للنقط التي على بعدين متساويين من ب ا ، ب حـ

∴ ى و = ى د (١)

، ∵ حـ ى ينصف ∠ ا حـ ب

∴ حـ ى هو المحل الهندسي للنقط التي على بعدين متساويين من حـ ا ، حـ ب

∴ ى د = ى هـ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج :

ى و = ى هـ

أي أن النقطة ى على بعدين متساويين من ا ب ، ا حـ

∴ ى تقع على المحل الهندسي للنقط المتساوية البعدين عن ا ب ، ا حـ

∴ منصف ∠ ا يمر بالنقطة ى

أي أن منصفات زوايا المثلث تتلاقى جميعاً في نقطة واحدة

وهو المطلوب

ملاحظات :

(١) ∵ ى د = ى هـ = ى و . ∴ ى هي مركز الدائرة التي تمر بالنقط د ، هـ ، و وهي مواقع الأعمدة النازلة من نقطة ملتقى منصفات زوايا △ على أضلاعه (٢) وتسمى هذه الدائرة الداخلة للمثلث لأنها تمس أضلاعه ، كما سنرى فيما بعد .

تمرين محلول (١) :

ا ب حـ △ فيه ∠ ب = ٨٠° ، ∠ حـ = ٤٥° نصفت هاتان الزاويتان بمنصفين تلاقيا في م أوجد قيمة كل من الزوايا ا م ب ، ا م حـ ، ب م حـ بالدرجات الشكل (٥٢) .

الحل: ∠ ب م حـ = ١٨٠° −

(٤٠ + ٢٢,٥) = ١١٧,٥°

، ∵ ب م ينصف ∠ ب ،

حـ م ينصف ∠ حـ

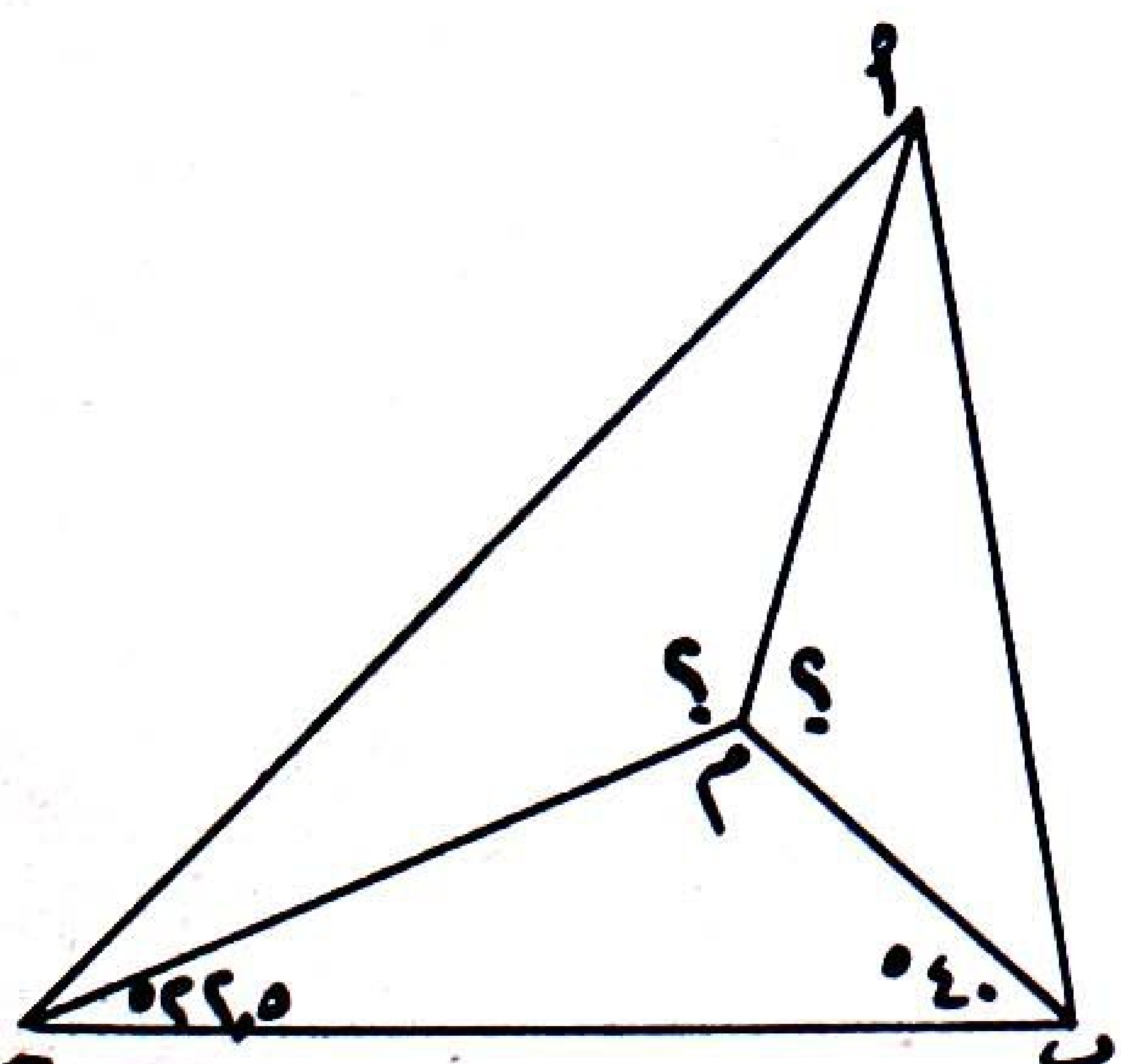
∴ م ا ينصف ∠ ا (حقيقة)

، ∵ ∠ ا = ١٨٠ −

(٨٠ + ٤٥) = ٥٥°

∴ ∠ ب ا م = ∠ حـ ا م

= ٢٧,٥°



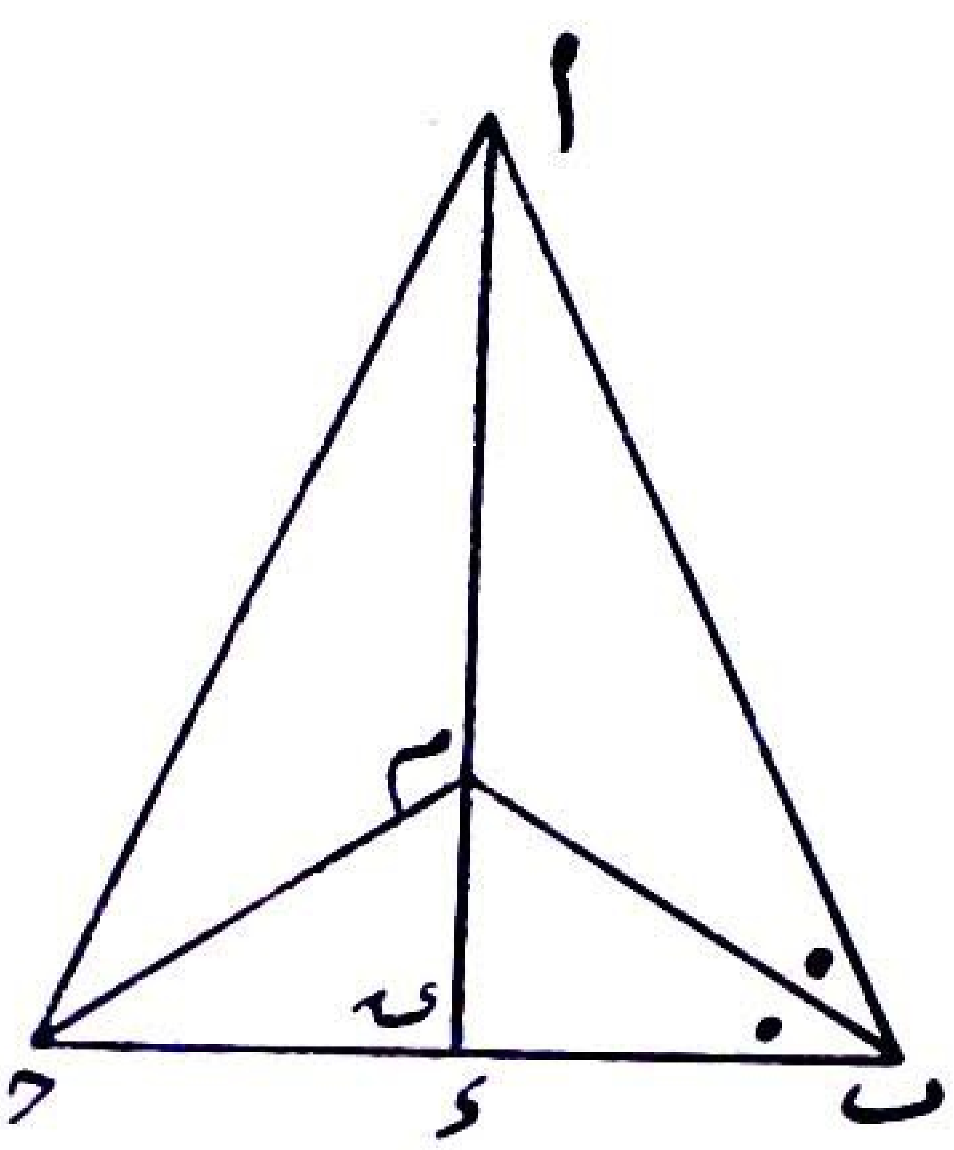
الشكل (٥٢)

∴ ∠ ا م ب = ١٨٠ − ٦٧,٥ = ١١٢,٥°

، ∠ ا م حـ = ١٨٠ − ٥٠ = ١٣٠°

تمرين محلول (٢) :

ا ب حـ △ نصفت الزاويتان ب ، حـ بمنصفين ب م ، حـ م فإذا كان امتداد ا م عموداً على القاعدة ب حـ فأثبت ان △ ا ب حـ متساوي الساقين .



الشكل (٥٣)

المعطيات : ا ب حـ △ نصفت الزاويتان ب ، حـ بالمنصفين ب م ، حـ م وصل ا م ثم مد على استقامته حتى قابل ب حـ في ء ، وكان ا ء ⊥ ب حـ الشكل (٥٣).

المطلوب : اثبات ان ا ب = ا حـ

البرهان : ∵ م نقطة تلاقي منصفي ∠ ب ، ∠ حـ في المثلث ا ب حـ

∴ م ملتقى منصفات زوايا المثلث ا ب حـ

∴ م ا ينصف ∠ ب ا حـ

∴ ا ء ينصف ∠ ا ولكن ا ء ⊥ ب حـ في △ ا ب حـ

∴ △△ ا ب ء ، ا حـ ء متطابقان (زاويتان وضلع)

∴ ا ب = ا حـ

وهو المطلوب

تمارين ٨ على حقيقتي ١ ، ٢

١ — ا ب حـ مثلث قائم الزاوية في ا ومتساوي الساقين نصفت زاويتا ا ، ب بمنصفين تلاقيا في هـ . اوجد قيمة زاوية ا حـ هـ بالدرجات .

٢ – ا ب حـ مثلث فيه زاوية أ = ١٢٠° ، ا ب = ا حـ . نصف ا ب في س ، ا حـ في ص ثم رسم س م ⊥ أ ب ، ص م ⊥ ا حـ فتلاقى العمودان في م اثبت ان :(أ) م أ ينصف ∠ ب أ حـ ، (ب) : م أ = أ ب

٣ – ا ب حـ مثلث قائم الزاوية في ا فيه ا ب = $\frac{١}{٢}$ ب حـ ، هـ منتصف ب حـ

وصل ا هـ وانزل من ا العمود ا ى على ب حـ ونصفت ∠ حـ بالمنصف حـ م لاقى ا هـ في م ثم وصل ى م . برهن أن ا م ينصف ∠ ى ا حـ ثم اوجد قيمة الزاوية ى م حـ

٤ – ا ب حـ مثلث فيه نقطة ى ملتقى المستقيمات المنصفة لزواياه فإذا كانت ∠ ى ب حـ تساوي ٣٠° ، ∠ ى حـ ب = ٤٠°

فأوجد قيمة زاوية ى ا ب بالدرجات

٥ – ا ب حـ مثلث نصف الضلع ب حـ في ى ثم نصف الضلع ا حـ في هـ اقيم العمودان ى م ، هـ م على ب حـ ، ا حـ على الترتيب فتقابلا في م فاذا كان م ا ينصف زاوية ا . فأثبت أن ا ب = ا حـ

٦ – ا ب حـ ى شكل رباعي وصل قطره ب ى ونصفت الزاويتان ب ا ى ، ا ى ب بمنصفين تلاقيا في هـ ثم نصفت الزاويتان ى حـ ب ، حـ ى ب بمنصفين تلاقيا في و أثبت ان ∠ هـ ب و = $\frac{١}{٢}$ ∠ ا ب حـ

٧ – ا ب حـ ى شبه منحرف فيه ا ى يوازي ب حـ ، ا ب = ا ى = ى حـ تقاطع قطراه في م فاذا كان امتداد ب ا ، حـ ى يتقابلان في هـ اثبت ان منصف ∠ ب هـ حـ يمر بنقطة م

٨ – ا ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، زاوية حـ = ٣٠° ، ى نقطة تلاقي

منصفي الزاويتين ب ، ح الداخليتين للمثلث ا ب ح وصل ا ى ثم مد فقطع ب ح في ى اثبت ان ح ى = ٢ ب ى

٩ - ا ب ح مثلث مد ا ب على استقامته الى ى ومد ا ح على استقامته الى ه . ثم نصفت زاوية ى ب ح با لمنصف ب م . ونصفت زاوية ه ح ب بالمنصف ح م فتلاقى المنصفان في م ثم أقيم على ب م العمود (ب ڡ) وعلى ح م العمود ح ڡ فتلاقى العمودان في نقطة ڡ اثبت ان ا ، ڡ ، م على استقامة واحدة .

الباب الرابع

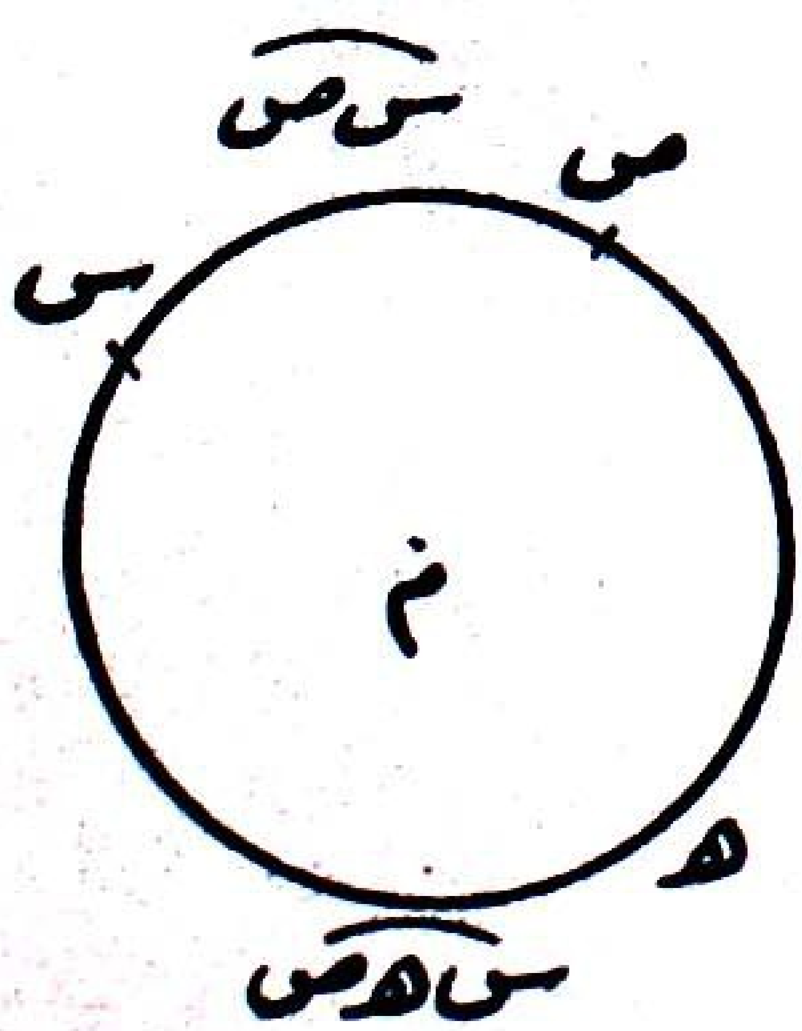
الدائرة

تعاريف :

محيط الدائرة : هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في مستوٍ بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة تسمى **المركز** يساوي طولاً معلوماً ثابتاً يسمى **نصف القطر** ويرمز له بالرمز نق الشكل (٥٤)

الشكل (٥٤)

الدائرة : هي السطح المحصور بمحيطها .
قوس الدائرة : هو جزء من محيطها محدود بنقطتين منه كالقوس (س ص) ويرمز له بالشكل ($\overset{\frown}{\text{س ص}}$) ويقرأ القوس س ص . الشكل (٥٥) .



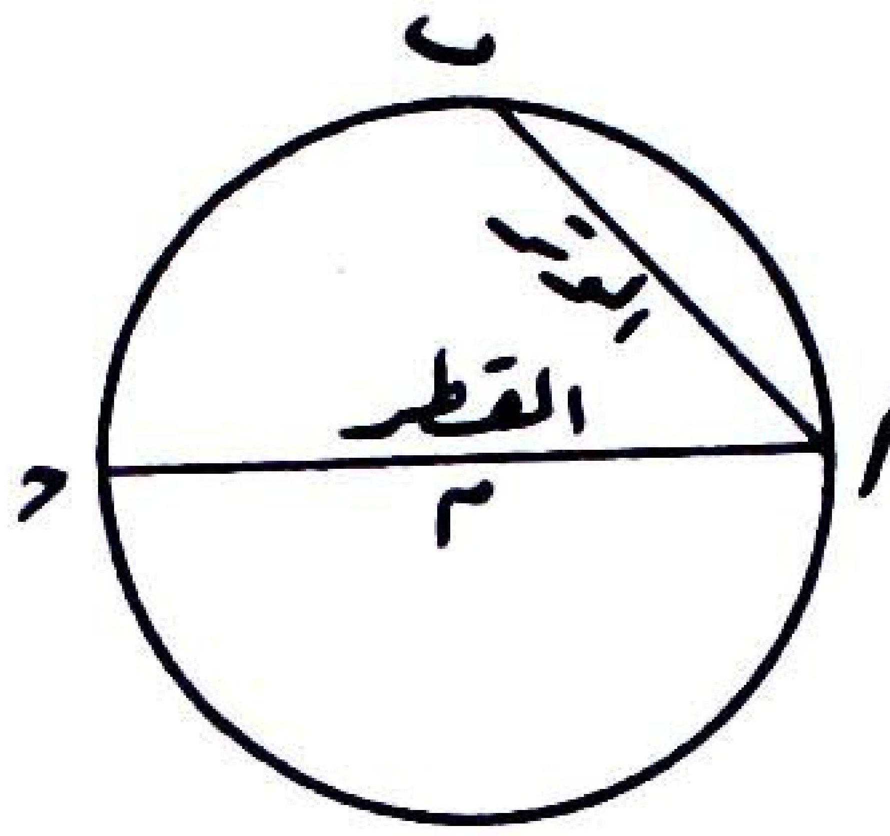
الشكل (٥٥)

كل نقطتين على محيط الدائرة تحددان قوسين :

القوس الصغير $\overset{\frown}{\text{س ص}}$ ويقرأ بحرفين فقط .

والقوس الكبير $\overset{\frown}{\text{س هـ ص}}$ ويقرأ بثلاثة أحرف .

وتر الدائرة : هو المستقيم الواصل بين نقطتين من محيطها كالوتر ا ب الشكل (٥٦) .



الشكل (٥٦)

قطر الدائرة : هو وتر مار بمركزها كالقطر ا م حـ أو ا حـ = ٢ نق وهـو يقسم الدائرة الى قسمين متساويين الشكل (٥٦) .

وضع نقطة بالنسبة لدائرة :

تكون النقطة ب بالنسبة للدائرة م في أحد الاوضاع الآتية :

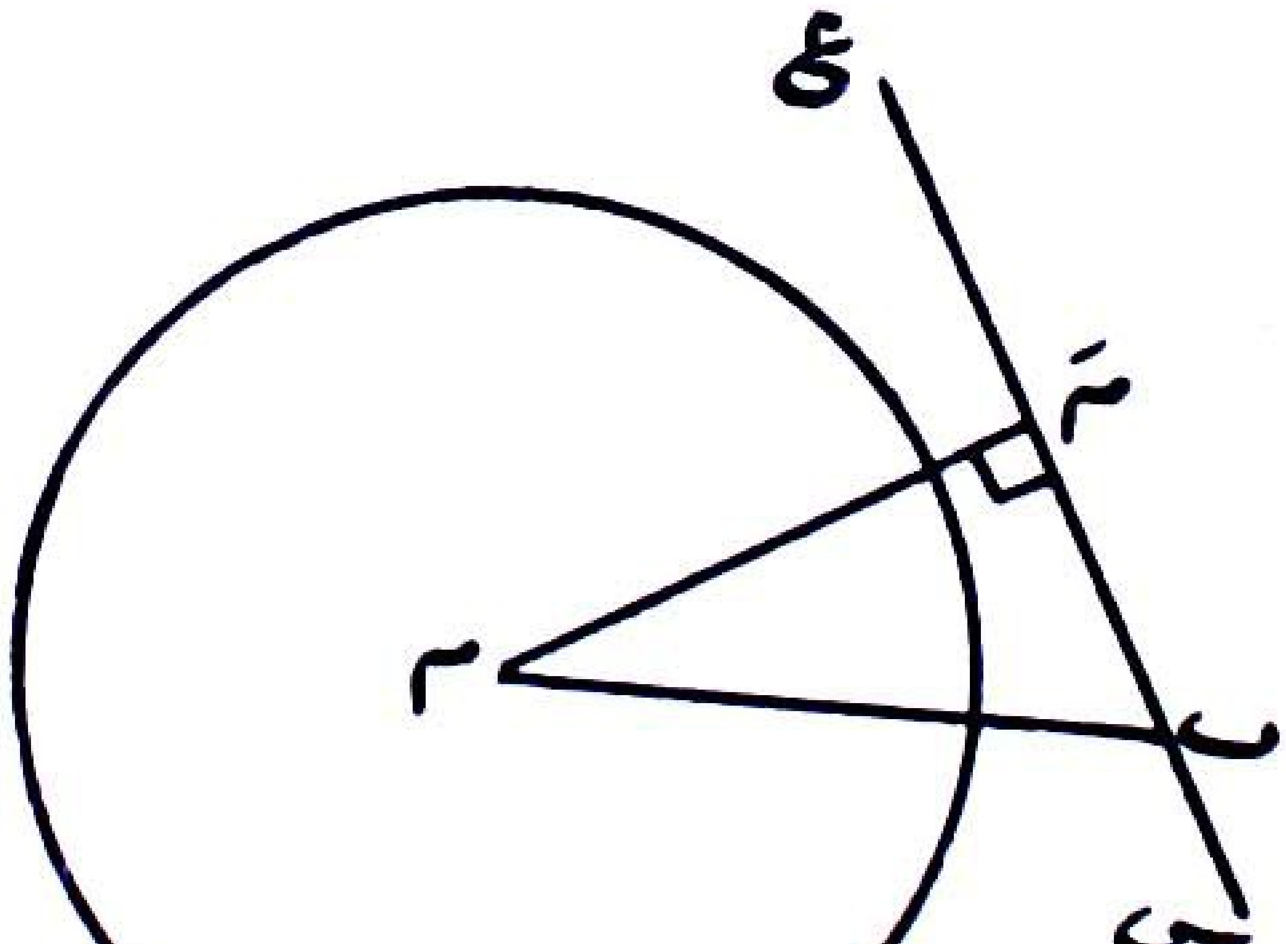
١ - إذا كان م ب < نق فالنقطة ب تقع داخل الدائرة

٢ - وإذا كان م ب = نق « « « على محيط الدائرة

٣ - وإذا كان م ب > نق « « « « خارج الدائرة

وضع مستقيم بالنسبة لدائرة :

لتكن الدائرة (م ، نق) أي مركزها م ونصف قطرها نق ، س ع مستقيم مفروض . لننزل من م العمود م م′ على س ع فنميز الحالات الآتية :



الشكل (٥٧)

الحالة الاولى :

م م′ > نق الشكل (٥٧) .

لتكن ب نقطة ما من المستقيم س ع .

ان م ب مائل بالنسبة للعمود م م' .

∴ م ب > م م'

، ∵ م م' > نق

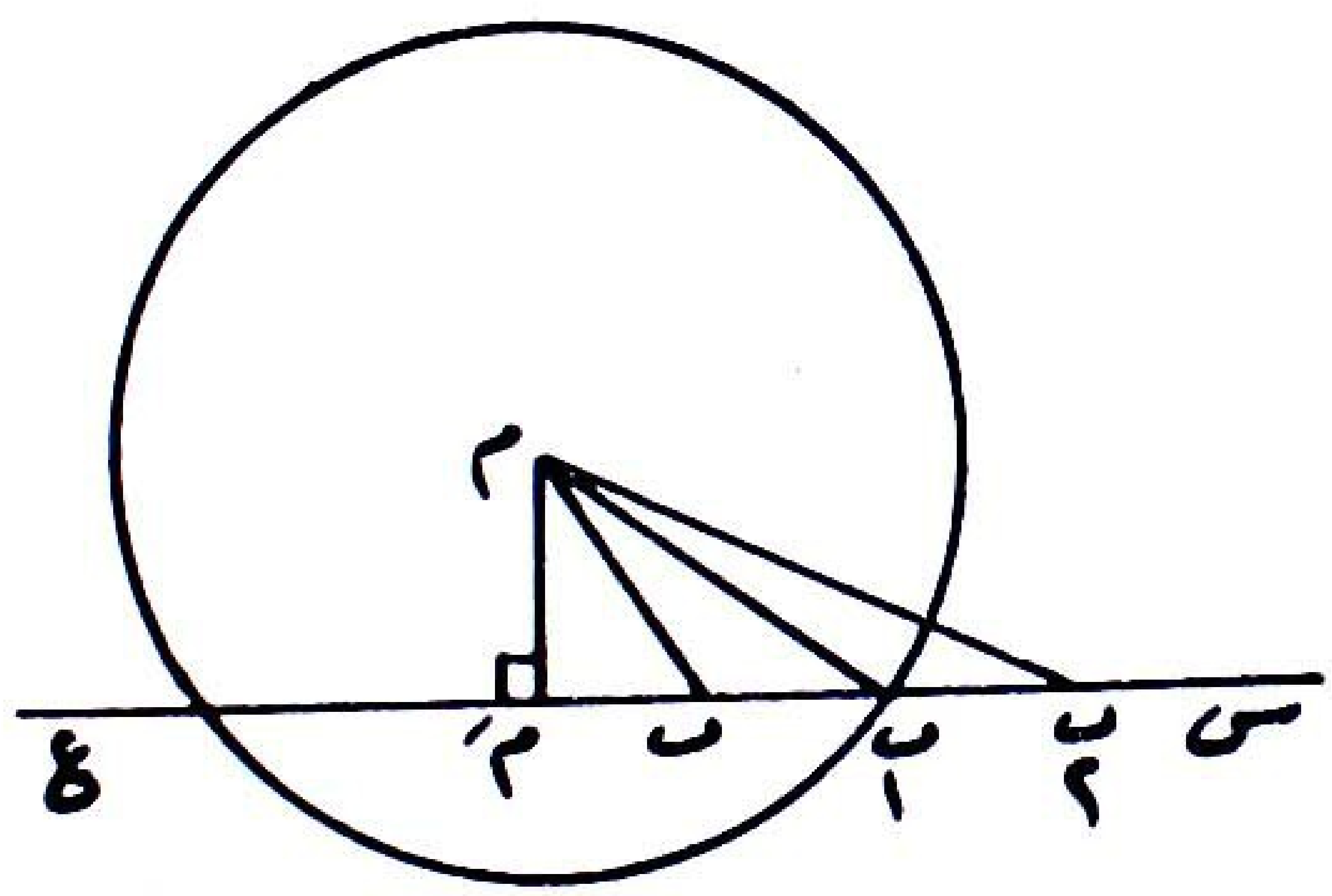
∴ م ب > نق

ومن ذلك نستنتج أن كل نقطة من ذلك المستقيم س ع تقع في المنقطة الخارجية بالنسبة للدائرة (خارج الدائرة) وليس بين المستقيم ومحيط الدائرة أي نقطة مشتركة .

الحالة الثانية :

م م' < نق الشكل(٥٨)

لتكن ب نقطة من المستقيم س ع فاذا كانت ب منطبقة على م' يكون بعدها عن م أصغر من نق (فرضاً) أي تكون ب واقعة داخل الدائرة .



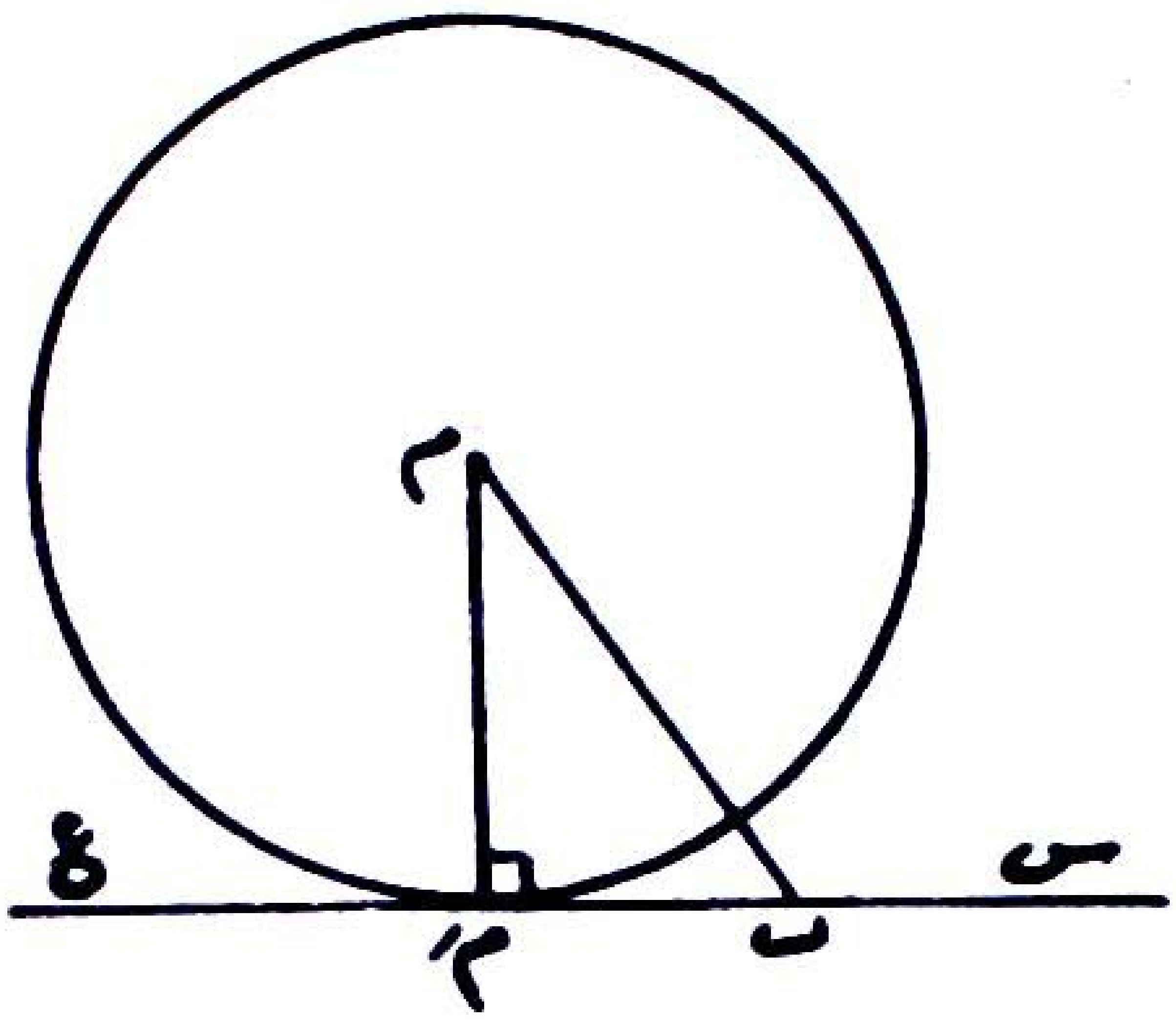
الشكل (٥٨)

فاذا أخذنا في تحريك ب الى اليمين على المستقيم س ع فيأخذ م ب بالكبر تدريجياً ولا بد أن يأتي وضع يصبح فيه م ب = نق وعندها نأخذ ب الوضع ب١ على محيط الدائرة . واذا ثابرنا على تحريك ب الى اليمين أيضاً يصبح م ب > نق فتأخذ ب الوضع ب٢ مثلاً ويكون : م ب٢ > نق أي تصبح ب خارج الدائرة .

ويحصل نفس الشيء اذا حركنا ب الى اليسار أي لا بد أن يأتي وضع تقع فيه ب على محيط الدائرة ثم تصبح خارجها .

أي أن المستقيم س ع يقطع الدائرة في هذه الحالة في نقطتين (وفي نقطتين فقط) ويسمى عندئذ المستقيم س ع **قاطعاً** للدائرة .

الحالة الثالثة :



م م′ = نق الشكل (٥٩) .

ان نقطة م′ واقعة على الدائرة لأن بعدها عن م = نق .

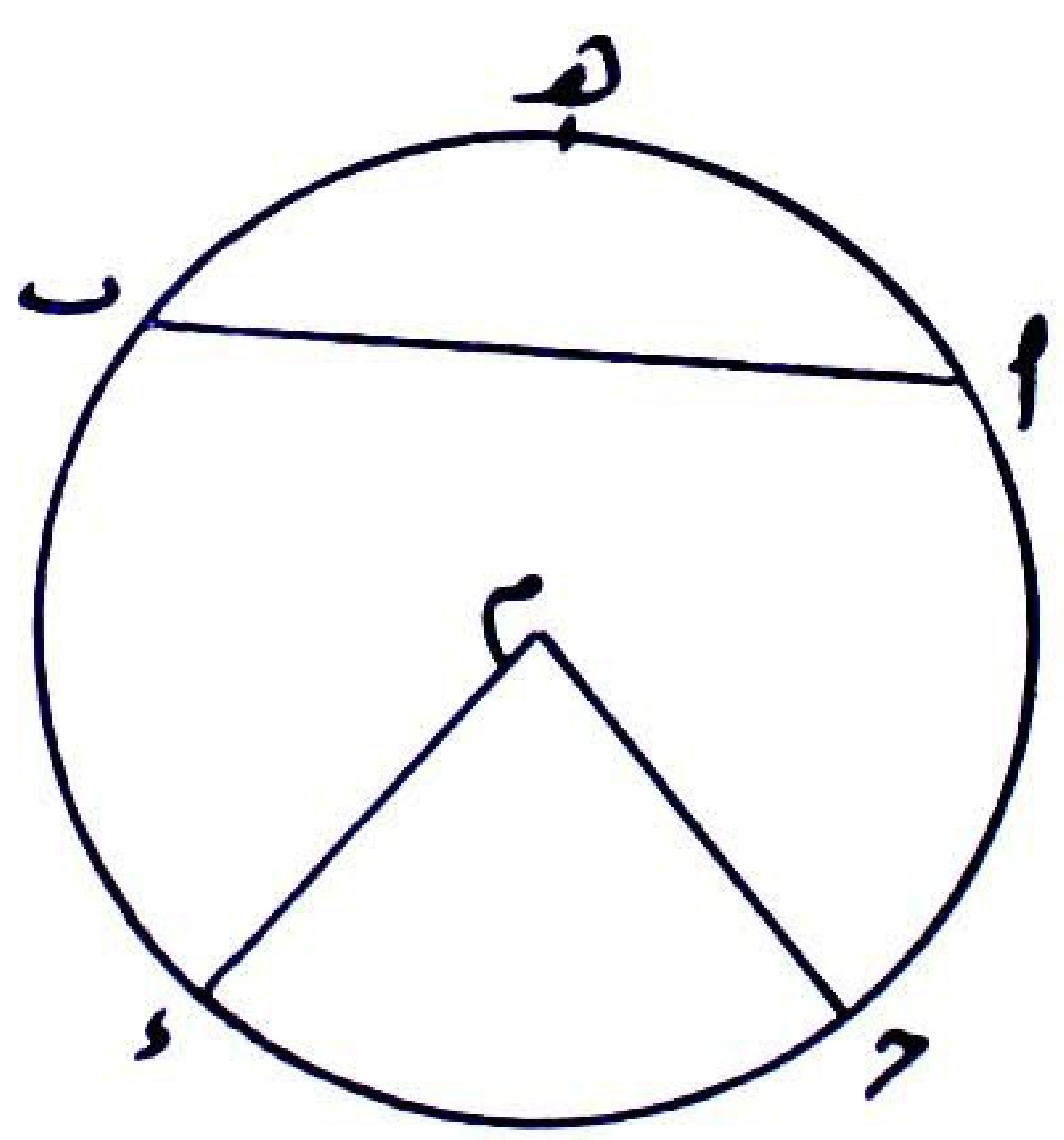
ولكن اذا كانت ب أي نقطة اخرى على س ع لكان م ب مائلاً بالنسبة للعمود م م′

∴ م ب > م م′ أي : م ب > نق

الشكل (٥٩)

وعليه تكون ب نقطة خارجة عن الدائرة أي إن نقطة م′ هي النقطة الوحيدة المشتركة بين س ع والدائرة ونقول في هذه الحالة أن س ع هو **مماس للدائرة** .

القطعة والقطاع :



الشكل (٦٠)

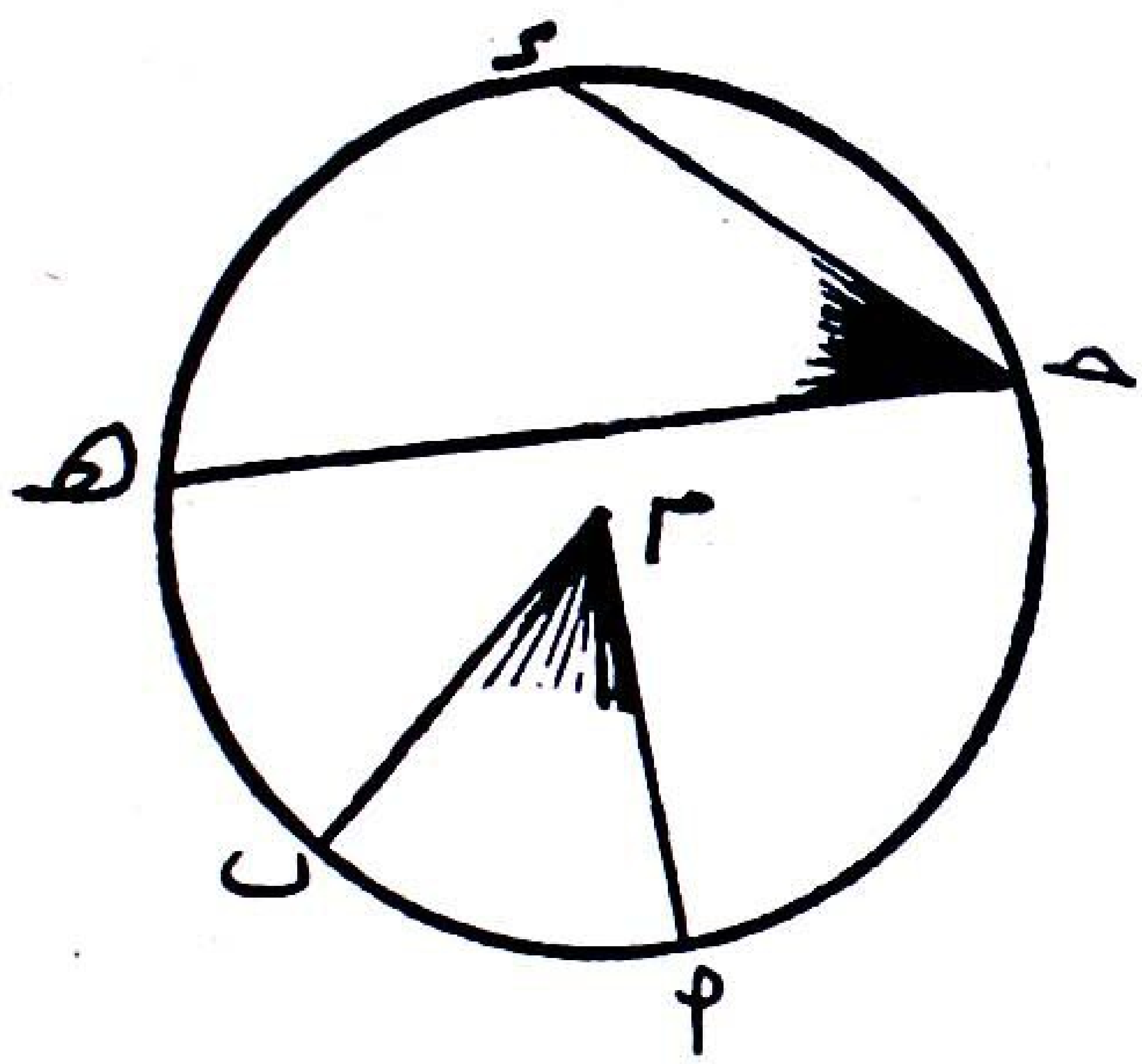
اي وتر في الدائرة يقسمها الى جزأين كل منها يسمى (قطعة) مثل القطعتين اهـ ب ، احء ب شكل (٦٠)

أي نصفي قطرين في الدائرة يحددان معاً جزءاً من الدائرة يسمى هذا الجزء قطاعاً فنصفا القطرين م ح ، م ء والقوس ح ء تحدد القطاع م ح ء وزاويته ح م ء

ملاحظة (١) : يرمز لقطاع الدائرة المحصور بين نصفي القطرين م حـ ، م ء والقوس حـ ا ء بـ م . حـ ا ء

ملاحظة (٢) : اذا ذكر القوس حـ ء فالمقصود به دائماً القوس الاصغر حـ ء . اما القوس الأكبر فيقرأ بثلاثة أحرف كالقوس حـ ا ء

الزاوية المركزية والزاوية المحيطية :

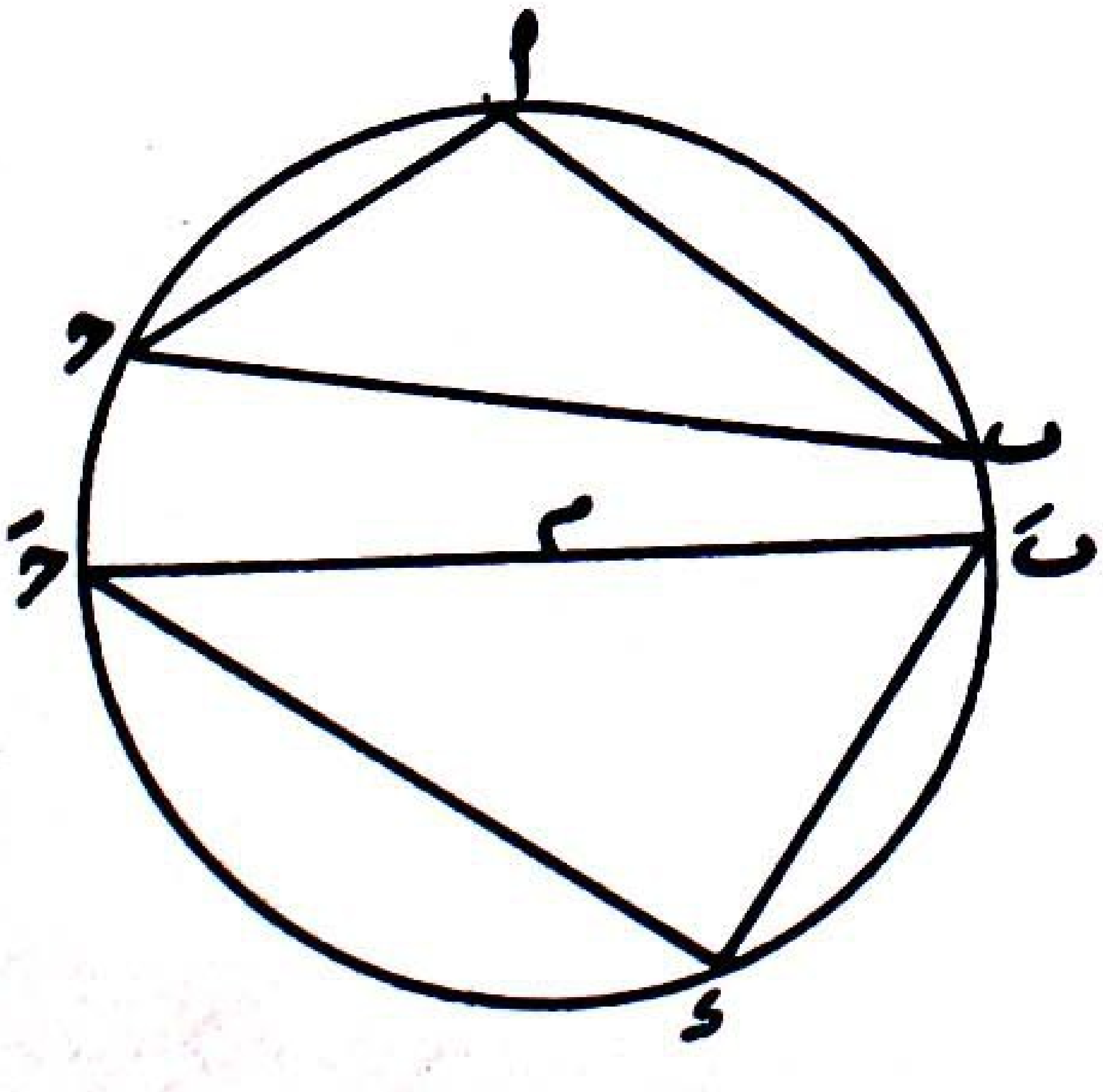


الشكل (٦١)

الزاوية المحصورة بين نصفي قطرين في دائرة تسمى (زاوية مركزية) مثل الزاوية المركزية ا م ب الشكل (٦١) (لأن رأسها في المركز)

والزاوية المحصورة بين وترين في دائرة متلاقيين على محيطها تسمى (زاوية محيطية) مثل الزاوية المحيطية ء حـ هـ (لأن رأسها حـ على المحيط) .

ملاحظة :



الشكل (٦٢)

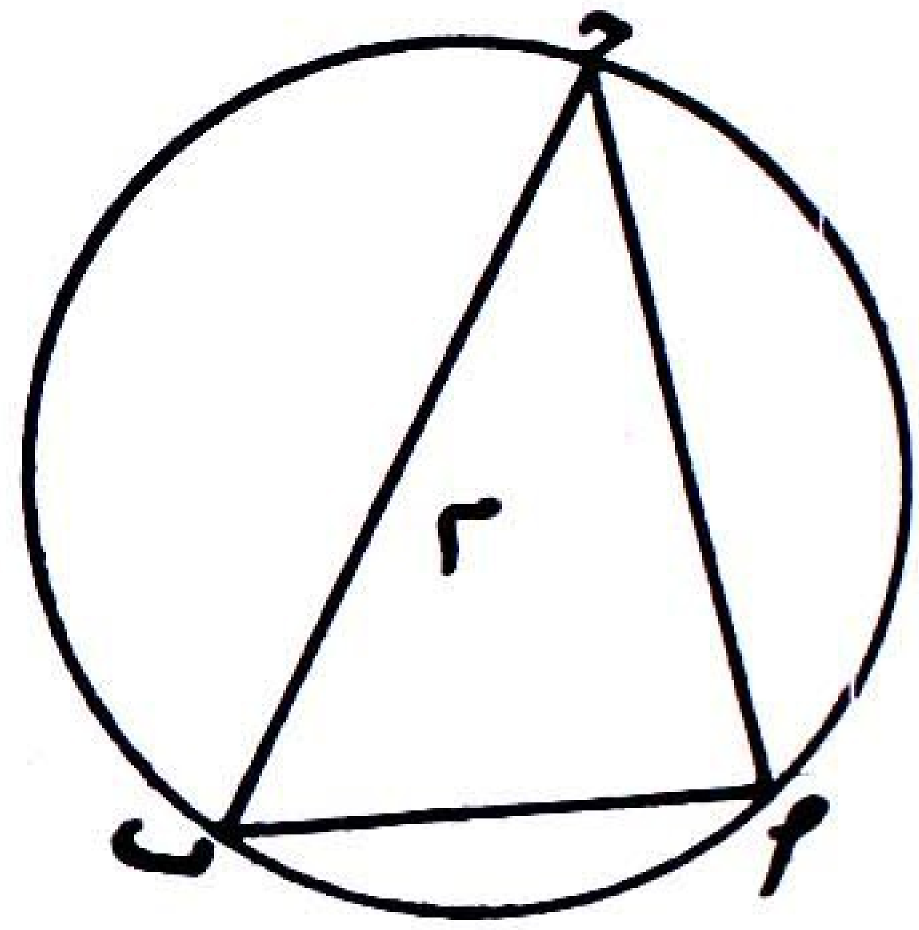
∠ ا م ب التي قوسها احـ ب في الشكل (٦١) تسمى زاوية مركزية منعكسة

في (الشكل ٦٢) ب حـ وتر في الدائرة ، ب ا حـ قطعة من الدائرة ، ∠ ب ا حـ تسمى زاوية مرسومة في قطعة من

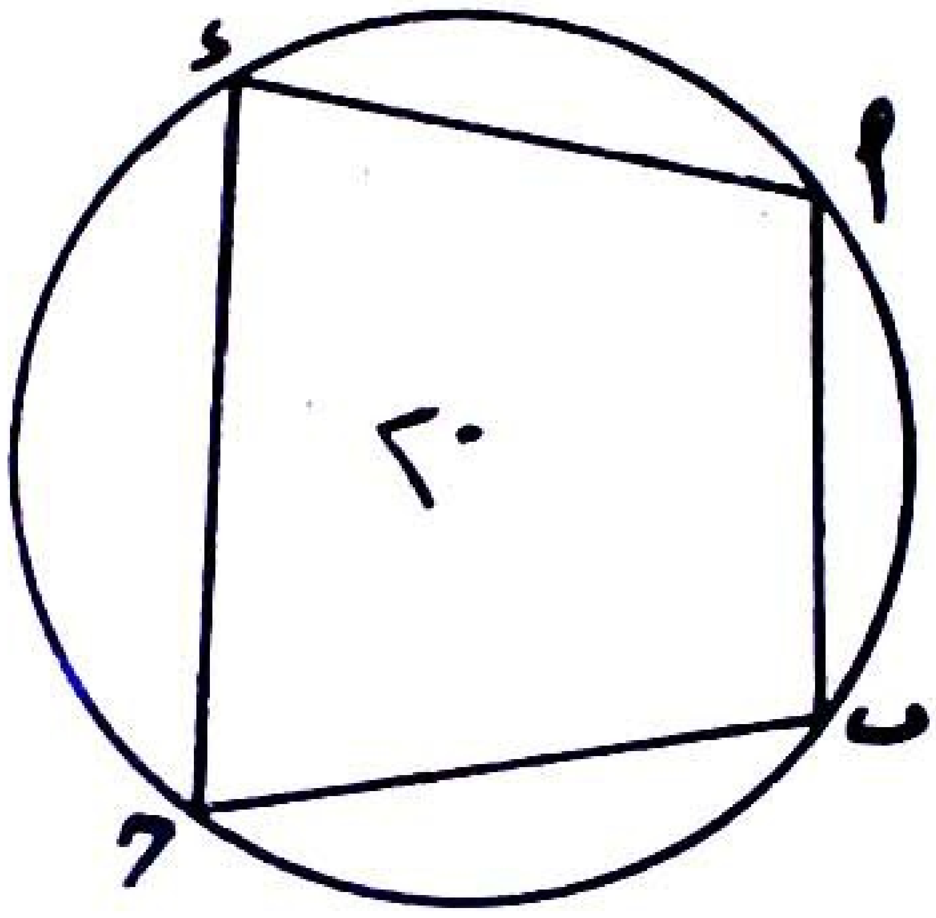
الدائرة . فاذا مر الوتر ب ح بمركز الدائرة م واصبح ب' ح' سميت الزاوية ب' ء ح' زاوية مرسومة في نصف الدائرة .

الاشكال المرسومة داخل دائرة :

يقال ان △ ا ب ح مرسوم داخل دائرة اذا كانت رؤوسه الثلاثة على محيط الدائرة (الشكل ٦٣ ـ ا) وبالمثل اي شكل كثير الاضلاع يقال له شكل دائري اذا كانت رؤوسه جميعها على محيط الدائرة فالشكل ا ب ح ء (الشكل ٦٣ ـ ب) رباعي دائري . ويقال ان الدائرة م مرسومة خارج



الشكل (٦٣ — ا)



الشكل (٦٣ — ب)

المثلث أو الشكل الرباعي اذا كان محيطها يمر بروؤس الشكل .

تمارين (٩)

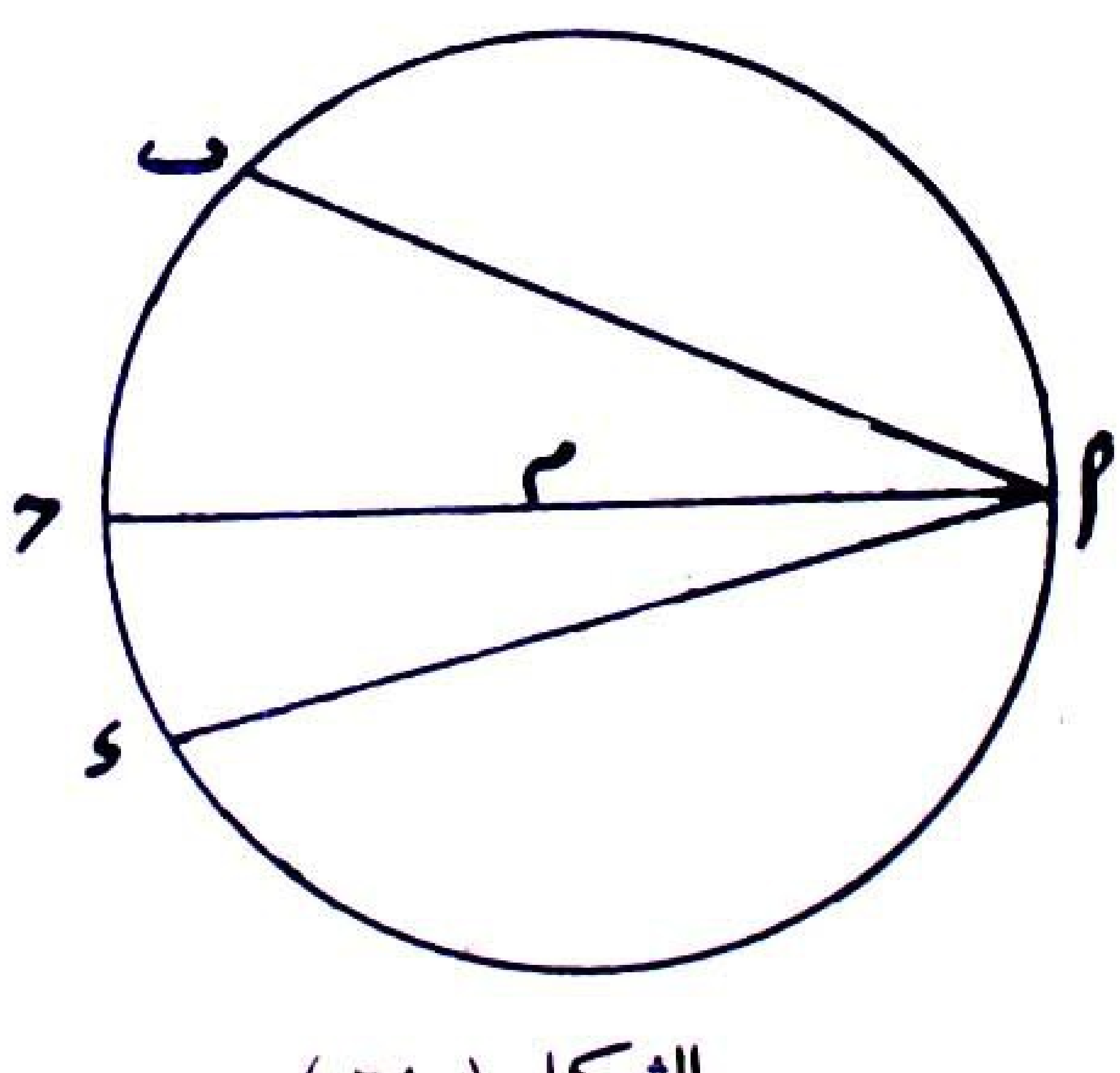
١ ــ اكمل العبارات الآتية :

(أ) ا ب . . . .

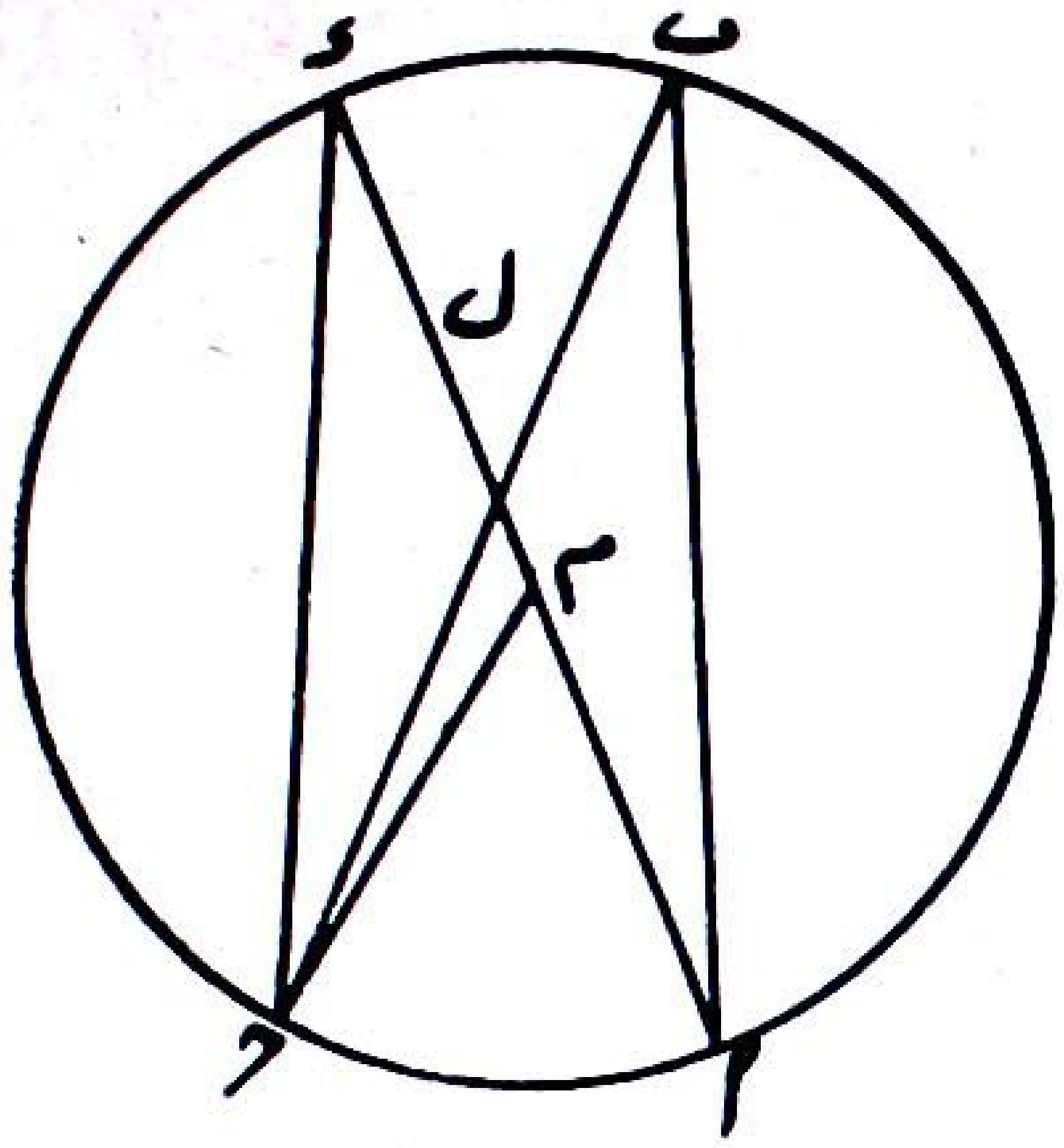
(ب) ا ح . . . .

(ح) ∠ ء ا ب . . .

٢ ــ ضع داخل القوس علامة √ للصواب ، علامة (×) للخطأ فيما يأتي :



الشكل (٦٤)



الشكل (٦٥)

( ) اب وتر في الدائرة م الشكل (٦٥)

( ) ∠ ب ، ∠ د محيطيتان

( ) ح م د زاوية محيطية

∠ م ح د زاوية محيطية

( ) ∠ ا ل ح زاوية مركزية

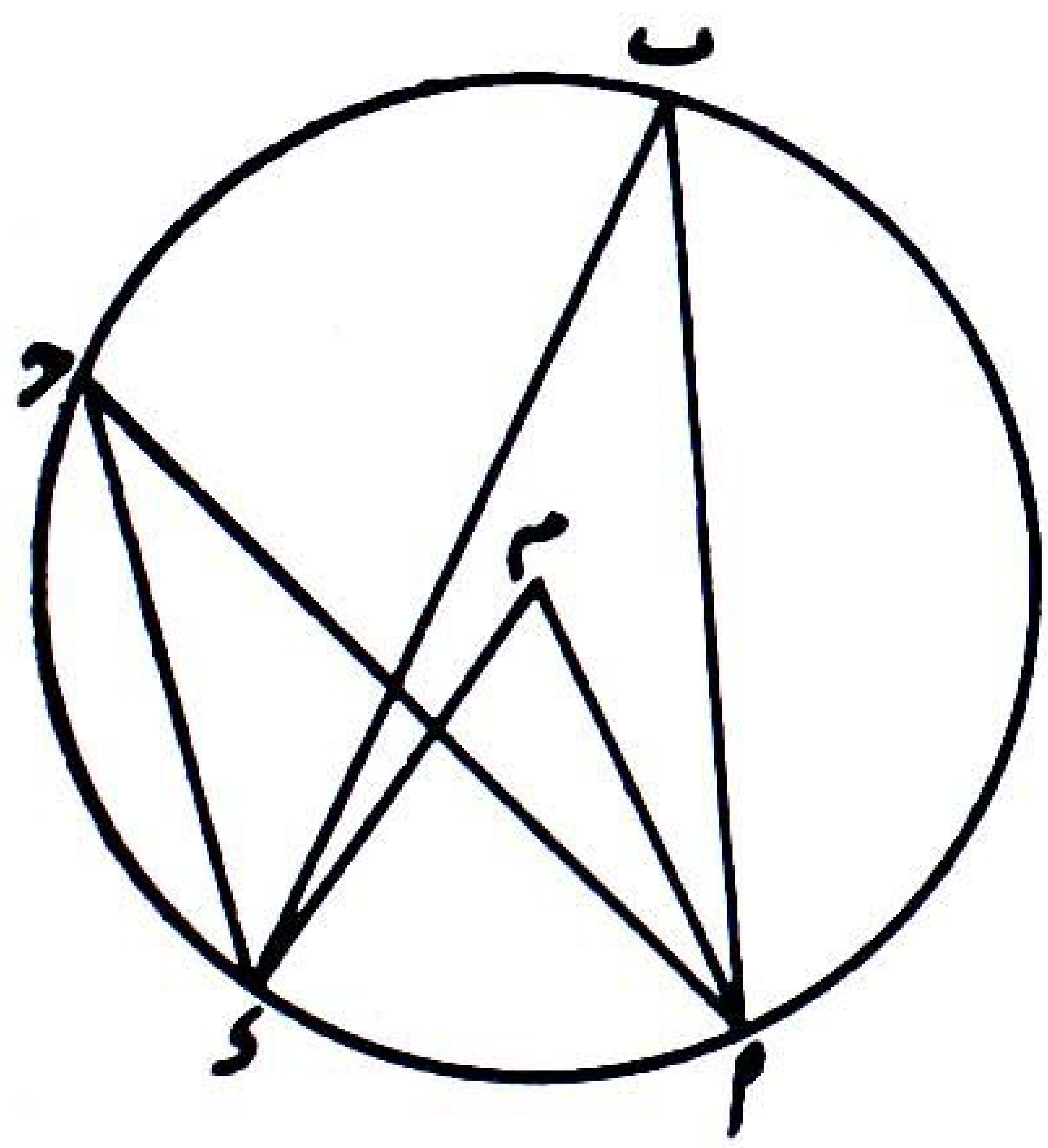
٣ – (أ) عين زاويتين محيطيتين في الشكل (٦٦) تشتركان في قوس واحد

ب – عين الزوايا المحيطية الموجودة في الشكل (٦٦)

ح – ما نوع كل من الزوايا الآتية :

∠ ب ا م ، ∠ ب ا ح ،

∠ ا د ح ، ∠ ح د ب .



الشكل (٦٦)

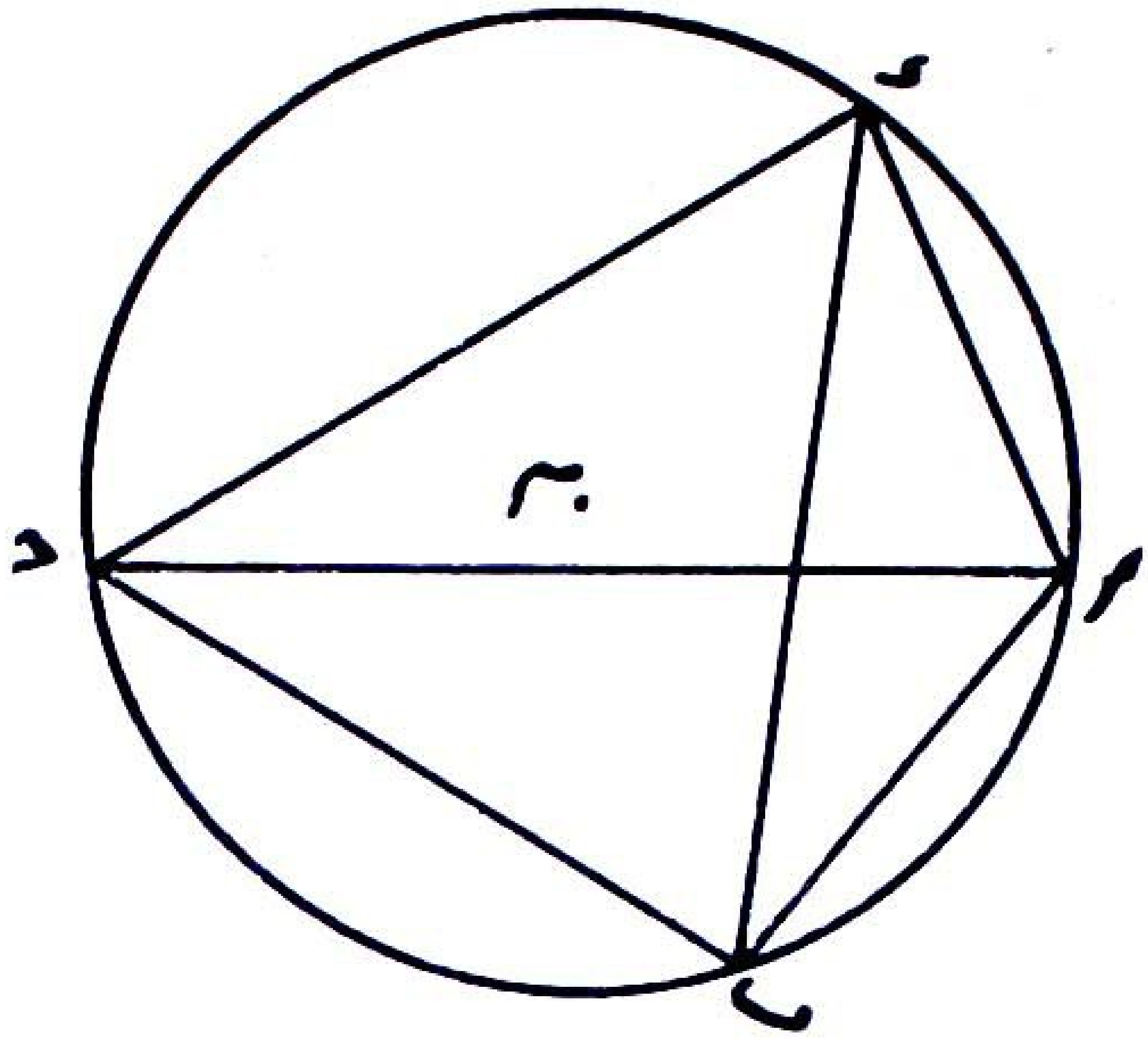
٤ ــ عين زاويتين محيطتين مشتركتين في قوس واحد في الشكل (٦٧) ثم اكمل ما يأتي؟

(ا) ∠ ا ء ب تشترك مع زاوية .... في القوس ا ب

(ب) ∠ ا ب ء تشترك مع زاوية ... في القوس ا ء

(ح) ∠ ء ا ح تشترك مع زاوية ء ب ح في .....

(ء) الزاويتان ... ، ... مشتركتان في القوس ب ح



الشكل (٦٧)

نظرية (١)

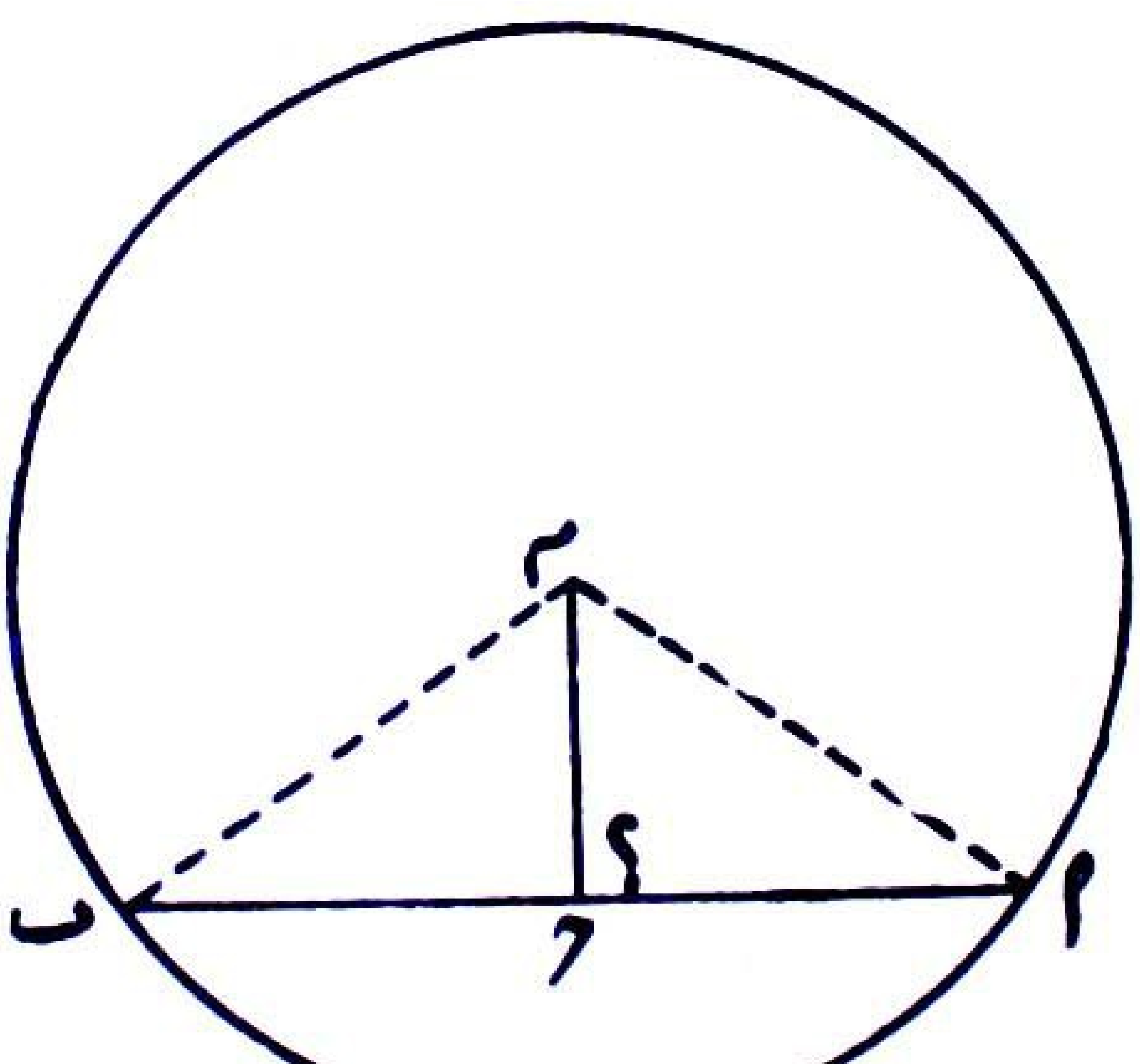
المستقيم الواصل من مركز الدائرة الى منتصف وتر فيها يكون عمودياً عليه

المعطيات : م دائرة ، ا ب وتر فيها ح منتصف ا ب الشكل (٦٨)

المطلوب : اثبات ان م ح ⊥ ا ب

العمل : نصل م ا ، م ب

البرهان : في △△ م ا ح ، م ب ح



الشكل (٦٨)

فيهما
م ا = م ب نصفا قطرين في دائره
ح ا = ح ب بالتنصيف
م ح مشترك

∴ ينطبق المثلثان نظرية

وينتج ان ∠ ا ح م = ∠ ب ح م

، ∵ مجموعهما = ٢ ق

∴ كل منهما = ق

∴ م ح ⊥ ا ب

وهو المطلوب

تمرين – برهن النظرية السابقة بطريقة المحل الهندسي .

عكس النظرية (١)

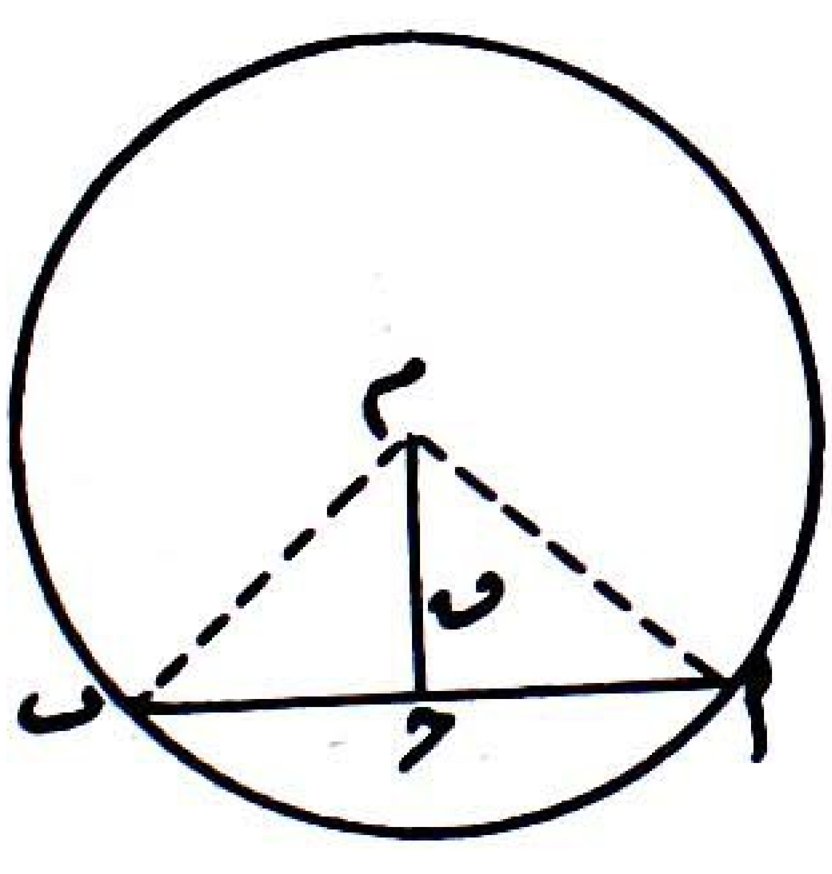
العمود النازل من مركز الدائره على اي وتر فيها ينصفه

المعطيات : ا ب وتر في دائرة مركزها م
م ح ⊥ ا ب الشكل (٦٩)

المطلوب : اثبات ان ح منتصف ا ب

العمل : نصل م ا ، م ب

البرهان : △ △ م ا ح ، م ب ح



الشكل(٦٩)

فيهما
م ا = م ب نصفا قطرين في دائرة واحدة
م ح مشترك
∠ م ح ا = ∠ م ح ب بالقيام

∴ ينطبق △ △ وينتج ان

حـ ا = حـ ب

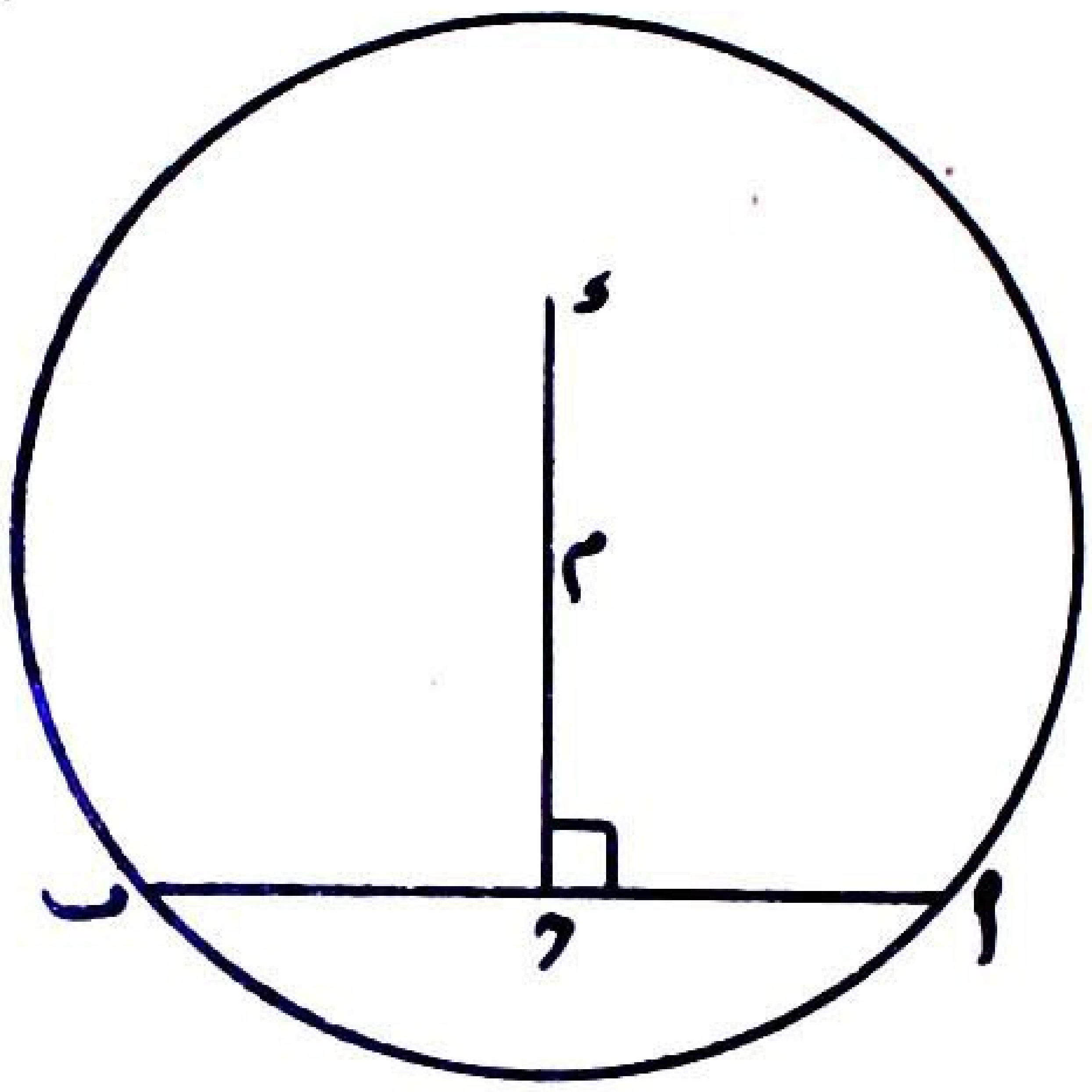
وهو المطلوب

نتيجة (١) :

العمود المقام على وتر في دائرة من منتصفه يمر بمركزها

العمل : ننصف الوتر ا ب في حـ ثم نقيم عليه من نقطة حـ العمود حـ ى الشكل (٧٠)

البرهان : حـ ى هو المحل الهندسي لجميع النقط التي كل منها على بعدين متساويين من ا ، ب وحيث ان مركز الدائرة م على بعدين متساويين من ا ، ب



الشكل (٧٠)

∴ م احدى نقط المحل الهندسي المذكور

∴ م تقع على حـ ى

وهو المطلوب

تمرين محلول :

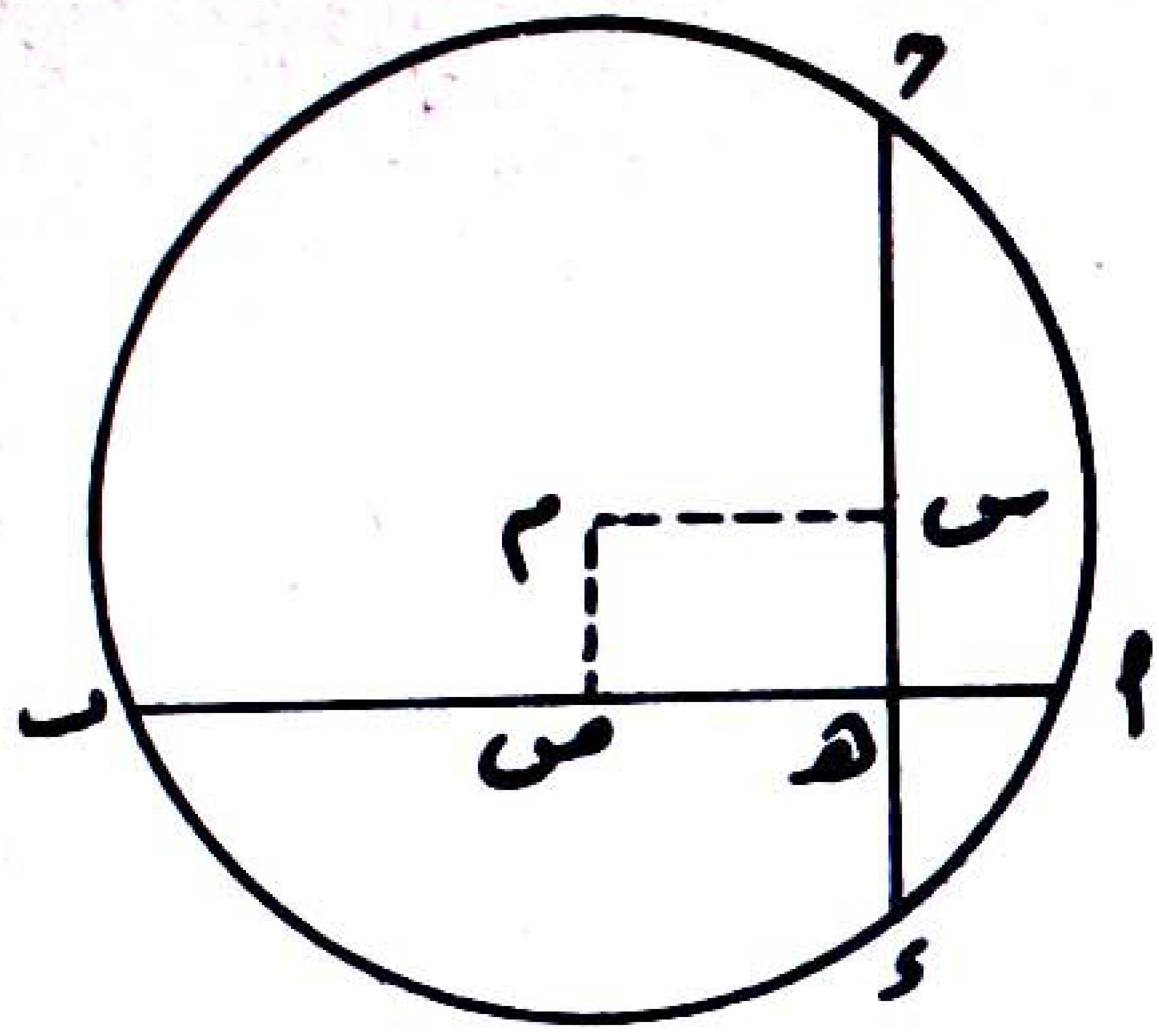
ا ب ، حـ ى وتران متعامدان في الدائرة م تقاطعا في هـ اثبت ان بعد م عن منتصف حـ ى = بعد نقطة هـ عن منتصف الوتر ا ب

المعطيات : م دائرة . ا ب ، حـ ء وتران متعامدان ومتقاطعان في هـ الشكل (٧١)

المطلوب : اثبات ان بعد م عن منتصف حـ ء يساوي بعده عن منتصف ا ب

العمل : ننصف حـ ء في س ثم نصل م س وننصف ا ب في ص ثم نصل م ص

البرهان ∵ س منتصف حـ ء



الشكل (٧١)

∴ م س عمودي على حـ ء

∵ ص منتصف ا ب .

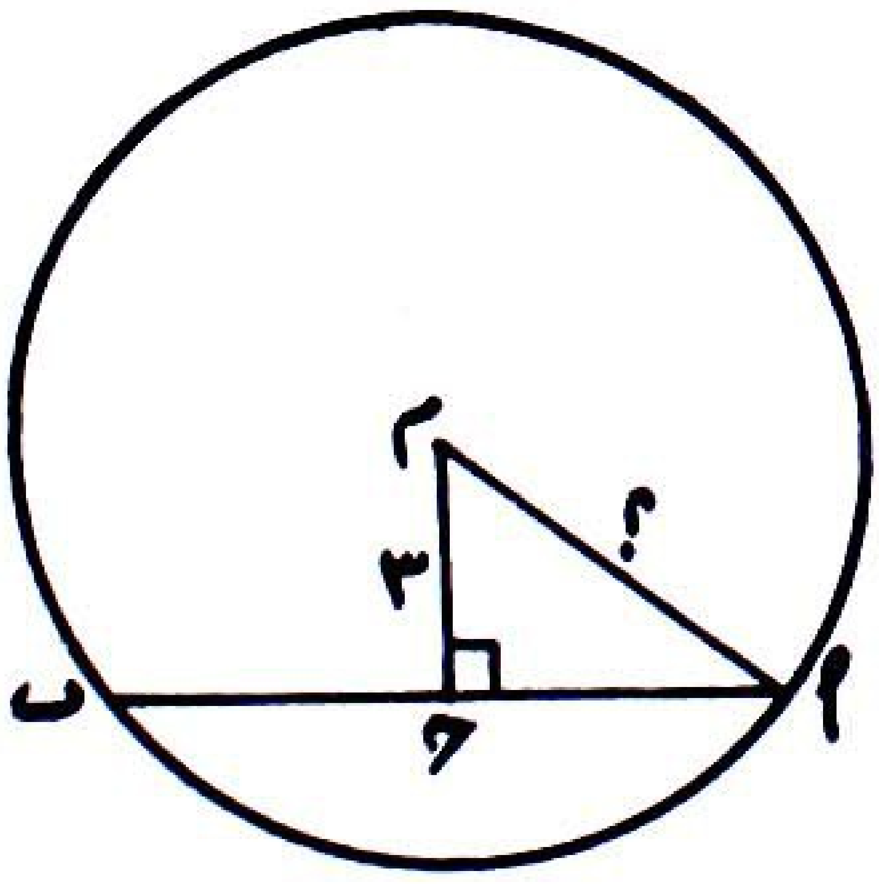
∴ م ص عمودي على ا ب .

، ∵ ∠ هـ = ق ∴ الشكل م س هـ ص مستطيل

∴ م س = هـ ص .

وهو المطلوب

تمرين (١٠)

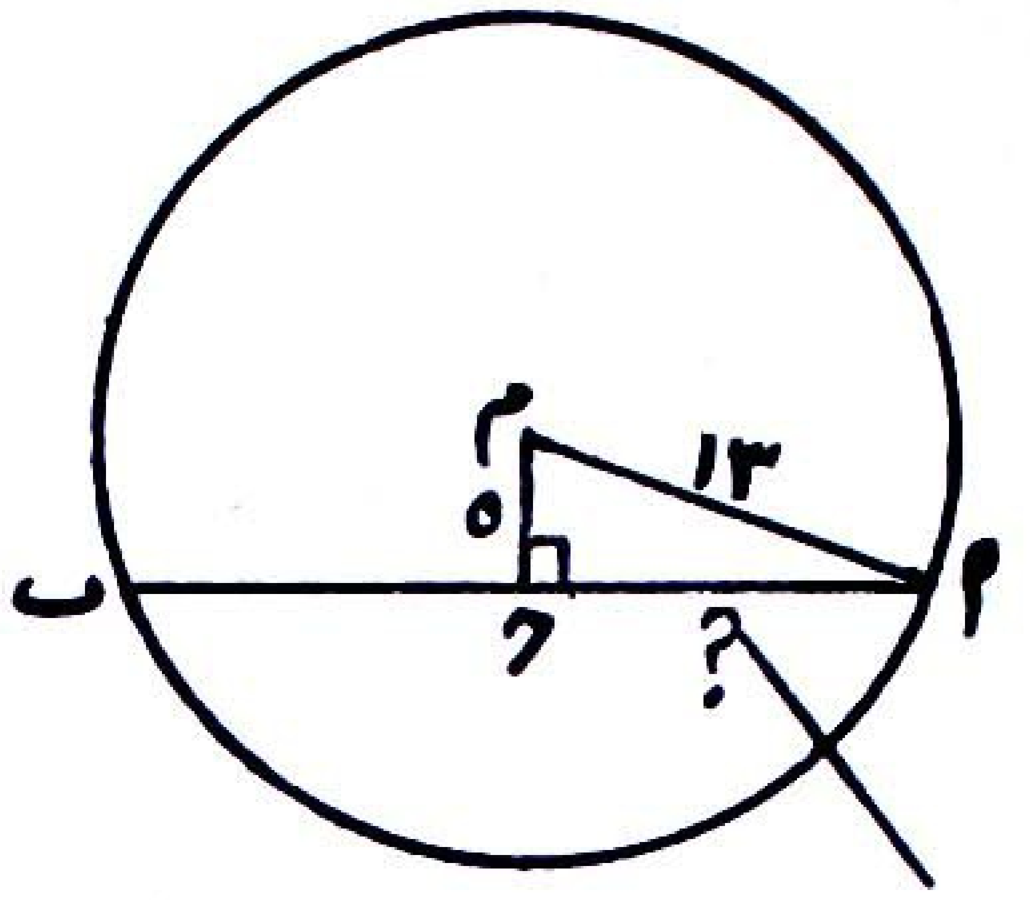


الشكل (٧٢)

ا ب = ٨ سم

م حـ = ٣ سم

ا م = ؟

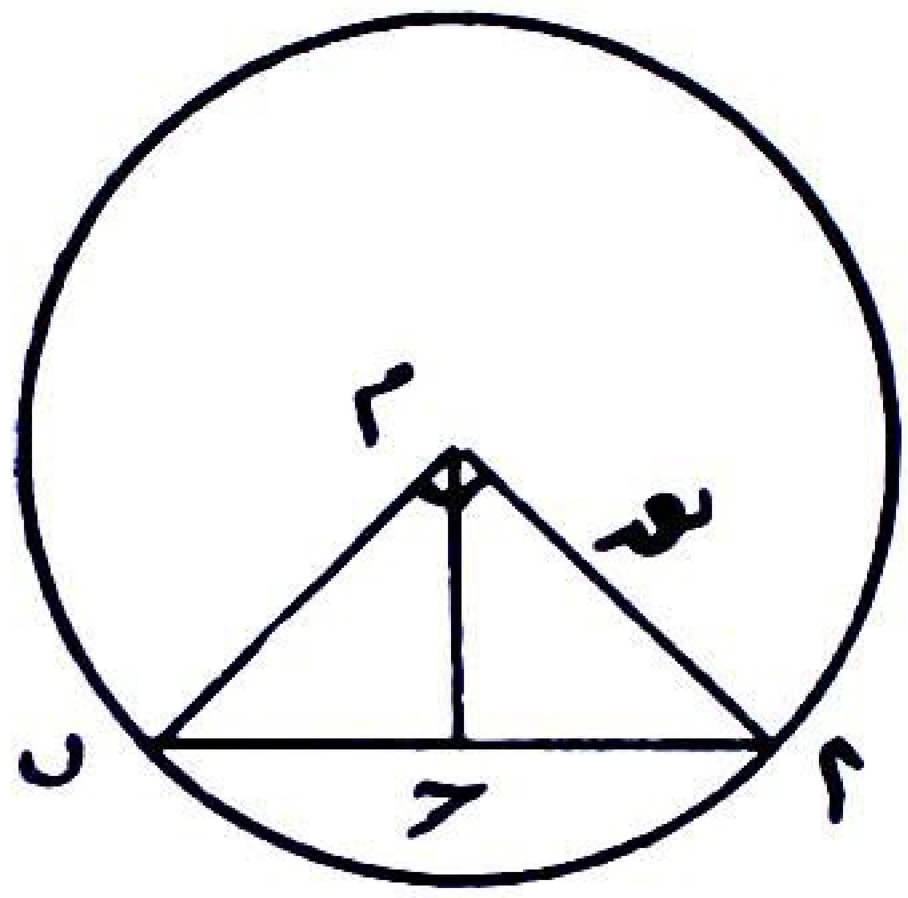


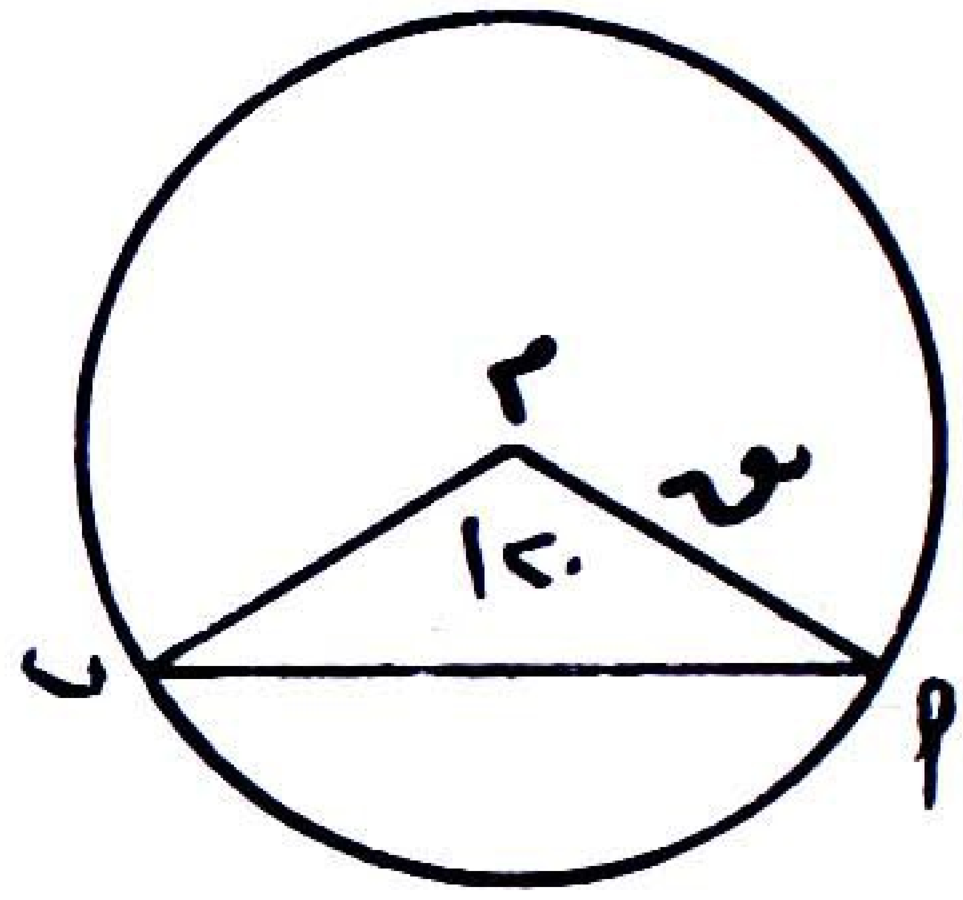
م ح = ٥ سم

م ا = ١٣ سم

ا ب = ؟

الشكل (٧٣)





الشكل (٧٥)

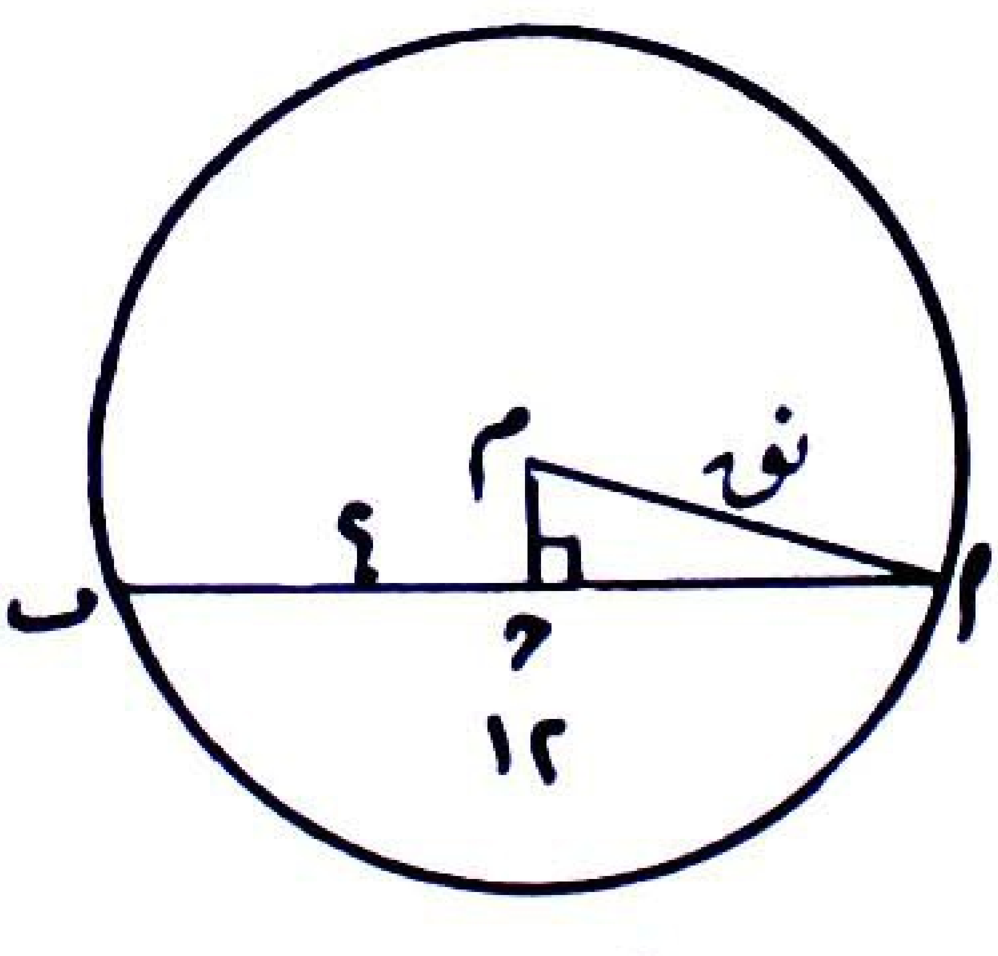
الشكل (٧٤)

اذا كانت ∠ ا م ب = ٩٠

فاحسب ا ب ، م ح بدلالة س

احسب ا ب بدلالة س

١ – أوجد طول المستقيم الذي يرمز له بالعلامة (؟) في الاشكال السابقة ٧٢ الى ٧٥ .



الشكل (٧٦)

٢ – أوجد طول العمود م ح النازل من م على ا ب اذا علم ان نصف قطر الدائرة = ٦٫٥ سم وأن طول ا ب = ١٢ سم .
الشكل (٧٦)

٣ – دائرتان متحدتان في المركز (م) رسم

القاطع ا حـ ى ب يقطع الدائرة الكبرى في ا ، ب ويقطع الدائرة الصغرى في حـ ، ى

برهن أن ا حـ = ى ب

٤ – ا ب ، ا حـ وتران متساويان في دائرة م برهن أن م ا ينصف ∠ ا

٥ – (و) نقطة خارج دائرة م . رسم منها القاطع و ا ب يقطع محيط الدائرة في ا ، ب والقاطع و حـ ى يقطع محيط الدائرة في حـ ، ى فاذا كان و ا ب = و حـ ى . برهن أن القاطعين متساويا البعد عن المركز م

٦ – م دائرة ، ا نقطة على محيطها رسم الوتران ا ب ، ا حـ ثم انزل من م العمودان م س ، م ص على ا ب ، ا حـ على الترتيب . أثبت أن س ص // ب حـ

٧ – ا ب قطر في دائرة م ، حـ ى وتر فيها – انزل من نهايتي القطر ا ب العمودان ا ﻫ ، ب ق فلاقيا امتداد الوتر حـ ى في ﻫ ، ق على الترتيب أثبت أن ﻫ حـ = ق ى (العمل انزل من م عموداً على الوتر حـ ى) .

٨ – ا ب قطر في دائرة مركزها م أخذت نقطة س على م ب ثم رسم الوتر حـ ى يمر بالنقطة س وأخذت على م ا النقطة ص بحيث كان ا ص = س ب ثم أنزل من ص العمود ص ع على الوتر حـ ى لاقاه في ع برهن أن حـ ع = س ى .

٩ – من نقطة داخل دائرة ارسم وتراً فيها بحيث تنصفه هذه النقطة .

١٠ – ا ب ، حـ ى وتران متوازيان في دائرة مركزها م ، نصف ا ب في س ثم وصل س م أثبت أن س م أو امتداده ينصف الوتر حـ ى .

١١ – م دائرة رسم فيها القطر ا م ب ورسم الوتران المتوازيان ا حـ ، ب ى لاقيا محيط الدائرة في حـ ، ى برهن أن : ا حـ = ب ى .

١٢ – ا ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، نصف ا ب في س ، ب حـ في ص ، حـ ا في ع . اقيم من س عمود على ا ب ومن ص عمود على ب حـ فتلاقيا في نقطة م . أثبت أن م ع عمودي على ا حـ .

١٣ - وتران متوازيان البعد بينهما ١٤ سم مرسومان في دائرة نصف قطرها ١٠ سم فإذا كان البعد بين أحد الوترين ومركز الدائرة ٦ سم فأوجد طول كل من الوترين .

١٤ - ا ب ، حـ ء وتران متوازيان مرسومان في دائرة م . س ، ص منتصفا ا ب ، حـ ء على الترتيب أثبت أن : س ص أو امتـــداده يمر بمركز الدائرة م .

١٥ - م س ص مثلث رسمت دائرة مركزها م فقطع محيطها المستقيم س ص في نقطتي ا ، ب فإذا كان س ا = ص ب فبرهن على أن م س = م ص .

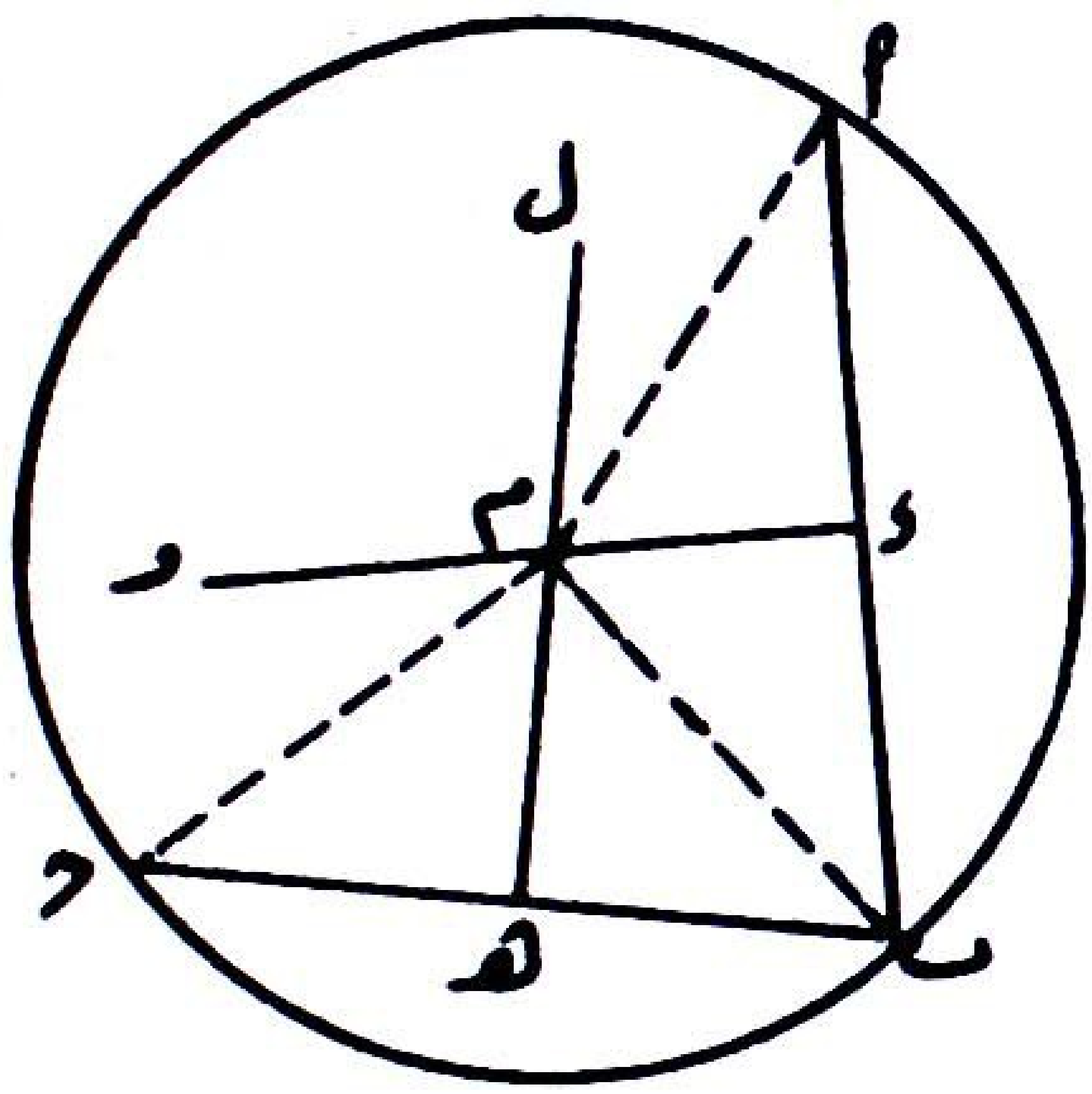
نظرية (٢)

كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة تعين دائرة واحدة تمر بها

المعطيات : ا ، ب ، حـ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة . الشكل (٧٧) .

المطلوب : اثبات انه يمر بهذه النقط محيط دائرة ولا يمكن رسم سواها .

العمل : نصل ا ب ، ب حـ ننصف ا ب في ء ، ب حـ في هـ ثم



الشكل (٧٧)

نقيم من ء عموداً على ا ب ليكن ء و ونقيم من هـ عموداً على ب حـ وليكن هـ ل .

∵ ا ب ، ب حـ مستقيمان غير متوازيين

∴ العمودان (ء و) ، (هـ ل) يتقاطعان في نقطة ولتكن م

نصل م ا ، م ب ، م حـ .

البرهان : في △△ م ا ء ، م ب ء

فيهما
ء ا = ء ب عملاً
، ء م مشترك
، ∠ ا ء م = ∠ ب ء م بالقيام

∴ ينطبق المثلثان وينتج ان م ا = م ب

وبالمثل يمكن تطابق △△ م ب هـ ، م حـ هـ

وينتج من التطابق أن م ب = م حـ

∴ م ا = م ب = م حـ

∴ م على أبعاد متساوية من ا ، ب ، حـ

فاذا ركزنا في م وبفتحة = م ا ورسمنا محيط دائرة

فانه يمر بالنقط ا ، ب ، حـ .

∴ ء و ، هـ ل لا يمكن أن يتقاطعا في غير نقطة واحدة .

∴ لايمكن أن يوجد نقطة أخرى غير م متساوية البعد عن ا ، ب ، حـ

∴ لايمكن أن يوجد غير دائرة واحدة تمر بالنقط ا ، ب ، حـ .

وهو المطلوب

تمرين : برهن النظرية السابقة بطريقة المحل الهندسي .

نتيجة :

لا يمكن أن يتقاطع محيطا دائرتين في أكثر من نقطتين لانهما إذا اشتركا في ثلاث نقط لا بد أن يتطابقا .

تعريف (١) :

المستقيم الواصل بين نقطتي تقاطع دائرتين يسمى وترا مشتركا في الدائرتين .

تعريف (٢) :

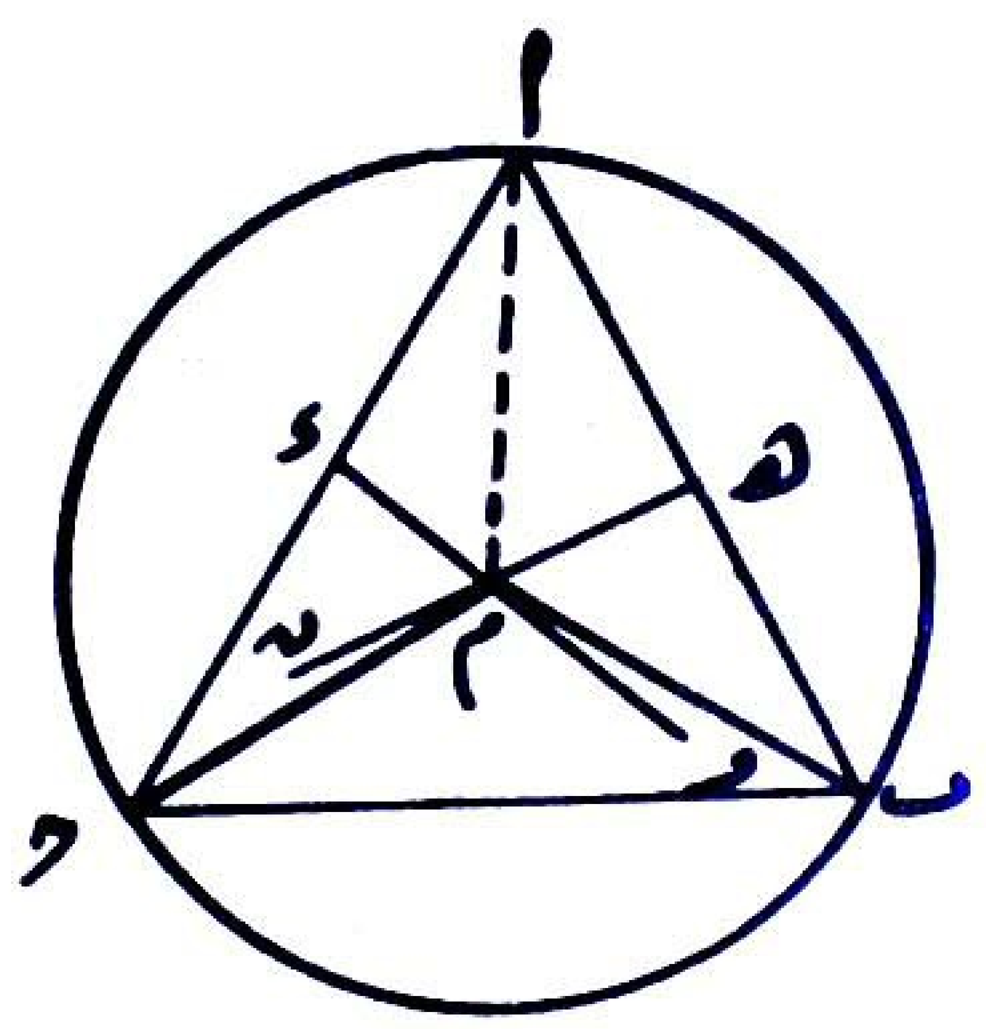
المستقيم الواصل بين مركزي دائرتين يعرف بخط المركزين .

تطبيق :

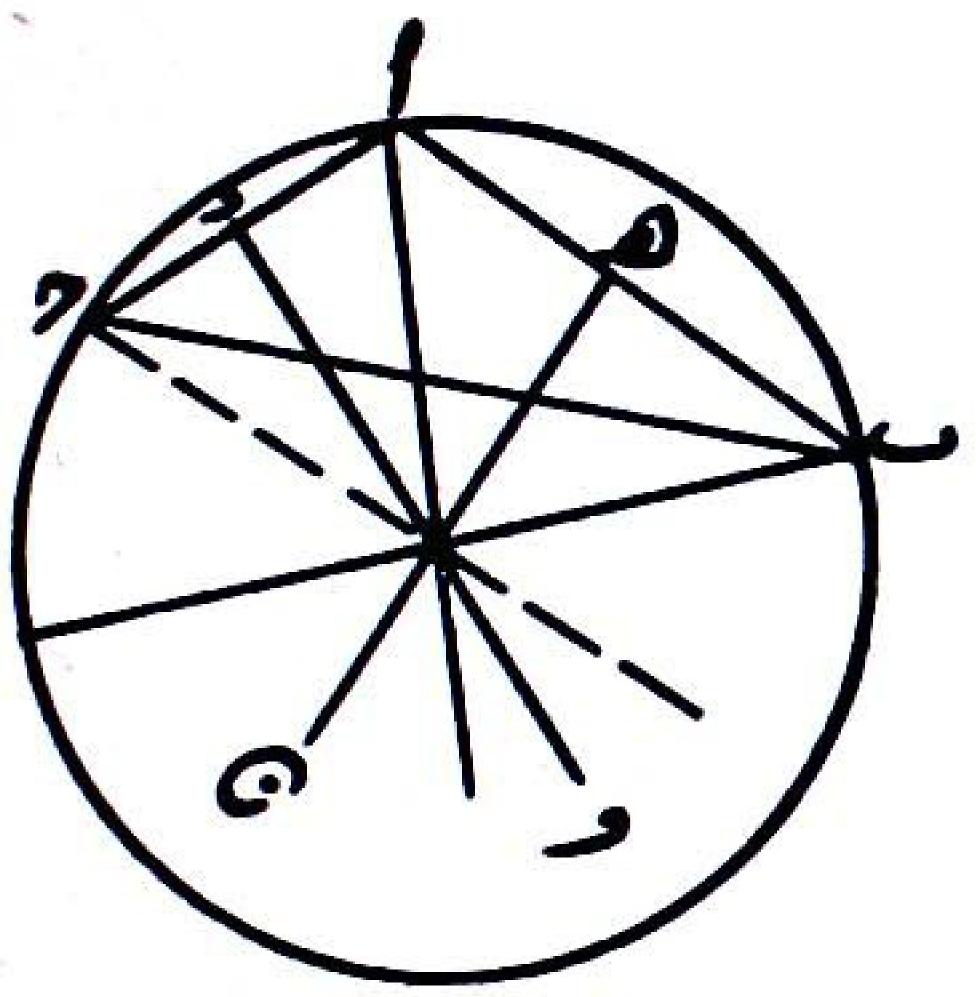
اذا أمكن رسم ثلاثة مستقيمات متساوية من نقطة داخل دائرة الى محيطها كانت النقطة المذكورة مركز الدائرة .

عملية

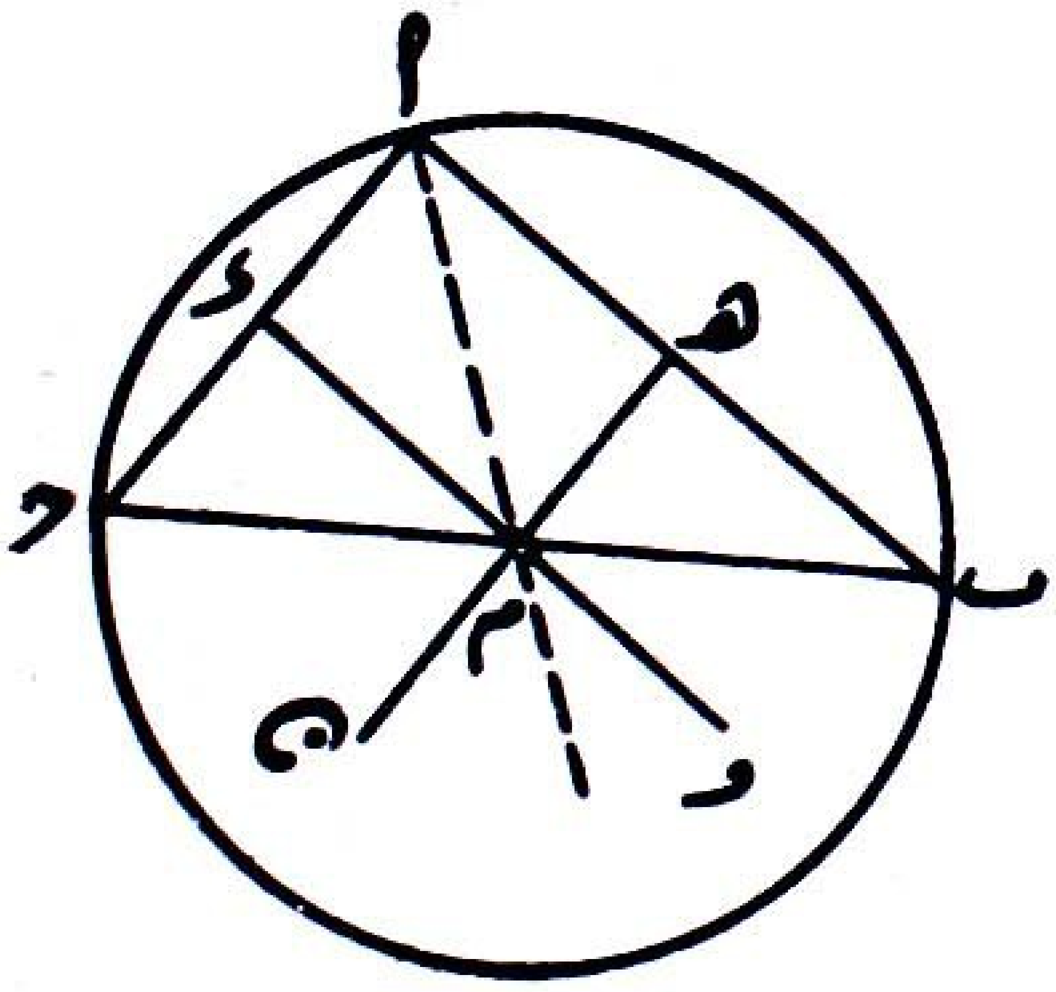
المطلوب رسم دائرة خارج مثلث



الشكل (٧٨)



الشكل (٧٩)



الشكل (٨٠)

المعطيات : ا ب حـ مثلث الأشكال (٧٨) و (٧٩) و (٨٠) .

المطلوب : رسم دائرة تمر برؤوسه (خارج المثلث)

العمل : ننصف ا ب في هـ ونقيم عليه العمود هـ ن ثم ننصف ا حـ في ء ونقيم عليه العمود ء و فيتقاطع العمودان في م

نركز في م وبنصف قطر يساوي م ا نرسم دائرة فتكون هي الدائرة المطلوبة .

البرهان : نصل م ا ، م ب ، م حـ

في △△ ا هـ م ، ب هـ م

فيهما $\left\{ \begin{array}{ll} \text{ا هـ} = \text{ب هـ} & \text{بالتنصيف عملا} \\ \text{هـ م} & \text{مشترك} \\ \angle\ \text{ا هـ م} = \angle\ \text{ب هـ م} & \text{بالقيام} \end{array} \right.$

∴ ينطبق المثلثان وينتج ان ا م = ب م وبنفس الطريقة يمكن اثبات أن ا م = حـ م

∴ ا م = ب م = حـ م

∴ م على أبعاد متساوية من ا ، ب ، حـ وبما انه لا يوجد نقطة غير م تكون متساوية البعد عن ا ، ب ، حـ

∴ م هي مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث ا ب حـ

وهو المطلوب .

ملاحظات :

١ – مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث الحاد الزوايا تقع داخله الشكل(٧٨)

٢ – مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث القائم الزاوية تقع في منتصف الضلع الثالث المقابل للزاوية القائمة (وتر المثلث القائم الزاوية) الشكل (٨٠)

٣ – مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث المنفرج الزاوية يقع خارج المثلث الشكل (٧٩)

٤ – ملتقى الاعمدة المقامة على أضلاع المثلث من منتصفاتها هي مركز الدائرة الخارجية للمثلث

تمارين (١١)

١ – ا ب مستقيم طوله ٥ سم . ارسم دائرة تمر بالنقطتين ا ، ب ونصف قطرها ٦٫٥ سم

٢ – ا ب حـ زاوية مقدارها ٦٠° فاذا كان ا ب = ب حـ = ٨ سم أوجد نصف قطر الدائرة المار بالنقط ا ، ب ، حـ

٣ – ا ب حـ زاوية قائمة فيها ا ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٥ سم أوجد نصف قطر الدائرة التي تمر بالنقط ا ، ب ، حـ .

٤ – ا ب حـ زاوية مقدارها ١٢٠° فيها ا ب = ١٠ سم ، ب حـ = ١٠ سم أوجد نصف قطر هذه الدائرة التي تمر بالنقط الثلاثة للزاوية .

٥ – دائرة فيها ا ب ، حـ ء وتران تقاطعا في هـ . أثبت أن مراكز الدوائر المـــارة برؤوس المثلثات ا هـ حـ ، ا هـ ء ، حـ هـ ب ، ب هـ ء هي رؤوس متوازي أضلاع

تمادين (١٢) على تقاطع دائرتين

١ – دائرتان متقاطعتان في حـ ، ء ومركزاهما ا ، ب رسم مستقيم مار بإحدى نقطتي التقاطع ويوازي ا ب – ويقطع المحيطين في س ، ص أثبت أن س ص = ٢ ا ب

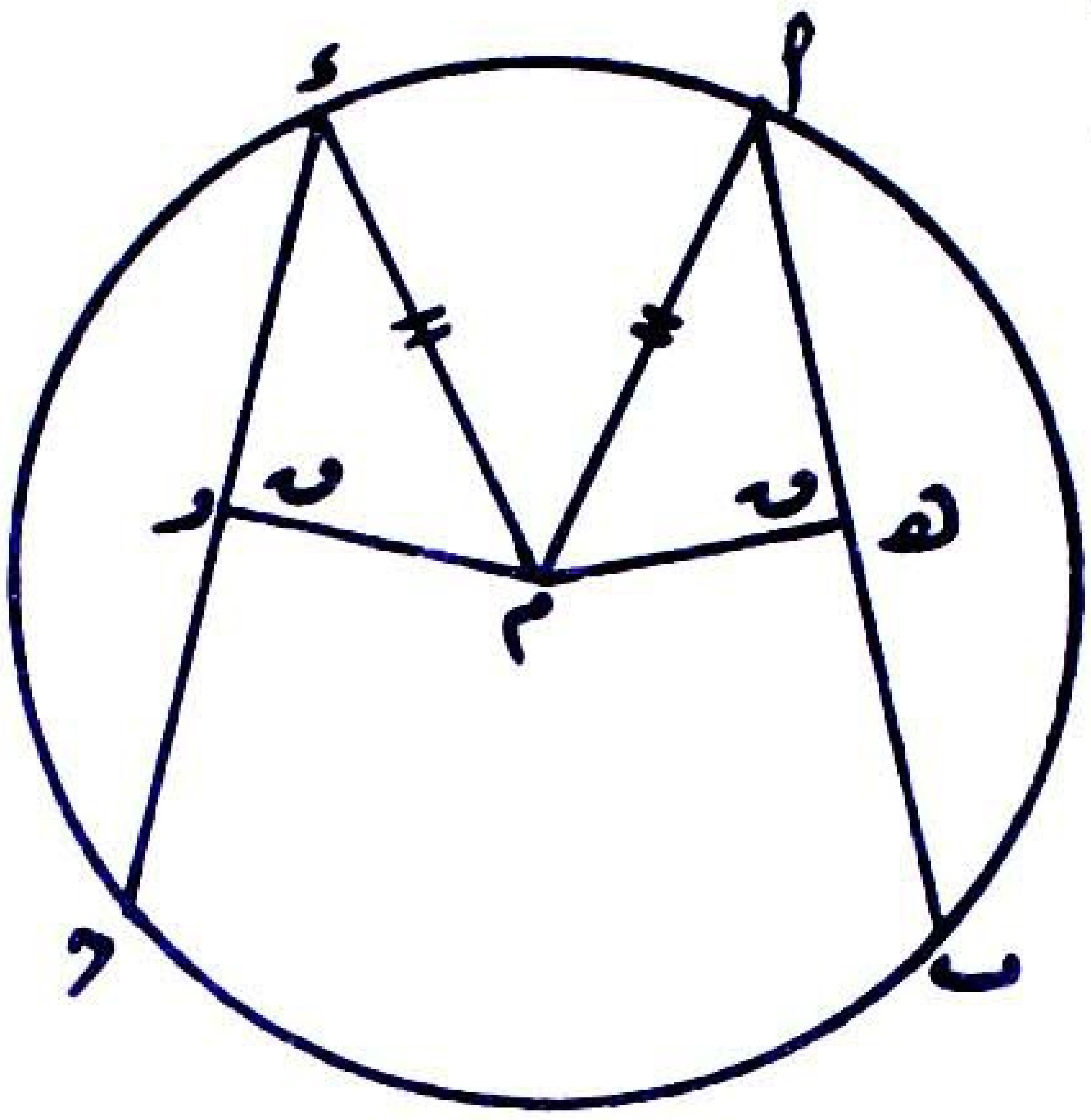
٢ – دائرتان متقاطعتان في ا ، ب رسم المستقيمان المتوازيان حـ ا ء ، هـ ب و فقطعا احدى الدائرتين في حـ ، هـ والاخرى في ء ، و برهن ان حـ ء = هـ و

٣ – ا ، ب دائرتان متقاطعتان في م ، ن رسم القاطع حـ م ء يقطع الدائرة م في حـ والدائرة ب في ء – ويكون عمودياً على ن م أثبت أن حـ ء = ٢ ا ب

٤ – دائرتان مركزاهما ا ، ب متقاطعتان في حـ ، ء برهن ان مركزيها ا ، ب ومنتصف الوتر المشترك حـ ء على استقامة واحدة .

نظرية (٣)

الاوتار المتساوية في الدائرة على أبعاد متساويه عن مركزها



الشكل (٨١)

المعطيات : اب ، ءحـ وتران متساويان في دائرة مركزها م ـ أنزل العمودان م هـ ، م و على اب ، ءحـ على الترتيب . الشكل (٨١) .

المطلوب : اثبات أن م هـ = م ء

العمــل : نصل م ا ، م و .

البرهان : ∵ م هـ ⊥ ا ب .

∴ ا هـ = ب هـ .

، ∵ م و ⊥ ء حـ .

∴ ء و = حـ و نظرية

ولكن ا ب = ء حـ ∴ ا هـ = ء و

في △△ ا هـ م ، ء و م

فيهما { م ا = م ء (نصفا قطرين في دائرة)
ا هـ = ء و برهاناً
∠ ا هـ م = ∠ ء و م }

∴ ينطبق المثلثان وينتج أن

م هـ = م و وهو المطلوب .

عكس نظرية (٣)

الاوتار التي على أبعاد متساوية عن المركز متساوية

المعطيات : ا ب ، حـ ء وتران في دائرة مركزها م الشكل (٨١) .

م هـ ⊥ ا ب ، م و ⊥ حـ ى ، م هـ = م و

المطلوب : اثبات ان الوتر ا ب = الوتر ى حـ

البرهان : في △△ ا هـ م ، ى و م

فيهما	م ا = م ى	نصفا قطرين في دائرة واحدة
	م هـ = م و	فرضاً
	∠ هـ = ∠ و	بالقيام

∴ ينطبق △△ وينتج ان ا هـ = ى و

م هـ ⊥ ا ب ∴ ا هـ = ب هـ نظرية

∴ ا هـ = $\frac{1}{2}$ ا ب

وبالمثل م و ⊥ ى حـ ∴ ى و = حـ و نظرية

∴ ى و = $\frac{1}{2}$ ى حـ

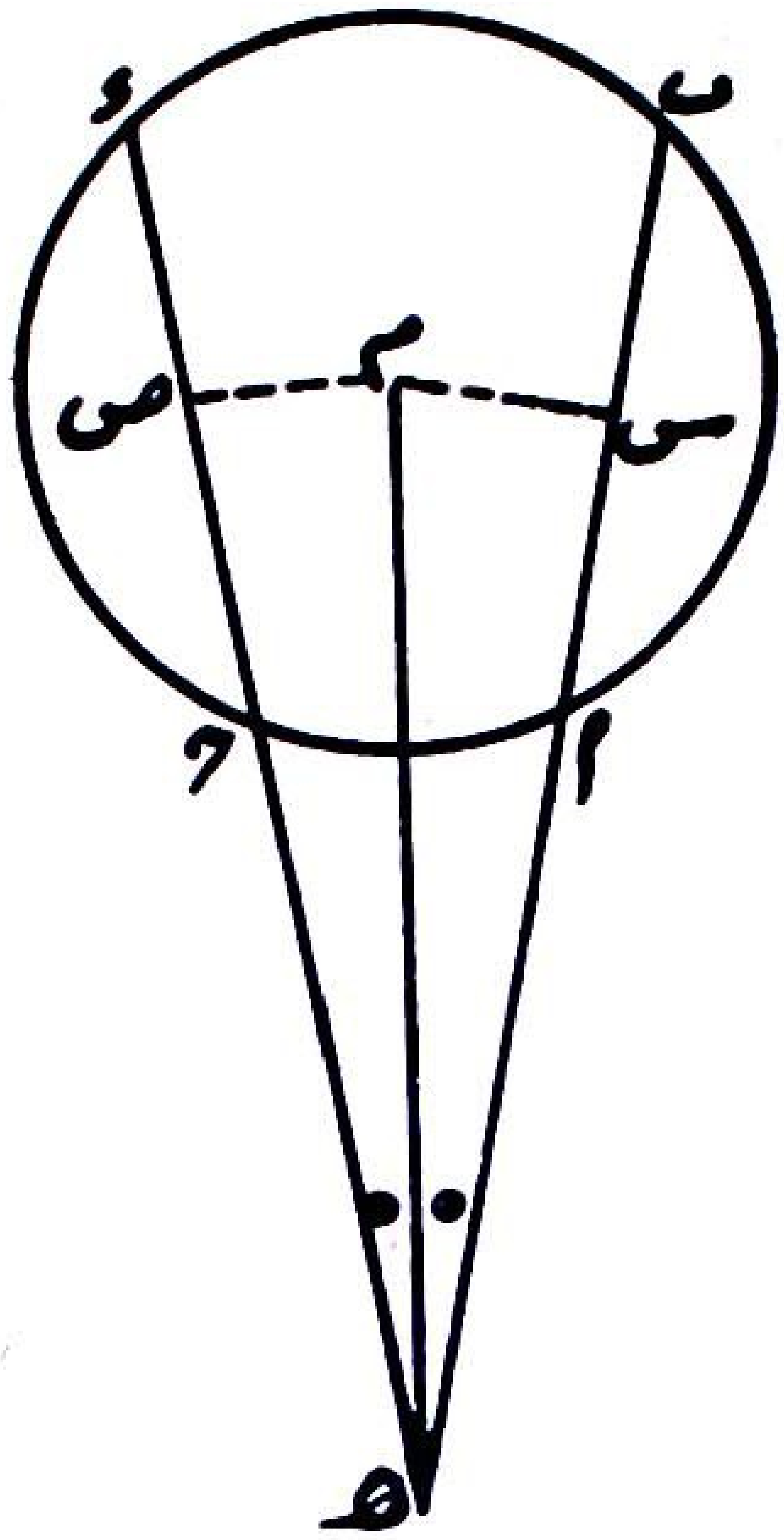
ولكن ا هـ = ى و ∴ $\frac{1}{2}$ ا ب = $\frac{1}{2}$ ى حـ

∴ ا ب = ى حـ

وهو المطلوب

تمرين محلول :

هـ نقطه خارج دائرة رسم منها القاطعان هـ ا ب ، هـ حـ ى قطعا الدائرة في ا ، ب ، حـ ، ى فاذا كان المستقيم الواصل من هـ الى المركز ينصف ∠ هـ برهن ان ا ب = حـ ى .



شكل (٨٢)

المعطيات : هـ ا ب قاطع للدائرة في ا ، ب

ـ هـ حـ ء قاطع للدائرة في حـ ، ء

ـ م هـ ينصف ∠ هـ .

الشكل (٨٢)

المطلوب : اثبات ان ا ب = حـ ء

العمل: ننزل م س ⊥ ا ب ، م ص ⊥ حـ ء

البرهان : في △△ م س هـ ، م ص هـ

فيهما
- م هـ مشترك
- ∠م س هـ = ∠م ص هـ بالقيام .
- ∠س هـ م = ∠ص هـ م بالتنصيف فرضاً

∴ ينطبق المثلثان وينتج ان م س = م ص

∴ ا ب = حـ ء نظرية

وهو المطلوب

تمارين (١٣)

١ – ا ب ، حـ ء وتران متساويان وغير متقاطعين في دائرة مركزها م فاذا مد ب ا ، ء حـ حتى تلاقيا في هـ اثبت ان هـ ا = هـ حـ

٢ – ا ب ، حـ ء وتران متساويان في دائرة تقاطعا في هـ اثبت ان جزأي أحدهما يساوي جزأي الآخر كل مع نظيره

٣ – ا ب ، حـ ء وتران متقاطعان في دائرة بحيث يصنعان زاويتين متساويتين مع القطر المار بنقطة تقاطعهما أثبت ان ا ب = حـ ء

٤ – ا ب ، حـ ء وتران متساويان في دائرة م وغير متقاطعين مدا حتى تلاقيا في هـ . اثبت ان م هـ ينصف ∠ ب هـ ء

٥ – ا ب ، حـ ء وتران متساويان في دائرة مركزها م فاذا كانت و منتصف حـ ء ، س منتصف ا ب رسم الوتر هـ و س ص برهن ان ص س = و هـ

٦ – دائرتان متحدتا المركز رسم الوتران المتساويان ا حـ ء ب يقطع الكبرى في ا ، ب والصغرى في حـ ، ء – والوتر س ع ل ص يقطع الكبرى في س ، ص والصغرى في ع ، ل اثبت ان :–

ا حـ = س ع = ء ب = ل ص ، حـ ء = ع ل

٧ – ا ب ، حـ ء وتران متساويان متعامدان ومتقاطعان في هـ في الدائرة م نصف ا ب في س ، حـ ء في ص اثبت ان س هـ ص م مربع

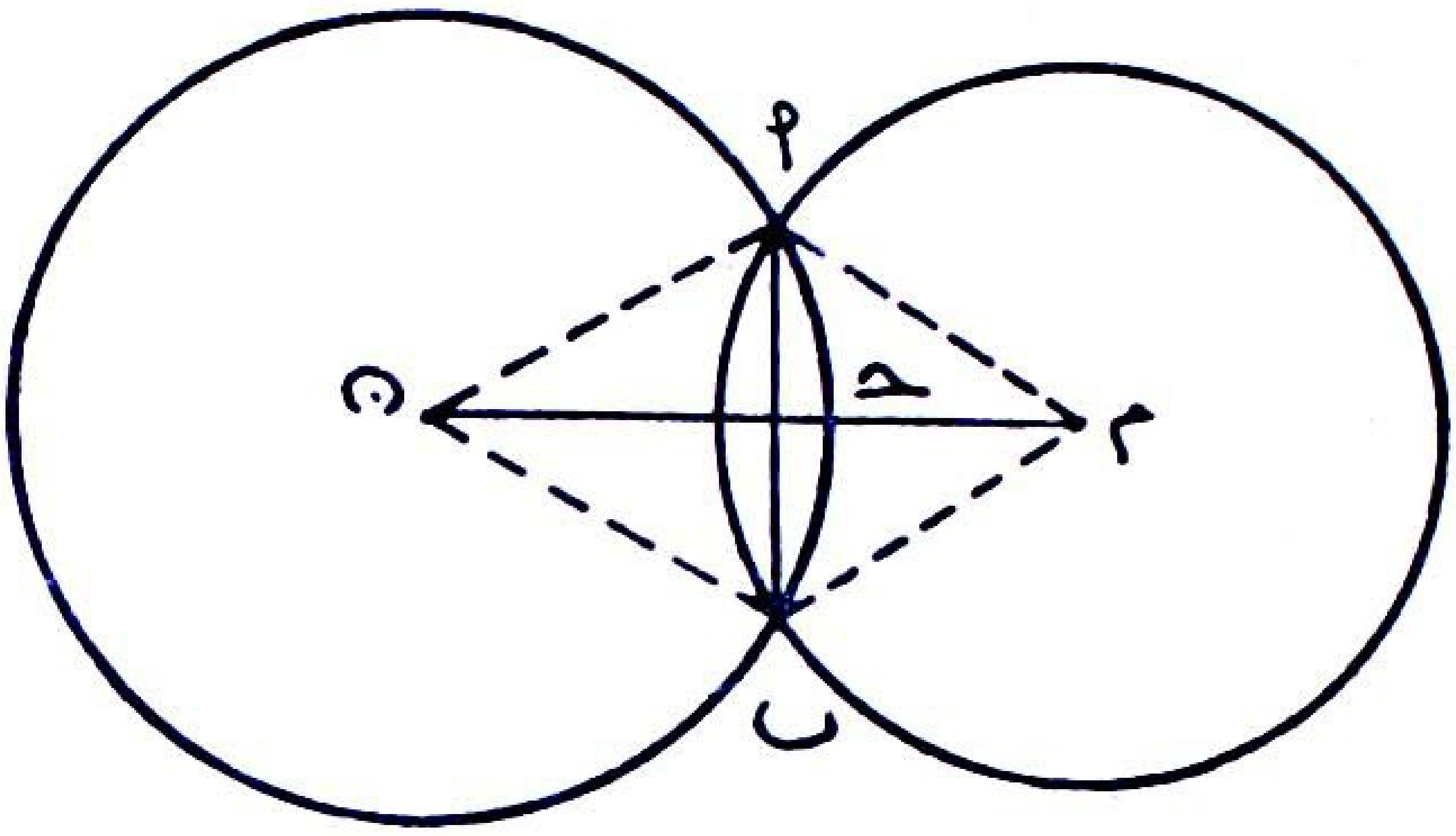
٨ – ا ب ، حـ ء ، هـ و ثلاثة أوتار متساوية مرسومة في الدائرة م نصفت لاوتار الثلاثة في النقط س ، ص ، ع على الترتيب اثبت انها تقع على محيط دائرة مركزها نفس المركز

٩ – م ، ن مركزا دائرتين متساويتين وغير متقاطعتين نصف م ن في هـ ثم رسم مستقيم يمر بنقطة هـ ويقطع الدائرة م في س ، ص والدائرة ن في حـ ، ء . اثبت ان س ص = حـ ء

١٠ – ا ب حـ △ نصفت ∠ ب ا حـ بمستقيم وأخذ على هذا المنصف نقطة ما مثل ء ثم رسمت دائرة مركزها ء فقطعت ا ب أو امتداده في س ، ص وقطعت ا حـ أو امتداده في هـ ، و . أثبت ان س ص = هـ و

نظرية (٤)

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين عمودي على الوتر المشترك وينصفه



الشكل (٨٣)

المعطيات : م ، د دائرتان متقاطعتان في ا ، ب . ا ب وتر مشترك م د خط المركزين الشكل (٨٣)

المطلوب : اثبات ان ا ح = ب ح ، م د ⊥ ا ب

العمل : نصل م ا ، م ب ، د ا ، د ب

البرهان : في ∆ ∆ م ا د ، م ب د

فيهما { م ا = م ب نصفا قطرين في دائرة واحدة
د ا = د ب » » » » »
م د مشترك }

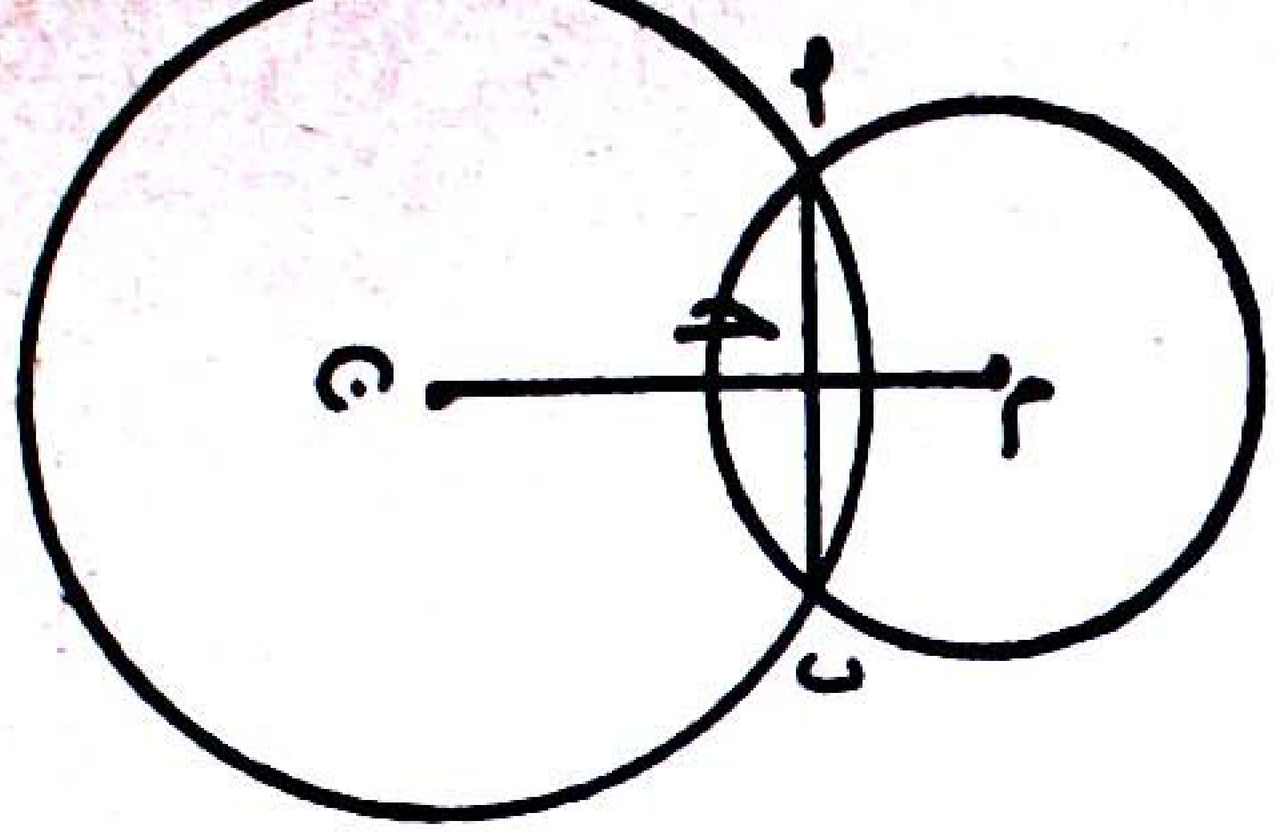
∴ ينطبق ∆ ∆ وينتج أن ∠ ا م د = ∠ ب م د

∴ ∆ م ا ب فيه م ا = م ب ، م ح ينصف ∠ م

∴ م ح ⊥ ا ب وينصفه

∴ م د ⊥ ا ب وينصفه وهو المطلوب

برهان آخر



العمل : نصل ا ب وننصفه في حـ ثم نصل م حـ ، ن حـ الشكل (٨٤)

البرهان : ∵ م حـ واصل من المركز الى منتصف الوتر ا حـ

∴ م حـ ⊥ ا ب وبالمثل

ن حـ ⊥ ا ب

شكل (٨٤)

∴ ∠ م حـ ن = ∠ م حـ ا + ∠ ن حـ ا = ٢ ق

∴ م حـ ن مستقيم

∴ م ن ⊥ ا ب وينصفه

وهو المطلوب

تمارين (١٤)

١ – دائرتان متقاطعتان في ا ، ب فاذا كان نصف قطر الاولى منها ٣٧ سم ونصف قطر الثانية ٢٠ سم وكان طول الوتر المشترك ٢٤ سم فاوجد طول المستقيم الواصل بين مركزي الدائرتين .

٢ – دائرتان متساويتان ومتقاطعتان في ا ، ب فاذا كان طول الوتر المشترك ا ب = ٨ سم والبعد بين مركزيها ٦ سم . فما نصف قطر كل منها .

٣ – دائرتان متقاطعتان نصفا قطريها ٢ سم ، ١٫٥ سم وطول الوتر المشترك بينهما ا ب = ٢٫٤ سم فما البعد بين مركزيهما

٤ – اذا كان طول قطر كل من دائرتين متقاطعتين ومتساويتين ١٣ سم والبعد بين مركزي الدائرتين ١٢ سم . فاوجد طول الوتر المشترك للدائرتين .

٥ — دائرتان البعد بين مركزيهما ٣٠ سم . نصف قطر الاولى ١٠ سم ونصف قطر الثانية ١٧ سم رسم على بعد ٨ سم من خط المركزين مستقيم مواز له والمطلوب ايجاد الجزء من هذا المستقيم المحصور بين محيطي الدائرتين .

٦ — اثبت ان الوتر المشترك لدائرتين متقاطعتين ومتساويتين عمودي على خط المركزين وينصفه .

٧ — ا ، ب دائرتان متساويتان ومتقاطعتان في حـ ، ء فاذا كان ا ب = حـ ء اثبت ان الشكل ا حـ ب ء مربع

٨ — دائرتان متقاطعتان في ا ، ب مركزاهما م ، د . وصل م د ومد على استقامته من جهتيه فقطع الدائرة م في حـ ثم رسم ب هـ = حـ ا . وقاطعا حـ د او امتداده في هـ اثبت ان الشكل ا حـ ب هـ معين

٩ — في تمرين ٧ اذا مد ب ا فقابل محيط الدائرة ا في هـ واذا مـد ا ب فقابل محيط الدائرة ب في و فبرهن ان الشكل هـ حـ و ء معين

تمارين (١٥) متنوعة

١ — ا ب حـ △ متساوي الساقين فيه ا ب = ا حـ مرسوم داخـل دائرة م . نصف ا ب في س ، ا حـ في ص . ثم وصل س ص برهن ان ا م عمودي على س ص وينصفه

٢ — ا ب حـ △ متساوي الاضـلاع مرسوم داخل دائرة م برهن ان م نقطة تلاقي المستقيمات المتوسطة للمثلث

٣ — ا ب حـ △ متساوي الساقين مرسوم داخـل دائـرة م وصـل ا م ثم مدعلى استقامته حتى قابل ب حـ في هـ برهن ان هـ منتصف ب حـ وان ا هـ ⊥ ب حـ

٤ — دائرتان متقاطعتان في س ، ص مركزاهمـا ا ، ب رسم المستقيـم حـ هـ و ء يوازي س ص . وقاطعا احدى الدائرتين في حـ ، ء . والدائرة الاخرى في هـ ، و . اثبت حـ هـ = و ء

٥ – م ، ى دائرتان متقاطعتان في ا ، ب . مد ا م حتى قابل محيط الدائرة م في ح ثم مد ا ى قابل محيط الدائرة ى في ء . اثبت ان ح ء يمر بنقطة ب . وانه يساوي ضعف خط المركزين

٦ – م ، ى دائرتان متساويتان متقاطعتـــان في ا ، ب اخذت نقطه ح على امتداد ا ب ثم وصل ح م ومد حتى قابل محيط الدائرة م في ه ، مد ح ى حتى قابل محيط الدائرة ى في و اثبت ان :

(١) ح ه و △ متساوي الساقين ، (٢) امتداد ح ا ⊥ ه و وينصفه

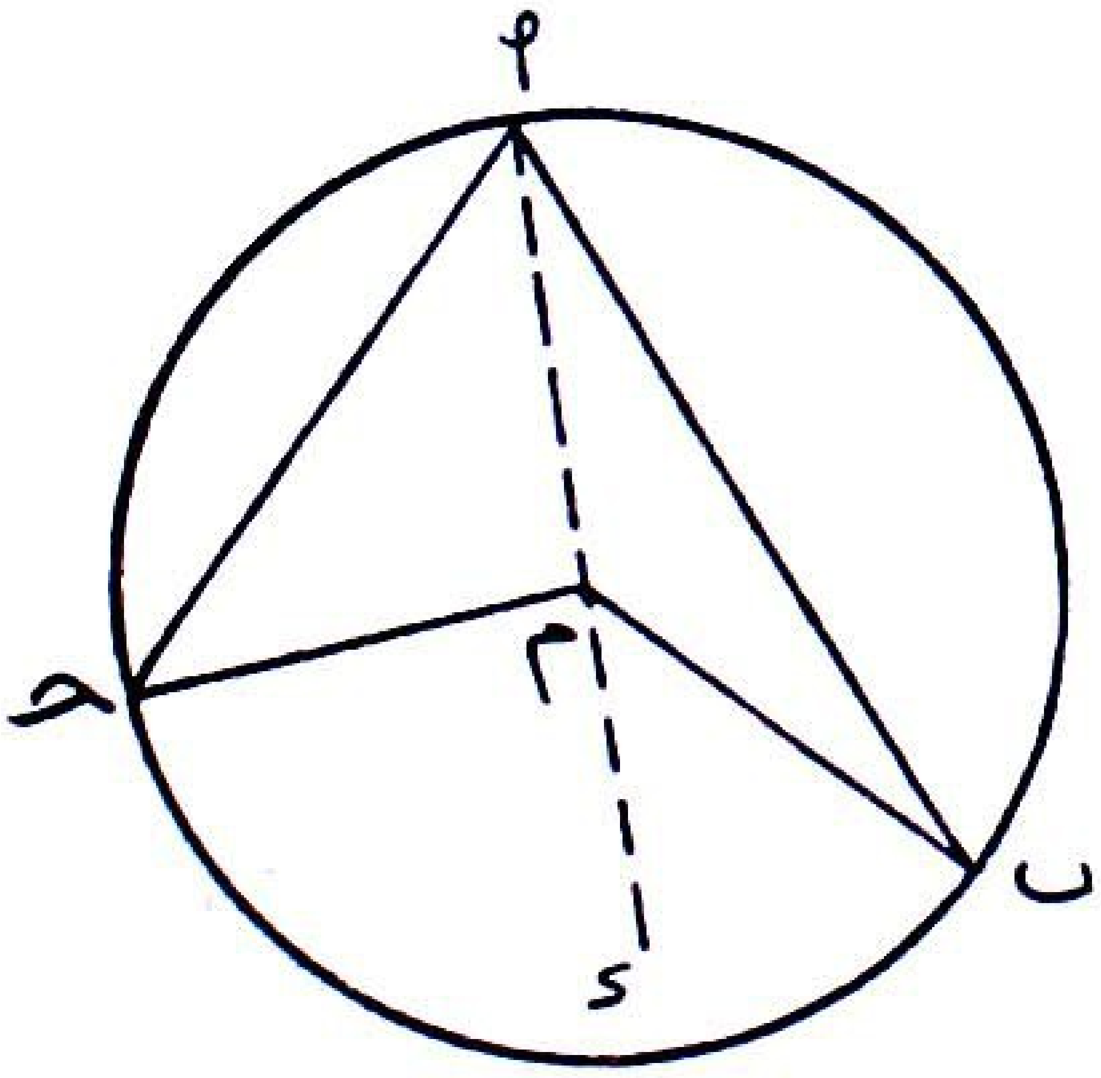
٧ – ا ، ب دائرتان متقاطعتان في م ، ى رسم المستقيم ح م ء بحيث يقطع الاولى في ح والثانية في ء ثم انزل العمودان ا س ، ب ص عليه

اثبت ان س ص = $\frac{١}{٢}$ ح ء

٨ – ا ب قطر في دائرة مركزها م ، ح ء وتر فيها انزل العمودان ا و ، ب ى على ح ء او امتداده اثبت ان ى ء = و ح

نظرية (٥)

الزاوية المركزية ضعف الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس



الشكل (٨٥) – ١

المعطيات : ∠ ب م ح مركزية ، ∠ ب ا ح محيطية مشتركة مع الزاوية المركزية في القوس ب ح الشكل (٨٥)

المطلوب : اثبات ان ∠ ب م ح = ٢ ∠ ب ا ح

العمل : نصل ا م ونمده الى ء

البرهان : ∠ ب م ء خارجة بالنسبة للمثلث ب ا م

∴ ∠ ب م ء = ∠ ب أ م

\+ ∠ م ب أ

ولكن ∠ م ب أ = ∠ م أ ب

(لأن أ م = م ب)

∴ ∠ ب م ء = ٢ ∠ ب أ م

وبالمثل ∠ ء م حـ =

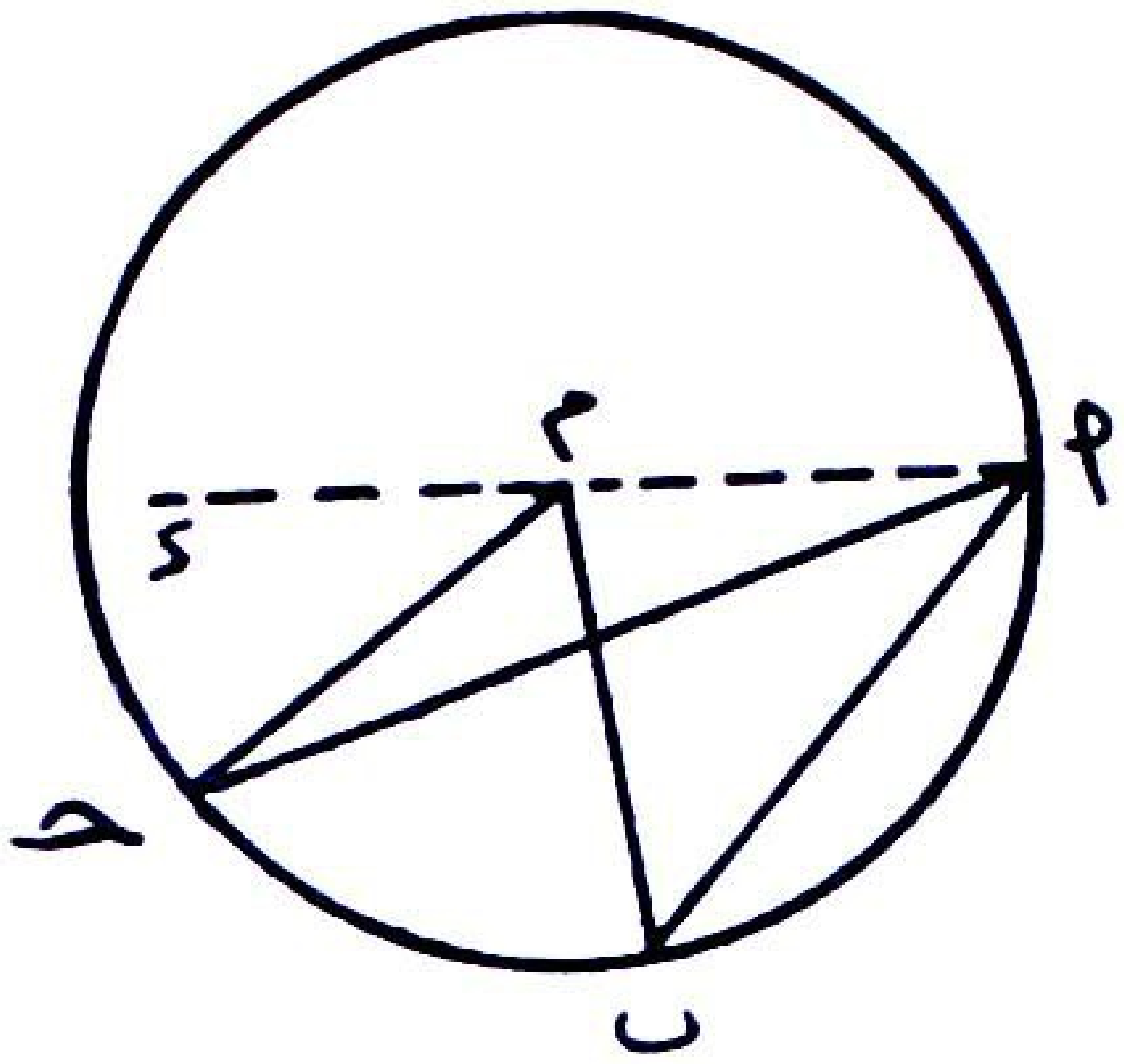
٢ ∠ م أ حـ (بالجمع في الشكل ٨٥

١ وبالطرح في الشكل ٢)

ينتج ان

∠ ب م حـ = ٢ ∠ ب أ حـ

وهو المطلوب

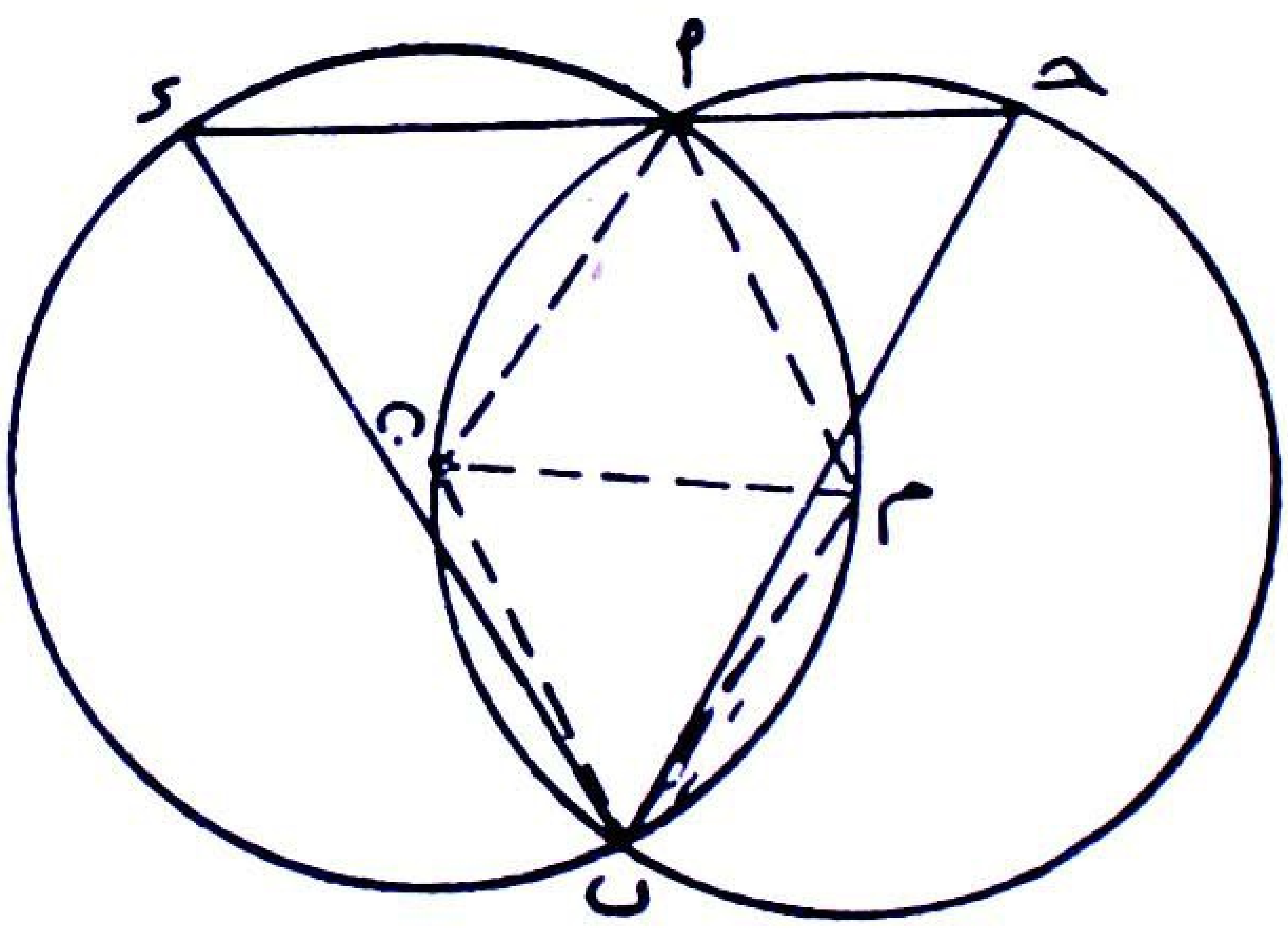


الشكل (٨٥) ــ ٢

تمرين محلول :

م ، د دائرتان متساويتان وكل منهما تمر بمركز الاخرى تقاطعتا في ا ، ب رسم حـ ا ء يقطع الدائرتين في حـ ، ء

اثبت ان △ ب حـ ء متساوي الاضلاع .



الشكل (٨٦)

المعطيات: م ، د دائرتان تقاطعتا في ا ، ب - حـ ا ء مستقيم يقطع الدائرتين في حـ ، ء الشكل (٨٦)

المطلوب : اثبات ان △ ب ح د متساوي الأضلاع

العمـل : نصل م ا ، م ب ، هـ ا ، هـ ب

البرهان : م ا = م هـ = هـ ا انصاف اقطار لدائرتين متساويتين

∴ △ ا م هـ متساوي الأضلاع

∴ كل زاوية من زواياه = ٦٠°

وبالمثل △ م ب هـ كل زاوية من زواياه ٦٠°

∴ ∠ ا م ب = ١٢٠° ، ∠ ا هـ ب = ١٢٠°

∠ ح المحيطية مشتركة مع الزاوية المركزية ا م ب في القوس ا هـ ب

∴ ∠ ح = $\frac{1}{2}$ ∠ ا م ب = ٦٠°

وبالمثل ∠ د = $\frac{1}{2}$ ∠ ا هـ ب = ٦٠°

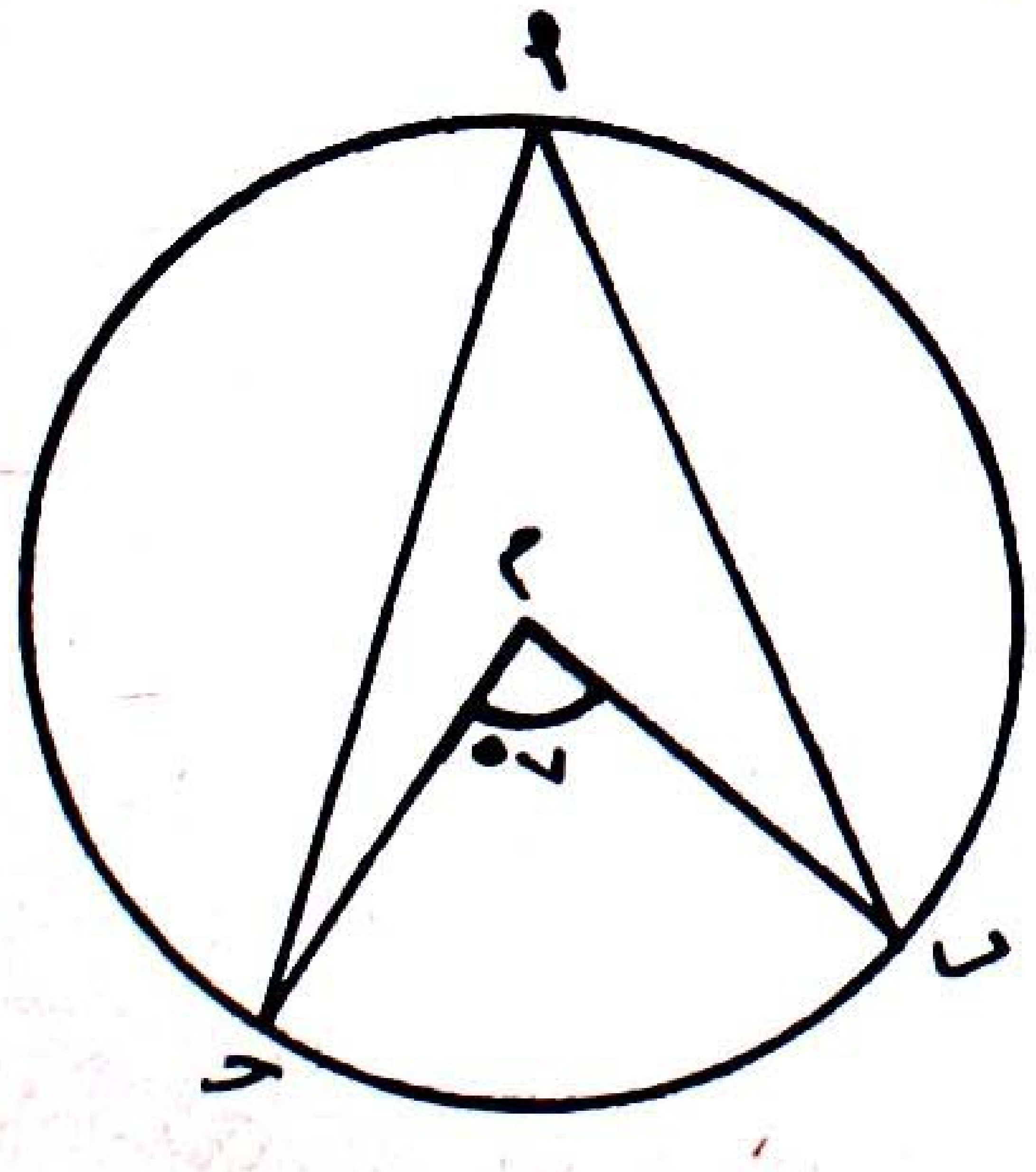
∵ مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ∠ ح ب د = ١٨٠ – ١٢٠ = ٦٠°

∴ △ ح ب د متساوي الأضلاع

وهو المطلوب

تمارين (١٦)



الشكل (٨٧)

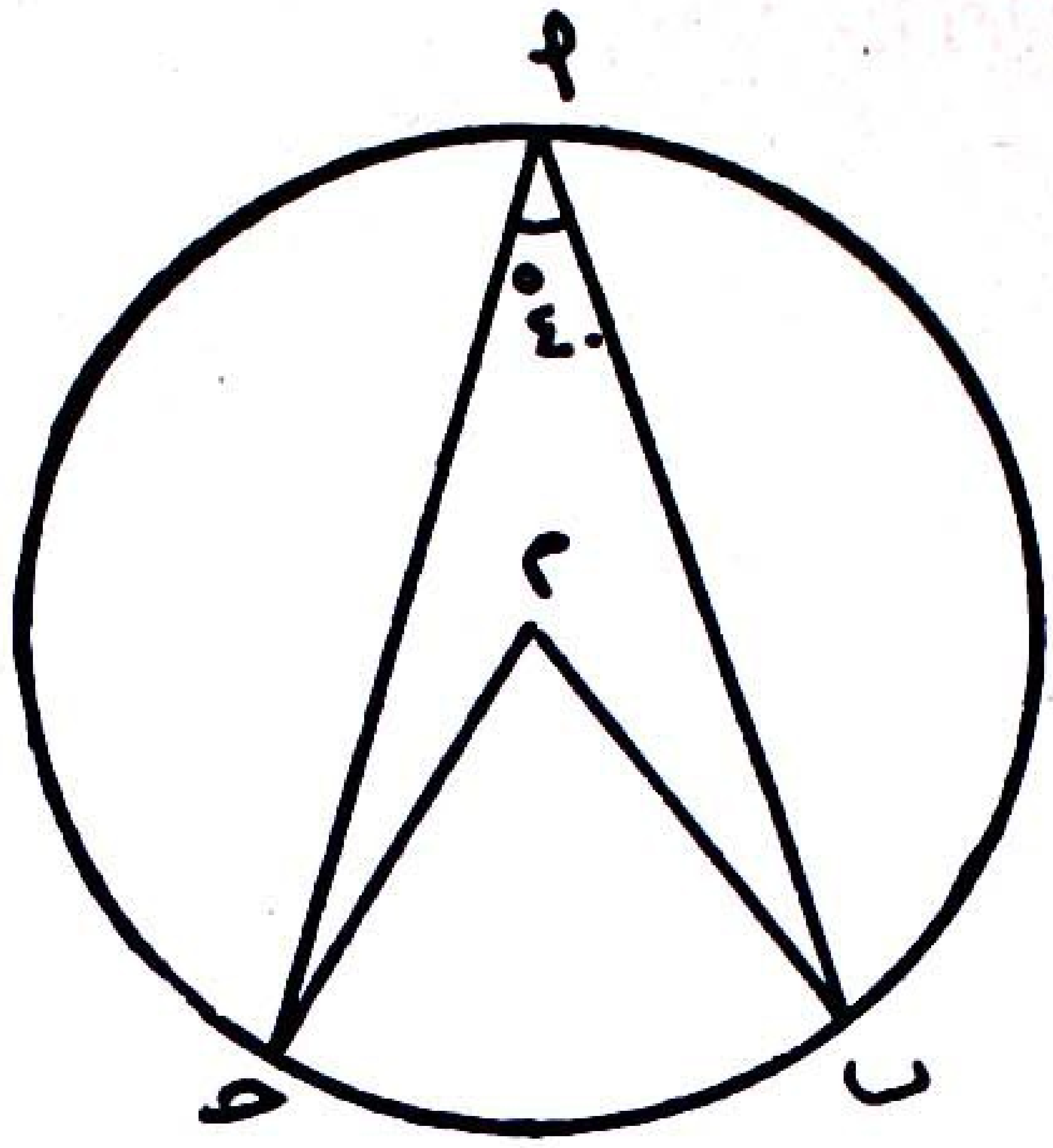
أوجد المجهول

١ – ∠ ب م ح = ٧٠°

∠ ب ا ح = ؟

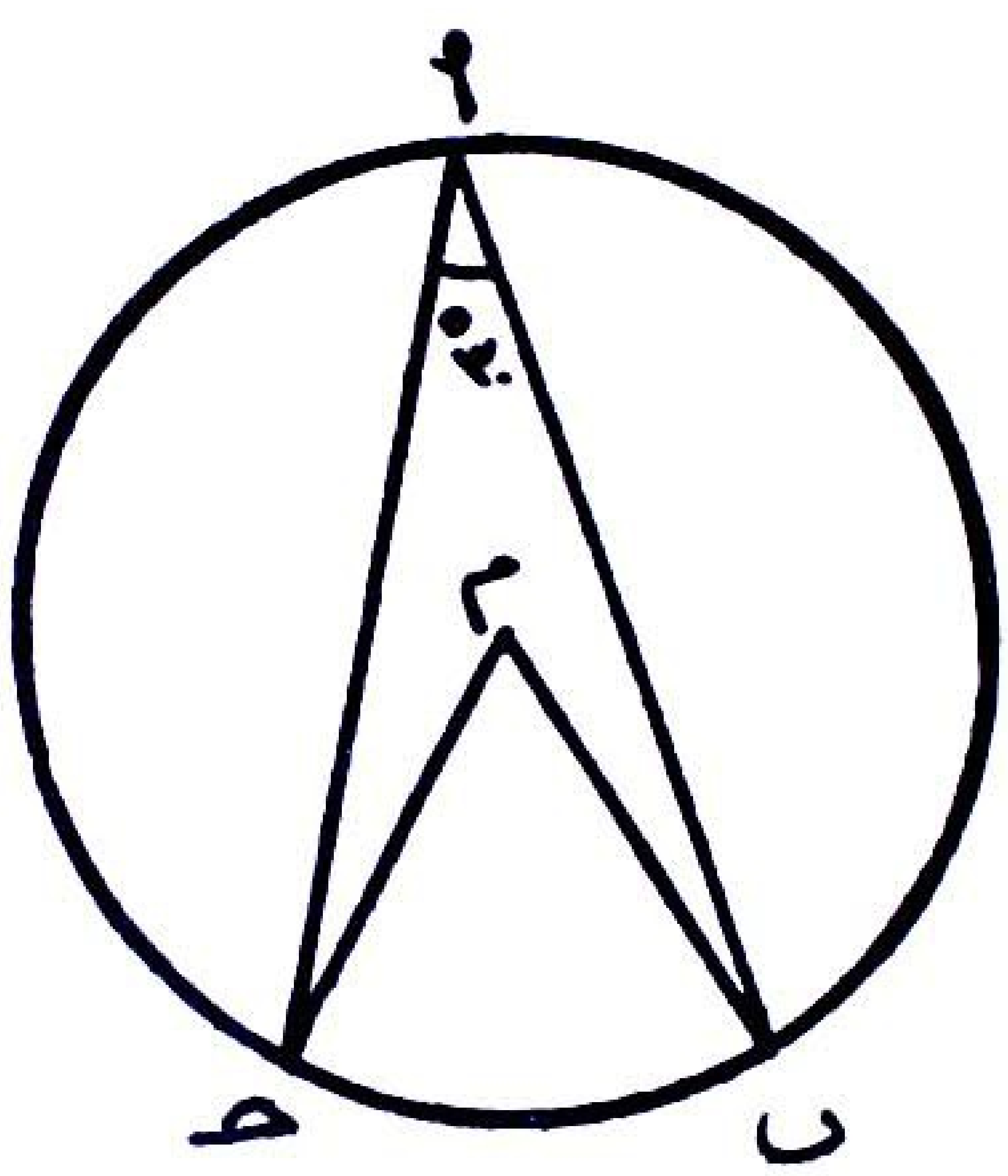
الشكل (٨٧)

∠ ب ا حـ = ٤٠°
∠ ب م حـ = ؟
الشكل (٨٨)



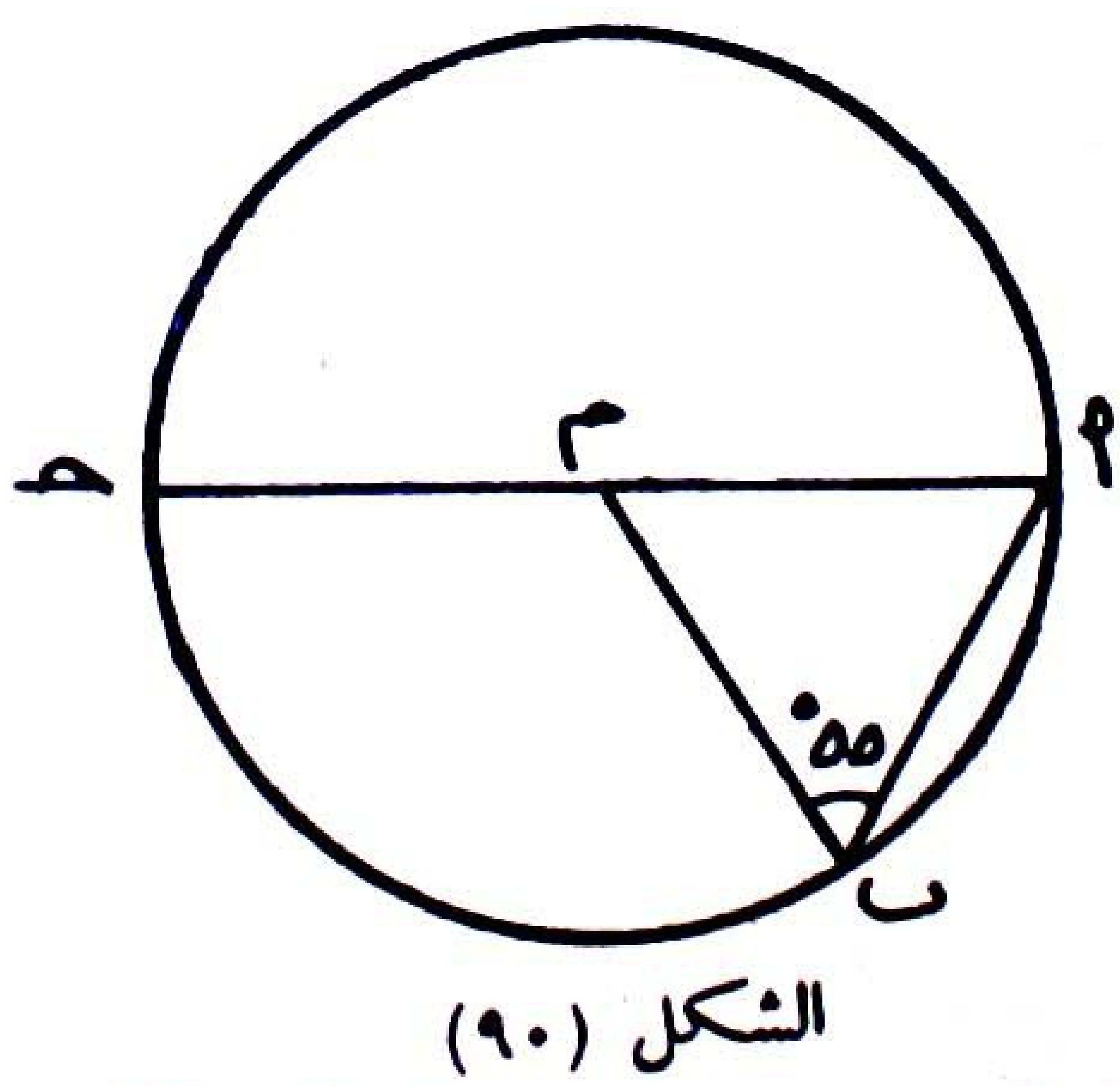
الشكل (٨٨)

٢ - ∠ ب ا حـ = ٣٠°
∠ ب م حـ = ؟
الشكل (٨٩)



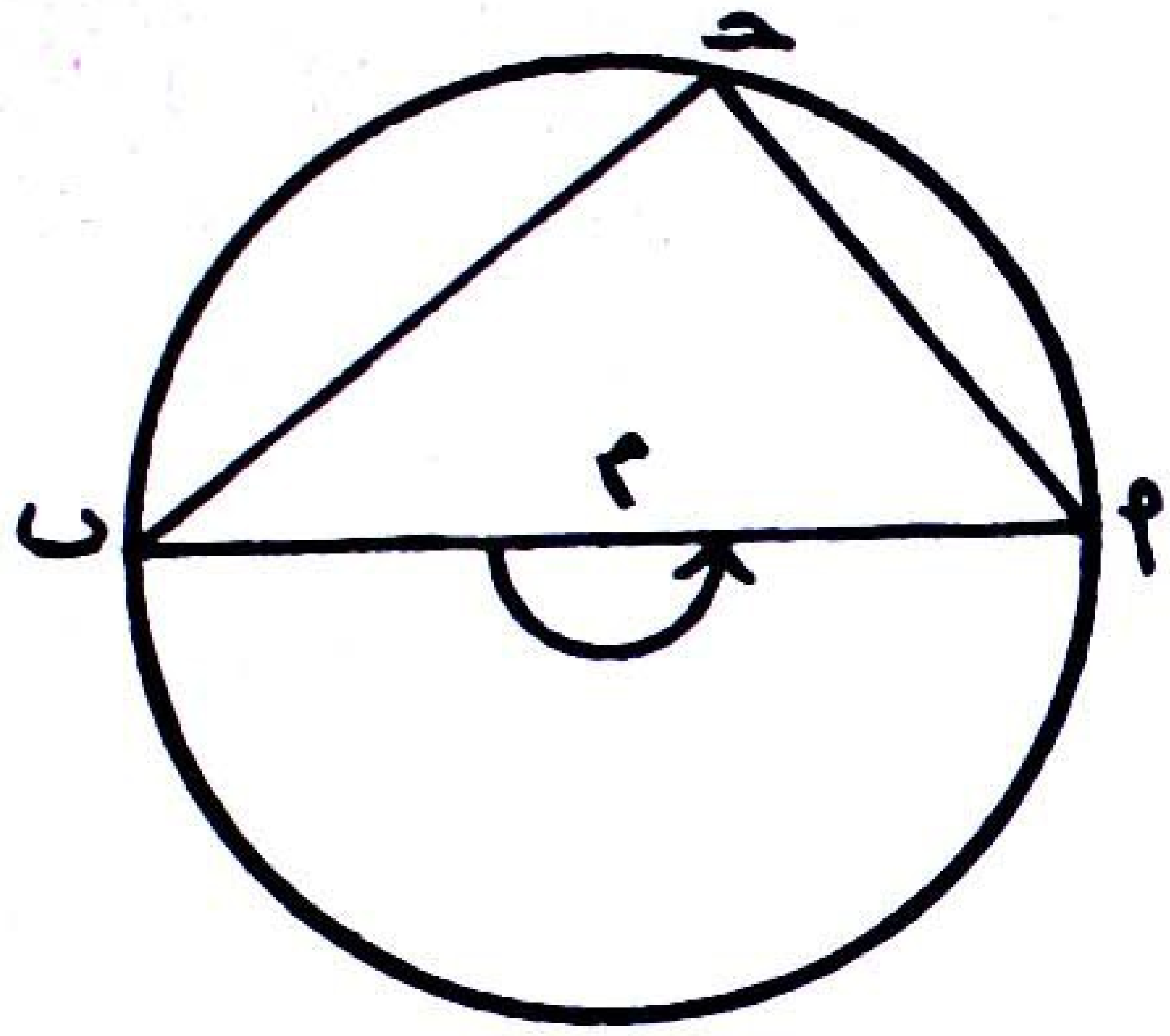
الشكل (٨٩)

∠ ا ب م = ٥٥
∠ ب ا حـ = ؟
∠ ب م حـ = ؟
الشكل (٩٠)



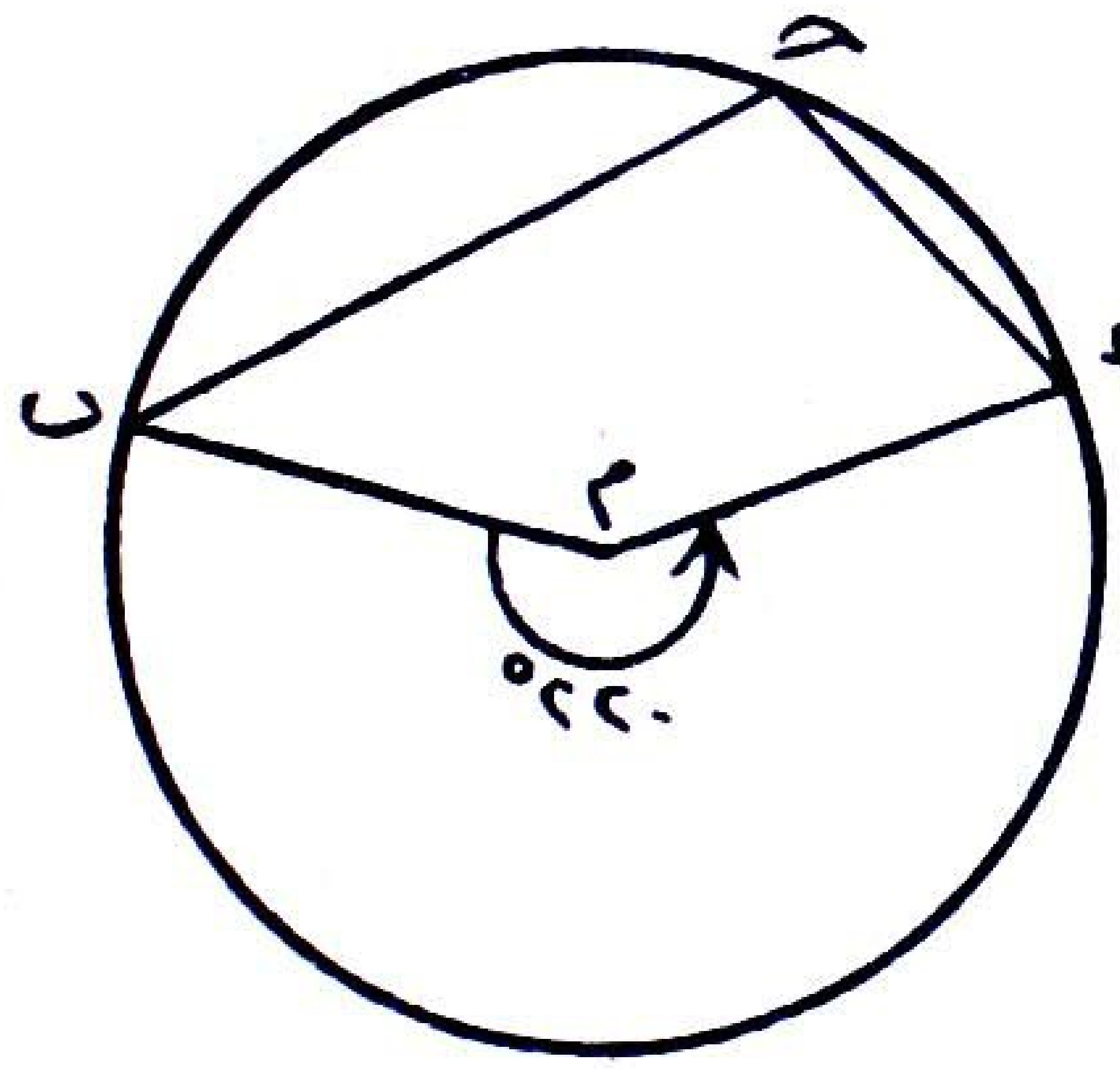
الشكل (٩٠)

٣ - ∠ أ م ب = ٢ ق
∠ أ حـ ب = ؟
الشكل (٩١)



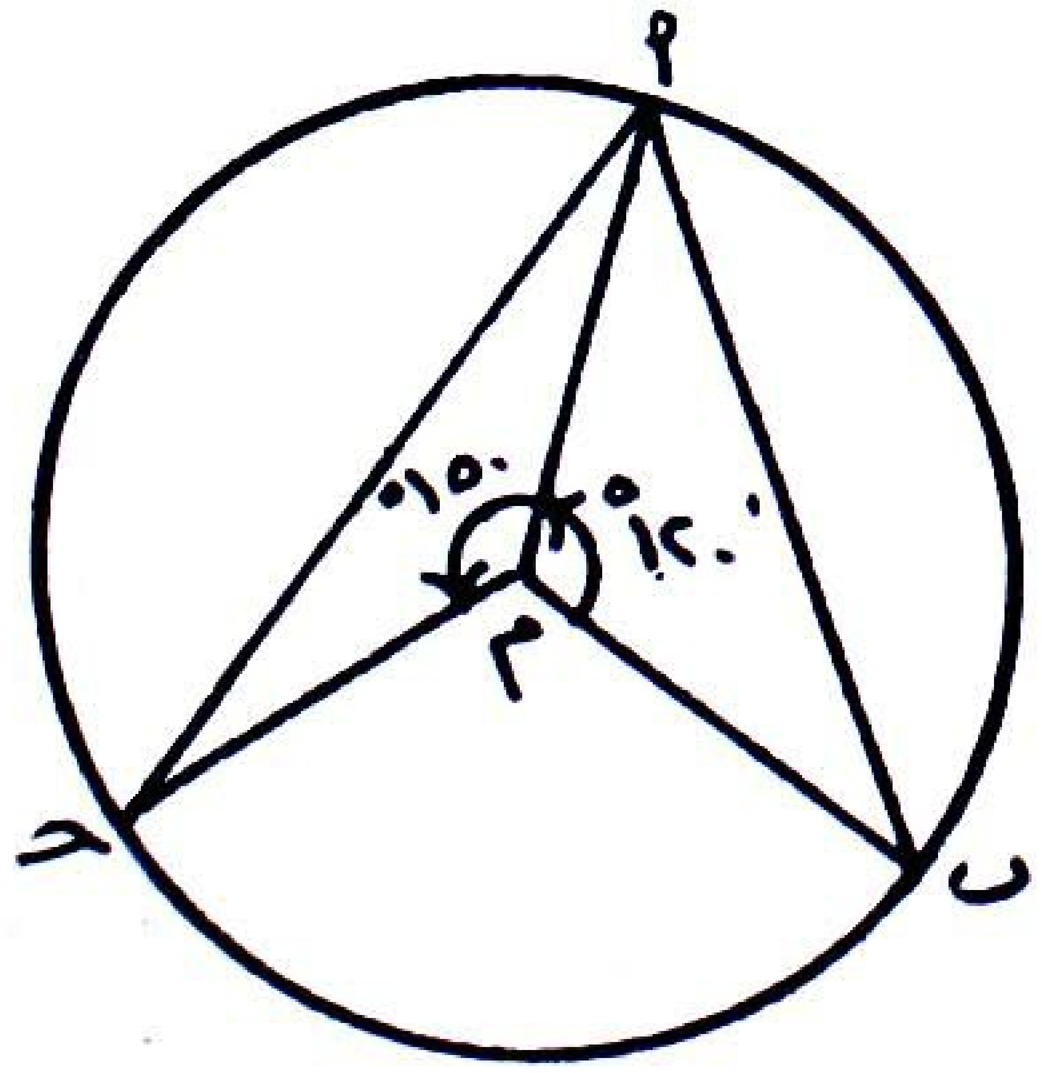
الشكل (٩١)

∠ أ م ب المنعكسة = ٢٢٠° ؛
∠ أ حـ ب = ؟
الشكل (٩٢)



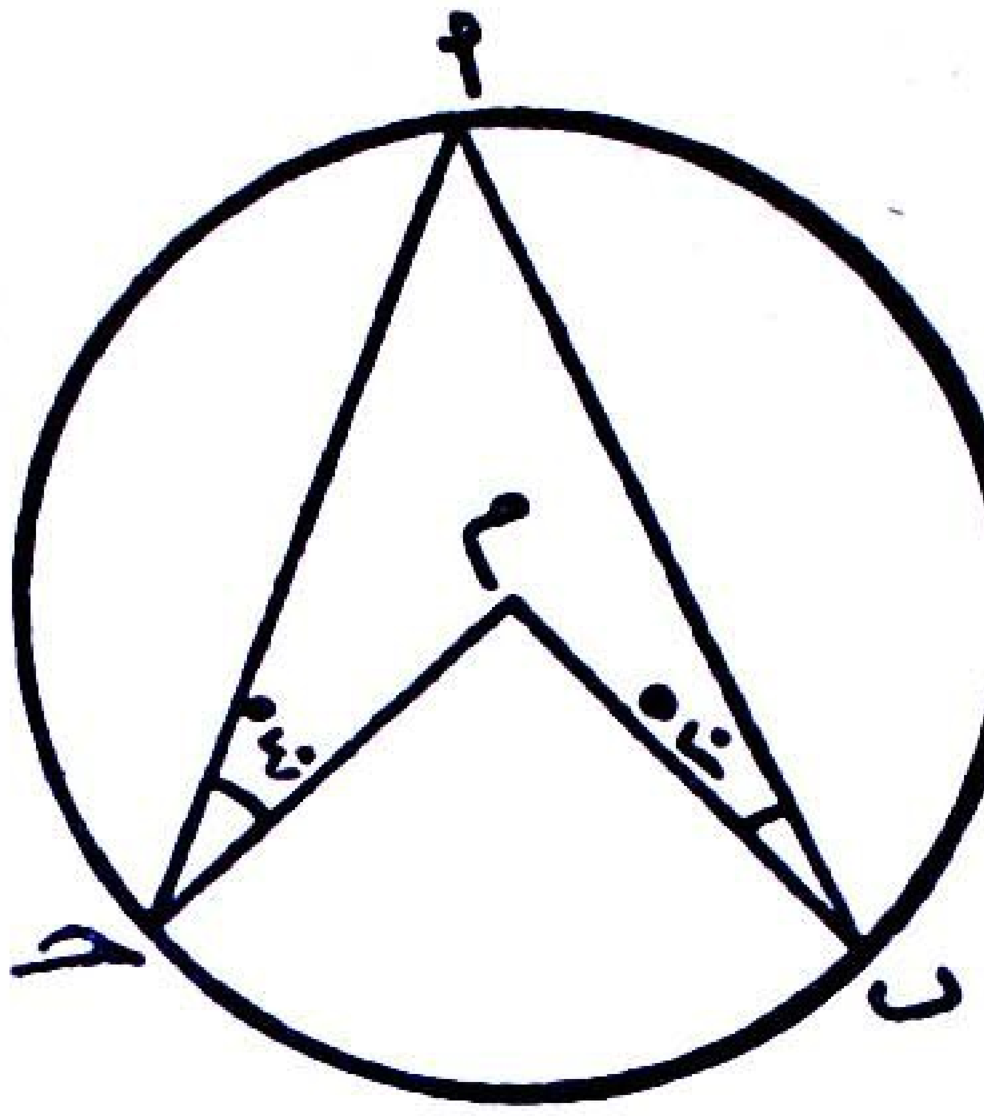
الشكل (٩٢)

٤ - ∠ أ م حـ = ١٥٠° ،
∠ أ م ب = ١٢٠°
∠ ب أ حـ = ؟
∠ ب م حـ = ؟
الشكل (٩٣)



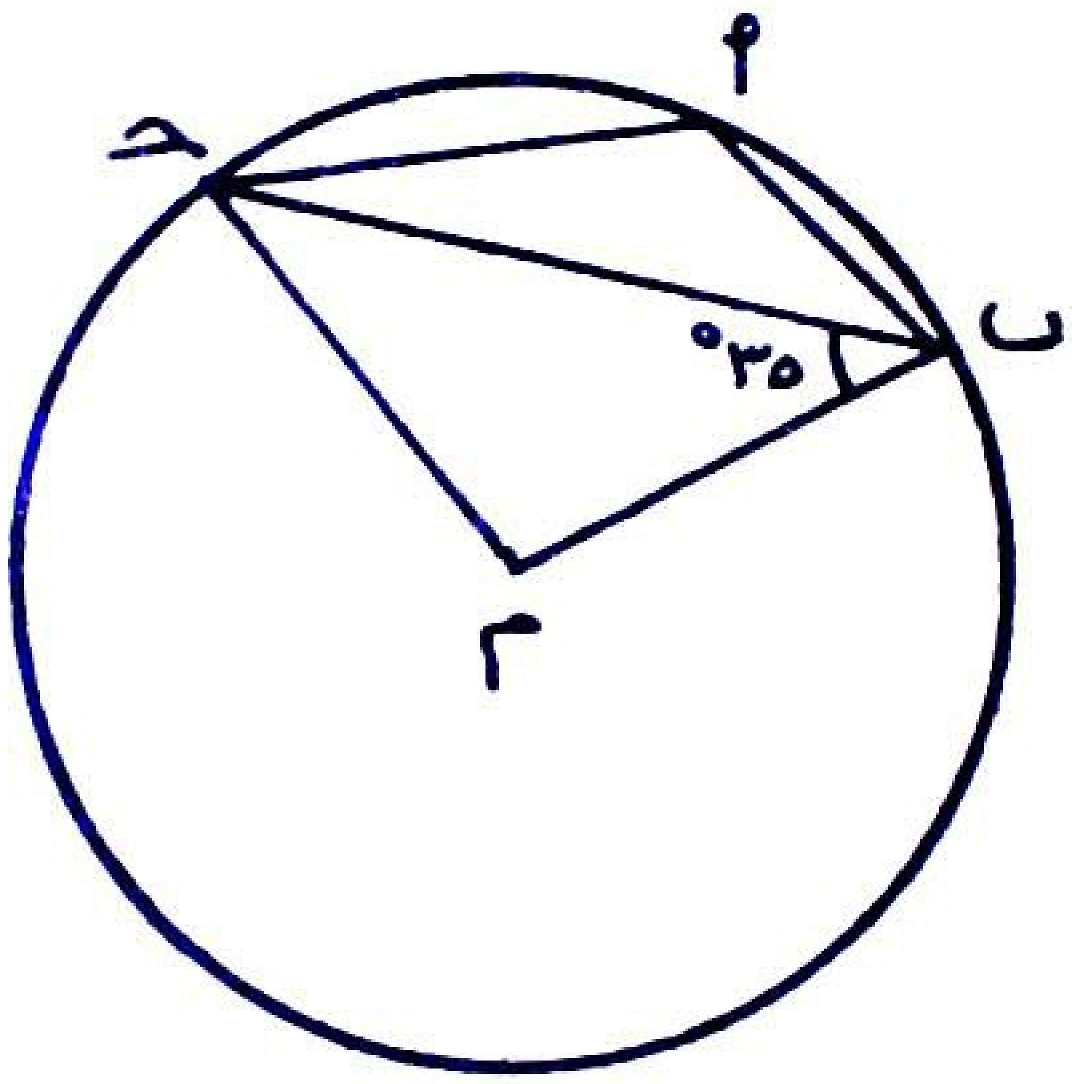
الشكل (٩٣)

∠ م ب ا = ٢٠°
∠ م ح ا = ٤٠°
∠ ب ا ح = ؟
∠ ب م ح = ؟
الشكل (٩٤)



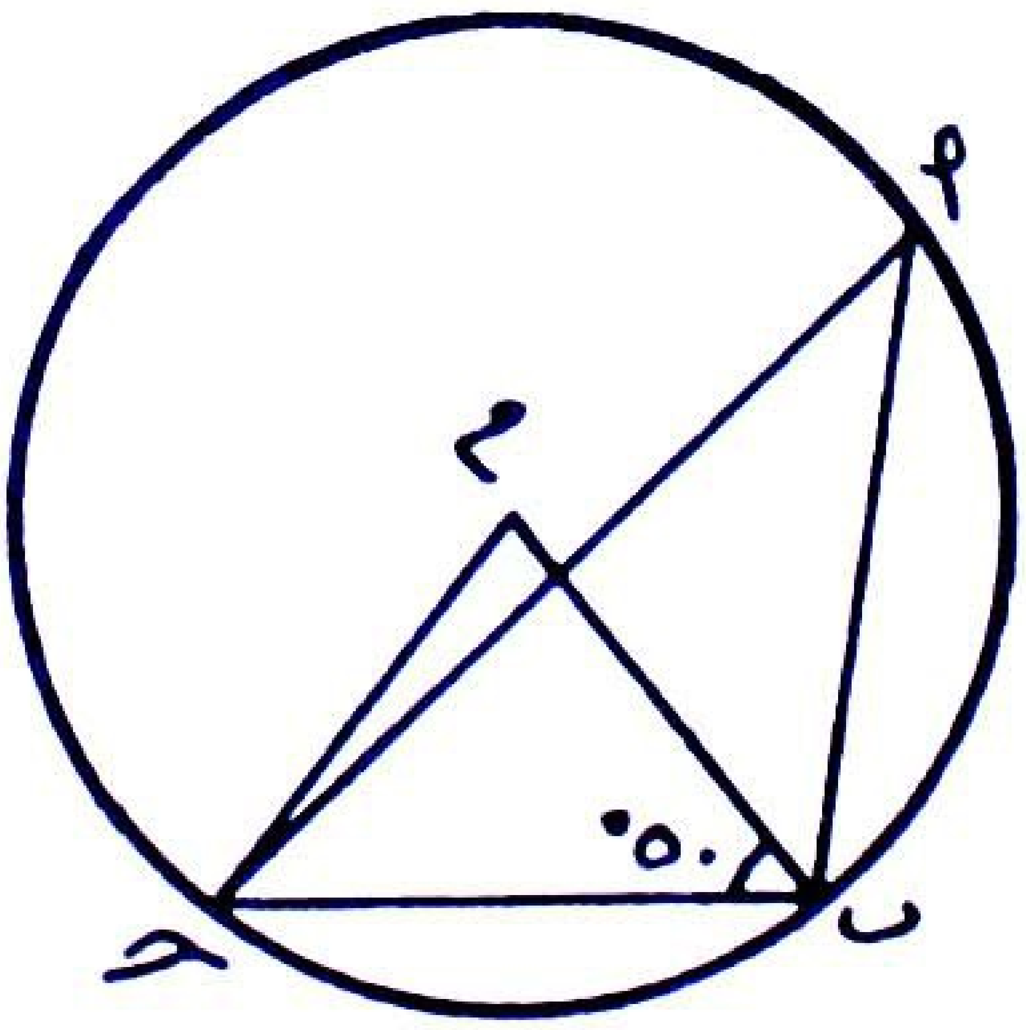
الشكل (٩٤)

٥ - ∠ م ب ح = ٣٥°
∠ ب أ ح = ؟
الشكل (٩٥)



الشكل (٩٥)

∠ م ب ح = ٥٠°
∠ ب أ ح = ؟
∠ م = ؟
الشكل (٩٦)



الشكل (٩٦)

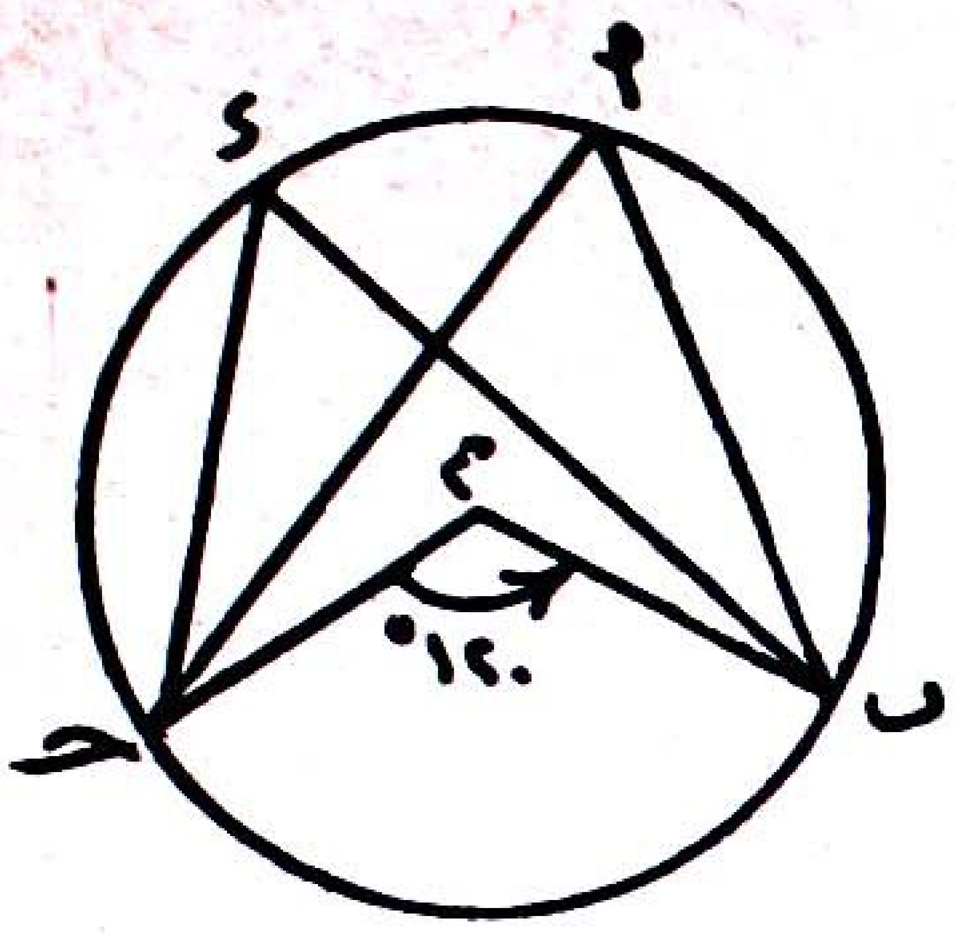
٦ ــ اذا علمت ان :

∠ ب م حـ = ١٢٠° الشكل (٩٧)

فاوجد

∠ ب ا حـ = ؟

∠ ب ء حـ = ؟



الشكل (٩٧)

٧ ــ م ا ، م ب نصفا قطرين متعامدين في دائرة مركزهـا م ــ حـ أي نقطة على القوس الاكبر ا ب انزل من ب العمود ب هـ على حـ ا أو امتداده اثبت ان المثلث ب هـ حـ متساوي الساقين .

٨ ــ ا ب قطر دائرة مركزها م فرضت نقطة مثل حـ على محيط الدائرة فاثبت ان ∠ ا حـ ب = ق .

٩ ــ ا ب حـ △ مثلث مرسوم داخل دائرة رسم القطران حـ ء ، ب هـ اثبت أن ∠ ء ا ب = ∠ هـ ا حـ

١٠ ــ ا ب ، حـ ء وتران متقاطعـان في هـ فاذا كانت م مركز الدائرة برهن ان ∠ ا م حـ + ∠ ء م ب = ٢ ∠ ا هـ حـ .

١١ ــ ا ب حـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة مركزها م فاذا كان القطران ا حـ ، ب ء متعامدان برهن أن ∠ ا م ء + ∠ ب م حـ = ٢ ق .

١٢ ــ دائرتان متقاطعتان في ا ، ب . ومركزاهمـا م ، د فاذا كانت زاوية م ا د تكمل ∠ م ب د ثم رسم المستقيم س ا ص يقطع الدائرة الاولى في س والدائرة الثانية في ص اثبت ان ∠ س ب ص = ق .

١٣ ــ ا ب حـ مثلث فيه ∠ ا حادة ومرسوم داخل دائرة مركزها م ــ نصف ب حـ في س . اثبت ان ∠ ب م س = ∠ ب ا حـ .

١٤ـ م ا ، م ب نصفا قطرين في دائرة يحصران بينهما زاوية قدرهـا ٦٠°
فرضت نقطة مثل حـ على محيط الدائرة من ا انزل العمود ا ى على ب حـ
أو امتداده برهن أن ∠ حـ ا ى = ∠ م .

١٥ ـ م ا ، م ب نصفا قطرين في دائرة يحصران بينهما زاوية = ٦٠° رسم
ب ى // ام ويقابل محيط الدائرة في ى ـ اثبت ان ب م ، ى ا متعامدان .

١٦ ـ دائرة مركزها م رسم المثلث ا ب حـ داخل الدائرة بحيث كانت
∠ ب ا حـ = ٣٠° اثبت ان ب حـ يساوي نصف قطر الدائرة .

نظرية (٦)

الزاوية المرسومة في نصف الدائرة قائمة

المعطيات : دائرة مركزها م ،
ب م حـ قطر فيها ا نقطة
على المحيط الشكل (٩٨)

المطلوب : اثبات ان
∠ ب ا حـ = ق

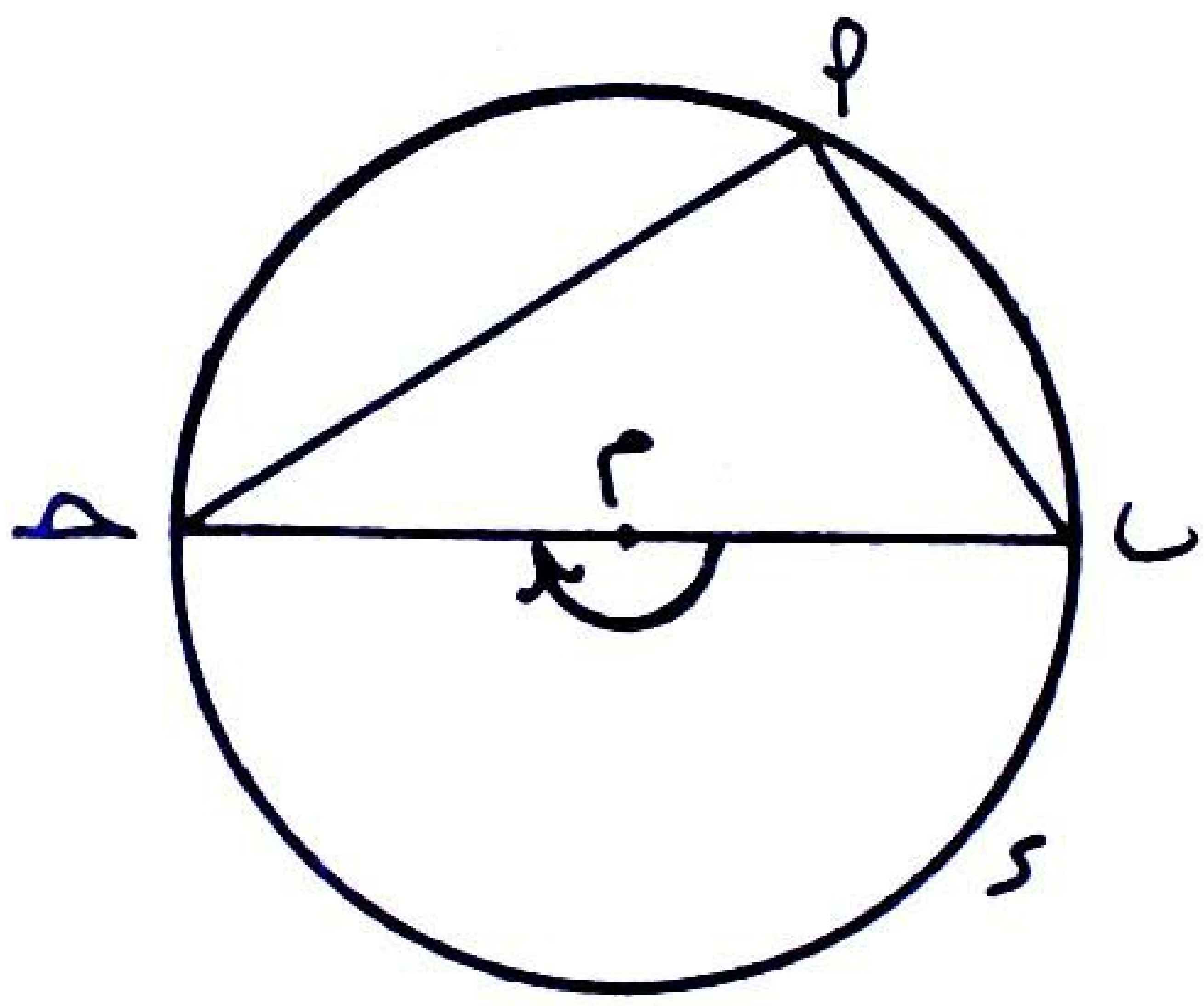
البرهان : ∠ ب م حـ المركزية ،
∠ ب ا حـ المحيطية مشتركتان
في القوس ب ى حـ

∴ ∠ ب ا حـ =

$\frac{١}{٢}$ ∠ ب م حـ ،

∴ ∠ ب م حـ = ١٨٠°

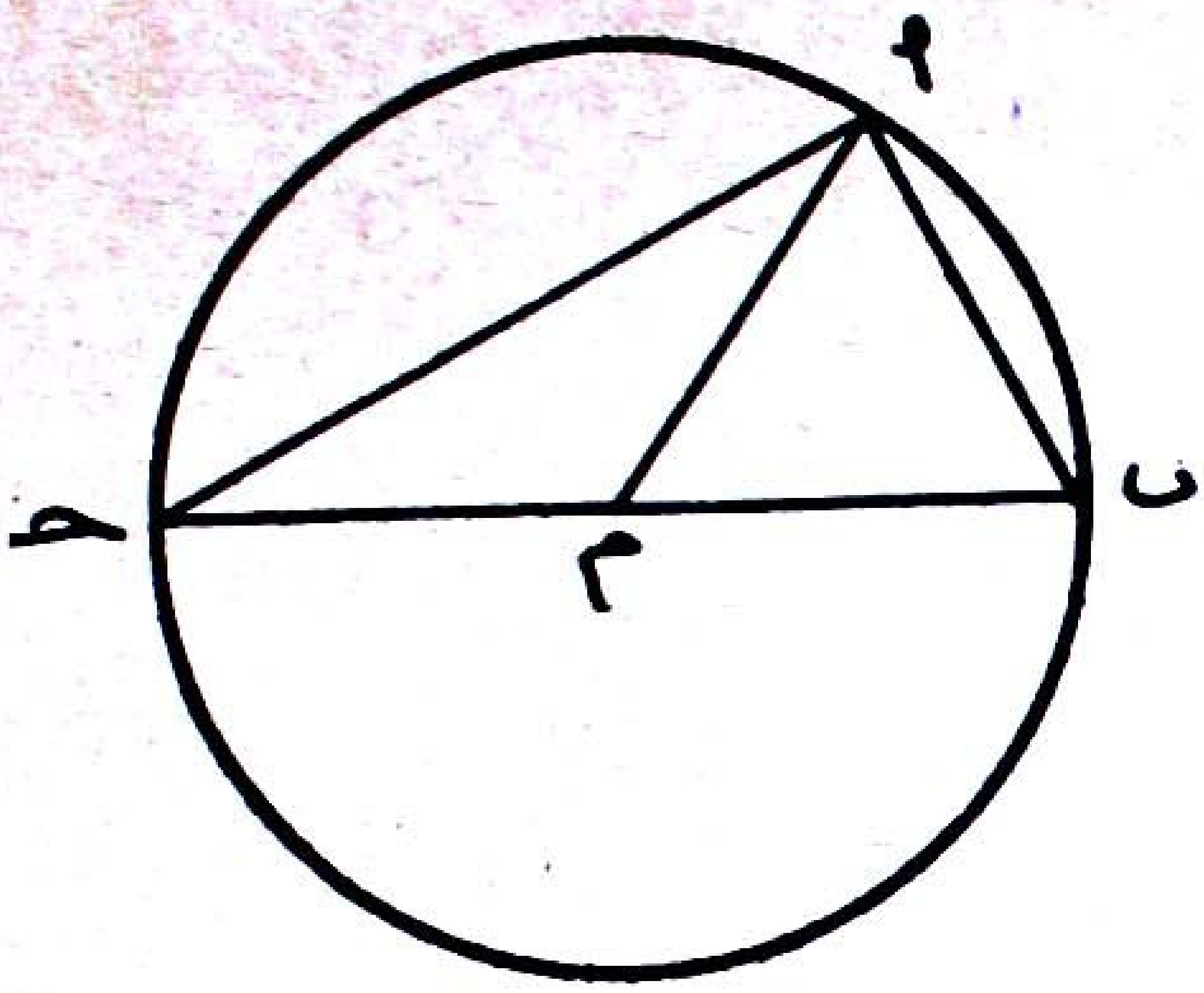
∴ ∠ ب ا حـ = ٩٠° = ق



الشكل (٩٨)

وهو المطلوب

برهان آخر :



الشكل (٩٩)

العمل : نصل م ا الشكل (٩٩)

البرهان : م ا = م ب نصفا قطرين في دائرة

∴ ∠ ب ا م = ∠ ا ب م نظرية

وبالمثل م ا = م حـ نصفا قطرين ∴ ∠ م ا حـ = ∠ م حـ ا

∴ ∠ ب ا م + ∠ حـ ا م = ∠ ا ب حـ + ∠ ا حـ ب

∴ ∠ ب ا حـ = ∠ ا ب حـ + ∠ ا حـ ب

ولكن مجموع زوايا المثلث ١٨٠°

∴ ∠ ب ا حـ = ∠ ا ب حـ + ∠ ا حـ ب = ٩٠°

∴ ∠ ب ا حـ قائمة وهو المطلوب

تمرين محلول (١) :

ا ب قطر في دائرة ، ب حـ ، ا ء وتران متوازيان فيها نصفت ∠ ا ب حـ بمستقيم قطع المحيط في و ثم مد ب و ، ء ا فتلاقيا في هـ برهن ان و هـ = و ب

المعطيات : ا ب قطر في دائرة فيها ا ء // حـ ب ، ب و ينصف ∠ ا ب حـ

- هـ نقطة تلاقي ء ا ، ب و . الشكل (١٠٠)

المطلوب : اثبات ان و هـ = و ب

العمل : نصل ا و

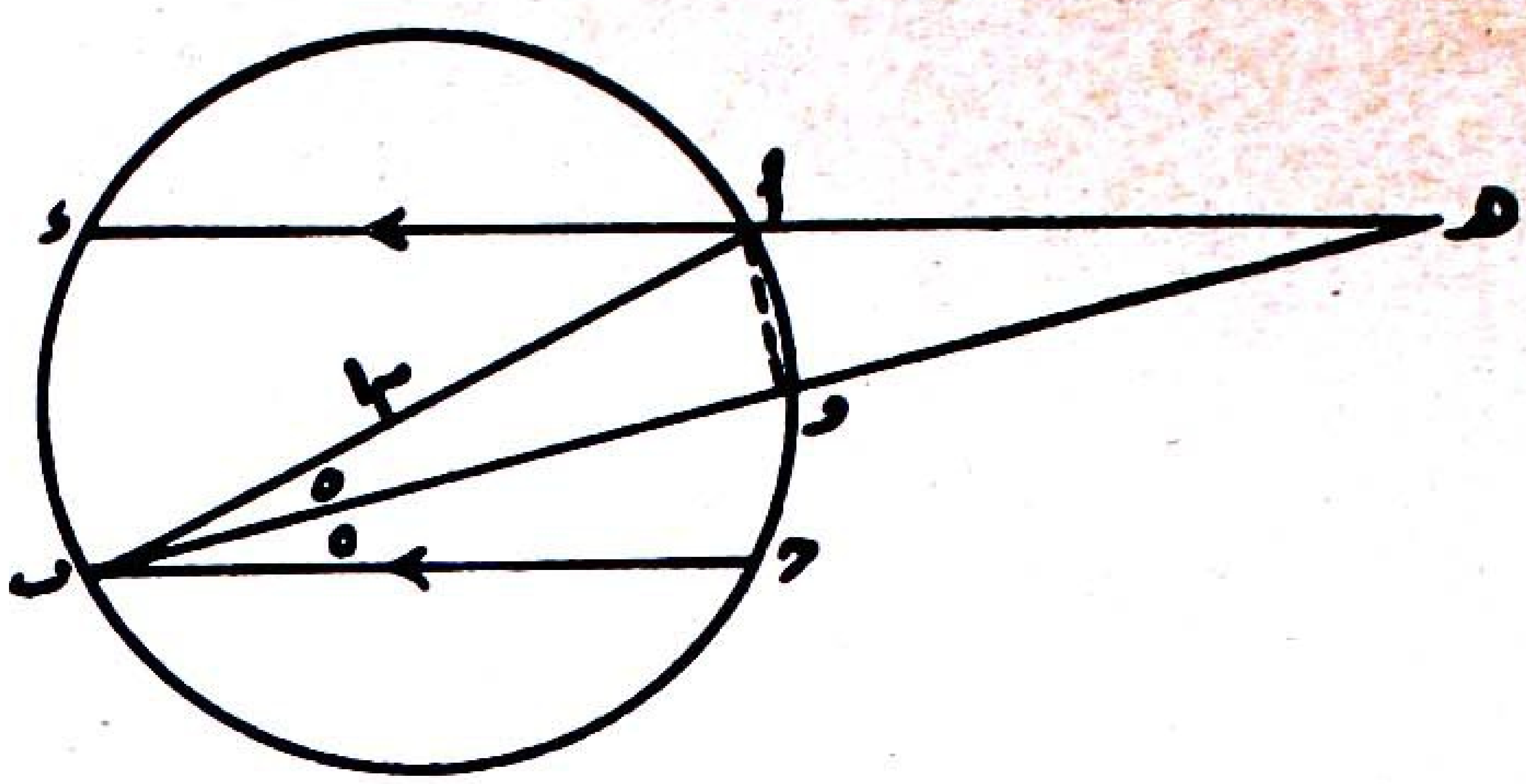
البرهان : ا ب قطر في الدائرة

∴ ∠ ا و ب مرسومة في نصف دائرة فهي قائمة نظرية

ء ا هـ // ب حـ ، هـ و ب قاطع لهما .

∴ ∠ ا هـ ب = ∠ هـ ب حـ بالتبادل

ولكن ∠ ا ب هـ = ∠ هـ ب حـ بالتنصيف فرضاً



الشكل (١٠٠)

∵ ∠ ا هـ ب = ∠ ا ب هـ

∴ △ ا هـ ب متساوي الساقين

∵ ا و ⊥ هـ ب برهاناً ∴ ينصف القاعدة ب هـ

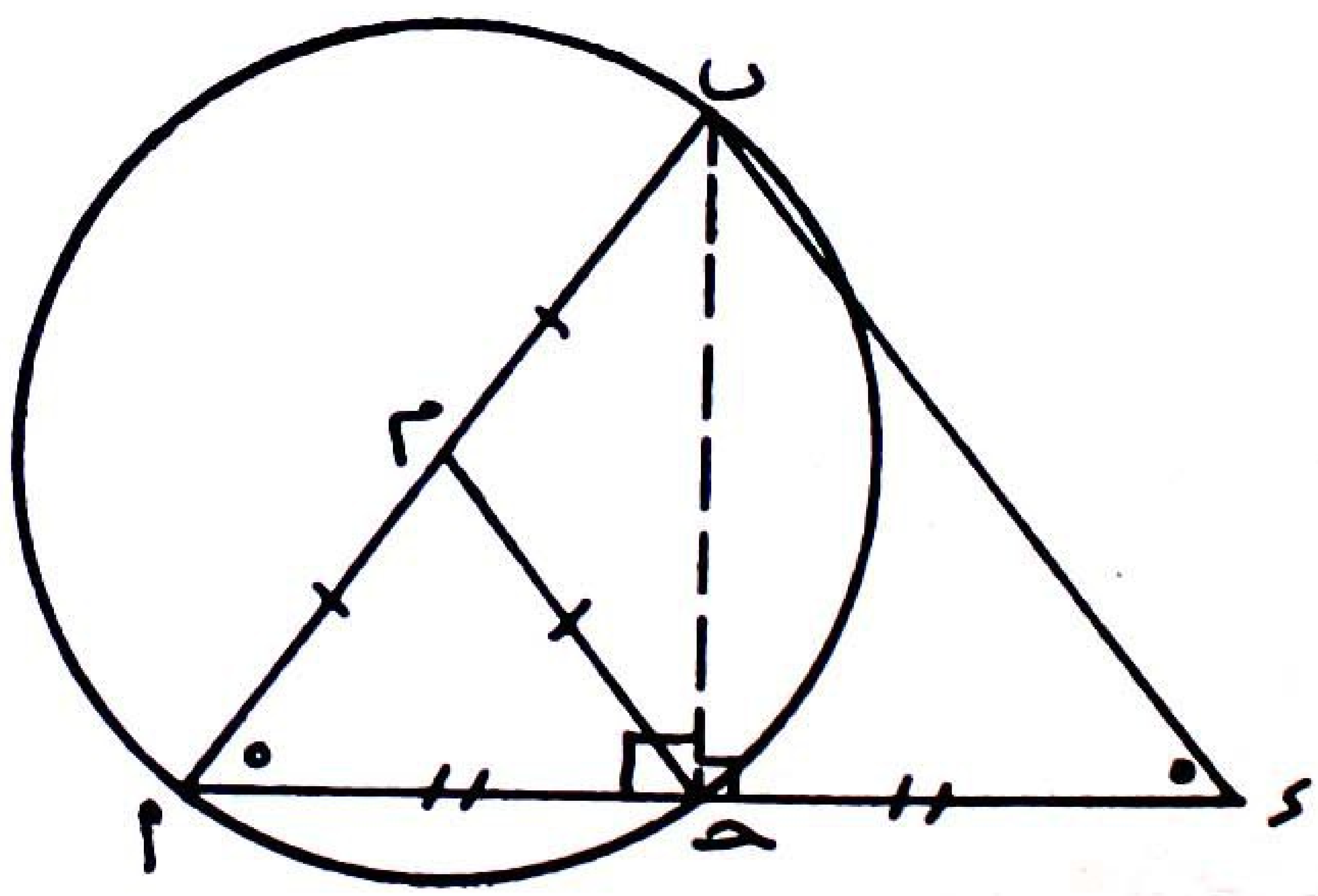
∴ و هـ = ب و

وهو المطلوب

تمرين محلول (٢) :

ا ب قطر في دائرة مركزها م أخذت أي نقطة مثل حـ على المحيط ثم وصل ا حـ ومد على استقامته الى ء بحيث كان ا حـ = حـ ء برهن أن :

∠ ب م حـ = ٢ ∠ ا ء ب



الشكل (١٠١)

المعطيات : م دائرة ، ا ب قطر فيها ا حـ وتر مد الى ى بحيث كان ا حـ = حـ ى
الشكل (١٠١) .

المطلوب : اثبات أن ∠ ب م حـ = ٢ ∠ ا ى ب

العمـــل : نصل ب حـ

البرهـان :

∵ ا ب قطر في الدائرة ∴ ∠ ا حـ ب = ق
ويكون حـ ب عموداً على ى ا من منتصفه

∴ ب ى = ب ا (نظرية المحل الهندسي)

∴ ∠ ا = ∠ ى

، ∵ ∠ ب م حـ مركزية ، ∠ ا محيطية مشتركتان بقوس واحد

∴ ∠ ب م حـ = ٢ ∠ ا

أو ∠ ب م حـ = ٢ ∠ ى وهو المطلوب

نتيجتان :

١ – الزاوية المرسومة في قطعة أكبر من نصف الدائرة تكون حادة ، والزاوية المرسومة في قطعة أصغر من نصف الدائرة تكون منفرجة .

٢ – اذا كانت الزاوية المحيطية قائمة كانت القطعة المرسومة فيها هذه الزاويـة نصف دائرة .

لان الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس والمحصورة بـين ضلعيها تساوي ضعف هذه الزاوية أي = ٢ ق (أي زاوية مستقيمة) .

∴ وتر القطعة يمر بالمركز ∴ القطعة نصف دائرة .

تمرين (١٧)

١ – ا ب حـ مثلث فيه ب حـ = ا حـ فاذا كان ب حـ ثابتاً فأوجد المحل الهندسي للرأس ا في المثلث وأوجد أيضاً المحل الهندسي لمنتصف ا ب

٢ – ا ب حـ مثلث ، م دائرة تمر برؤوسه . ا هـ قطر في الدائرة فاذا كانت

∠ ا = ٣٠

فبرهن أن ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ا هـ

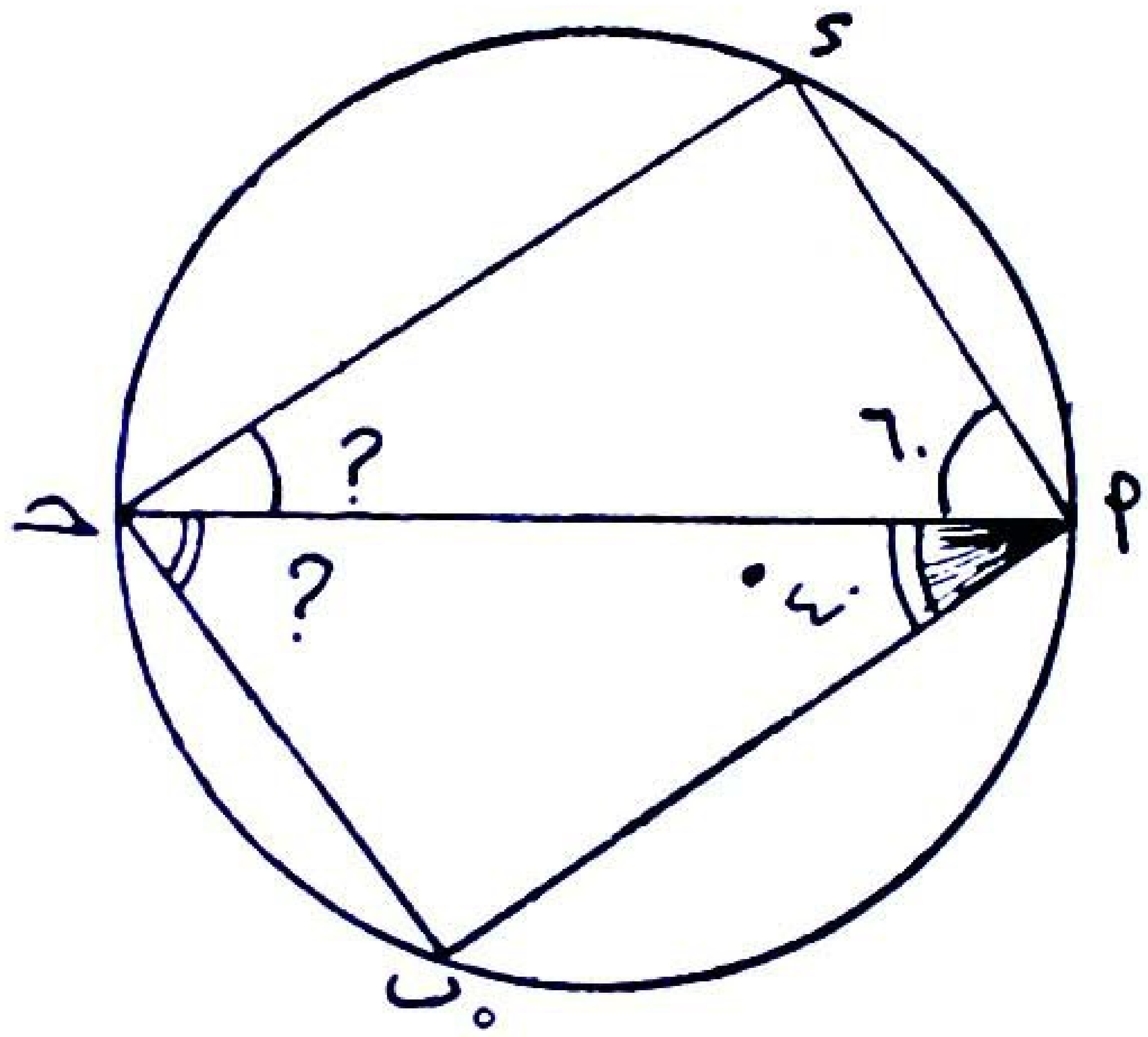
٣ – ا حـ قطر في الدائرة ،

∠ ء ا حـ = ٦٠° ،

∠ ب ا حـ = ٤٠

أوجد قيمة : ∠ ا حـ ء ،

∠ ا حـ ب (ش ١٠٢) .



الشكل (١٠٢)

٤ – دائرتان تقاطعتا في ا ، ب رسم القطر ا حـ في احدى الدائرتين والقطر ا ء في الدائرة الاخرى .

أثبت أن النقط ء ، ب ، حـ على استقامة واحدة .

٥ – ا ب حـ مثلث متساوي الساقين فيه ا ب = ا حـ رسمت دائرة قطرها ا ب فقطعت ب حـ في س برهن أن س منتصف ب حـ .

٦ – ا ب قطر في دائرة ا حـ ، ا ء وتران يصنعان مع القطر زاويتين متساويتين برهن ان القطر عمودي على حـ ء وينصفه .

٧ – ا ب وتر في دائرة مركزها م نصف في س برهن ان الدائرة التي تمر بالنقط ا ، م ، س يكون ا م قطراً فيها .

٨ – م ا نصف قطر دائرة ، ا ب وتر فيها برهن ان الدائرة التي قطرهـــا م ا ينصف الوتر ا ب

٩ – ا م حـ ، ب م ء قطران مرسومان في الدائرة م برهن ان الشكل ا ب حـ ء مستطيل

١٠ – ا ب قطر في دائرة فرضت نقطة مثل حـ على محيط الدائرة ثم وصل حـ ا ومد على استقامته الى هـ بحيث كان ا هـ = قطر الدائرة انزل العمود هـ ء على امتداد ب ا برهن ان ا ء = ا حـ

١١ – ا ب قطر دائرة ، حـ ء وتر فيها انزل ب د ، ا م عمودان على حـ ء أو امتداده فلاقيــاه في د ، م على الترتيب فإذا قطع ب د ، ا م أو امتداديهما محيط الدائرة في ط ، ق على الترتيب اثبت أن:

أولاً : ب ط = ق ا

ثانياً : الشكل ب د م ق مستطيل

١٢ – ا ب قطر دائرة مركزهـــا م رسم فيها نصف القطر م حـ بحيث كانت زاوية ا م حـ = ٥٤° ثم مد ب ا على استقامته الى ء بحيث كان ا ء = ا حـ ثم أقيم من ء عمود على ء ب قابل امتداد حـ ا في هـ .

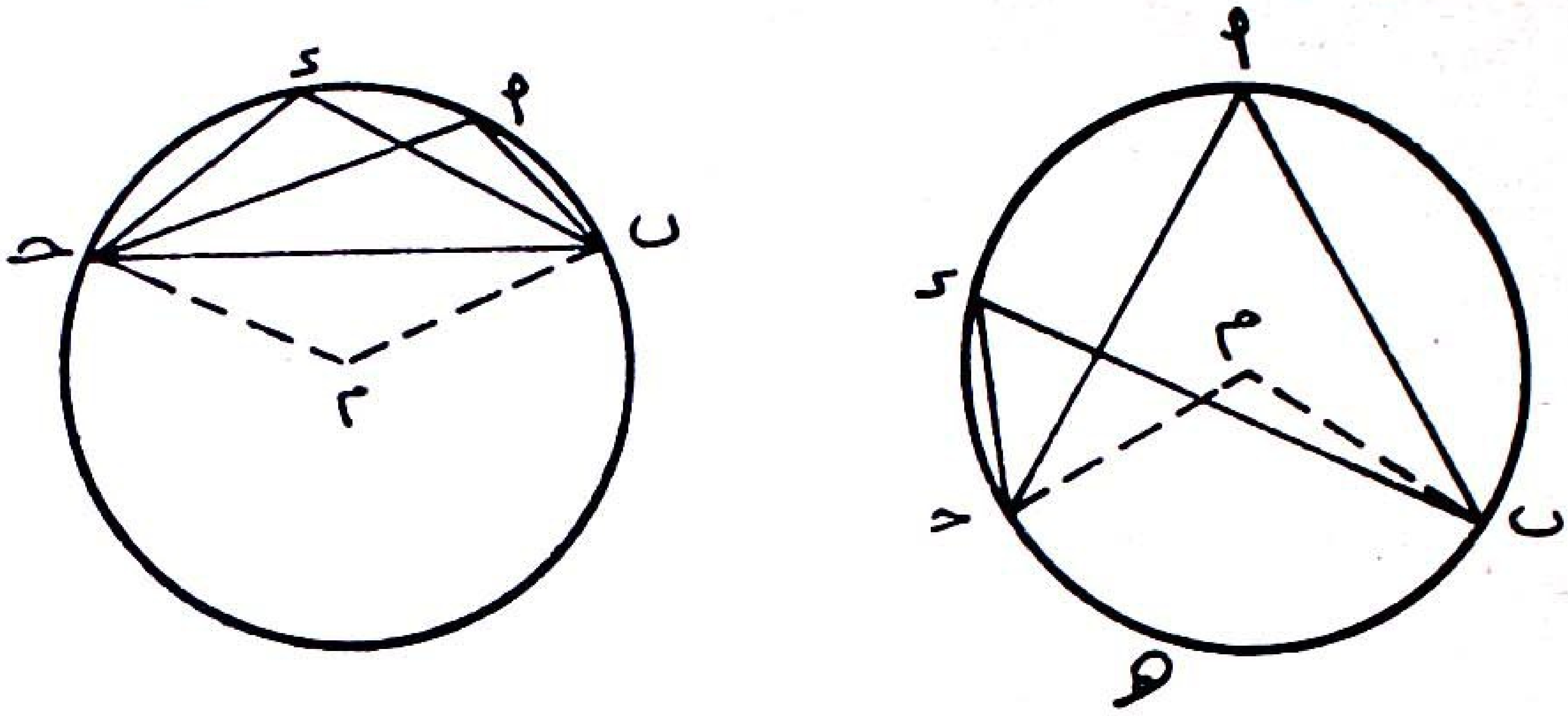
أولاً : برهن أن ا هـ = ا ب

ثانياً : احسب قيمة زاوية ء هـ ب

١٣ – ا ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة مركزها م رسم القطر ب م ص ثم انزل العمودان ا ء ، حـ هـ على ب حـ ، ا ب فقابلاهما في ء ، هـ على الترتيب فإذا تقاطع العمودان في س فاثبت ان الشكل ا س حـ ص متوازي أضلاع .

نظرية (٧)

الزوايا المحيطية المرسومة في قطعة واحدة من دائرة متساوية



الشكل (١٠٣)

المعطيات : الزاويتان ب ا ح ، ب ء ح مرسومتان في القطعة ب ا ح ء في الدائرة م الشكل (١٠٣)

المطلوب : اثبات ان ∠ ب ا ح = ∠ ب ء ح

العمل : نصل م ب ، م ح

البرهان : في كل من الشكلين ∠ ب ا ح المحيطية ، ∠ ب م ح المركزية متحدتين في القوس ب هـ ح

∴ ∠ ب ا ح = $\frac{١}{٢}$ ∠ ب م ح

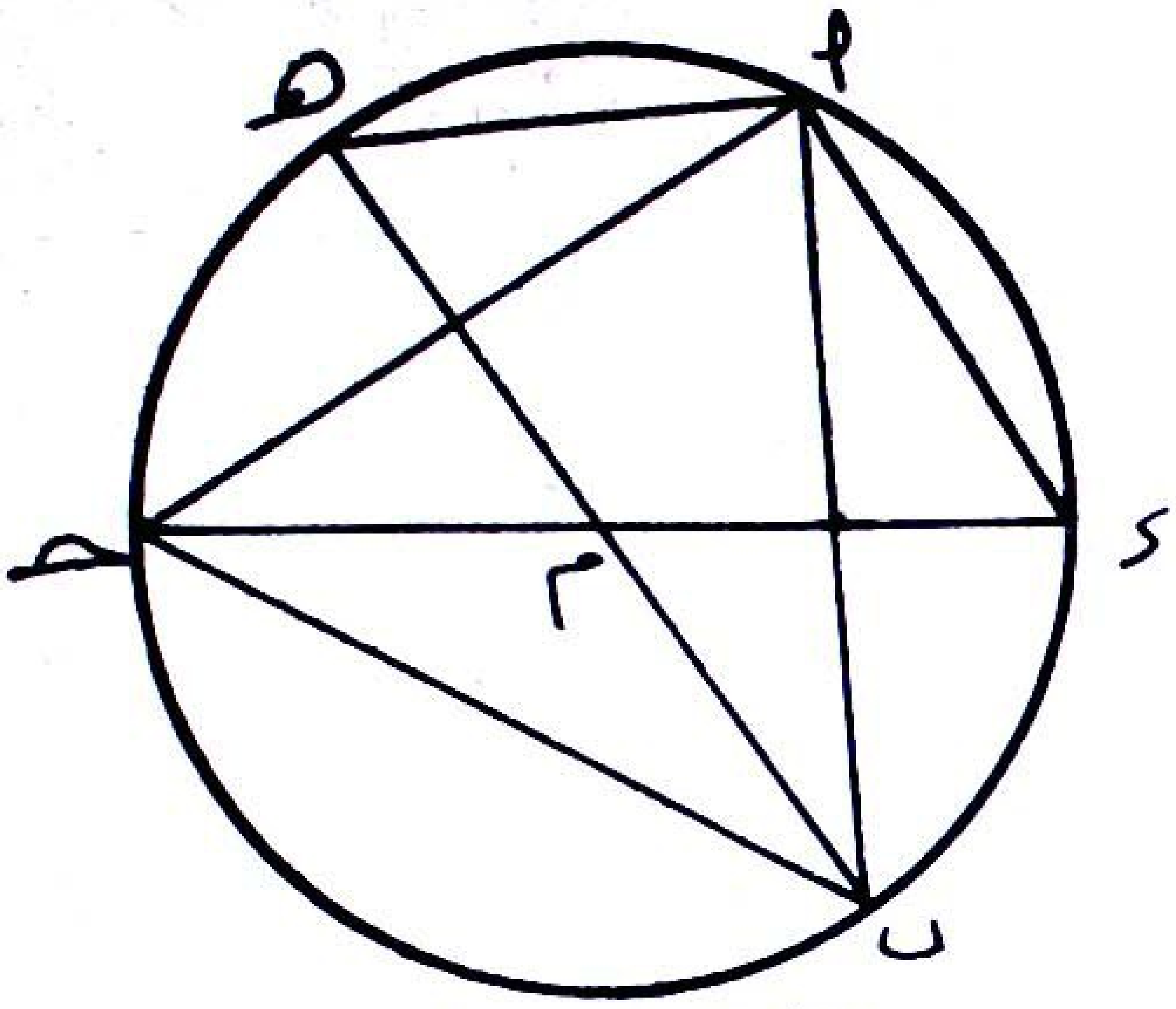
وبالمثل ∠ ب ء ح = $\frac{١}{٢}$ ∠ ب م ح

∴ ∠ ب ا ح = ∠ ب ء ح

وهو المطلوب

تمرين محلول (١) :

ا ب ح مثلث مرسوم في الدائرة م رسم فيها القطران ب م هـ ، ح م ء اثبت ان ∠ ء ا ب = ∠ هـ ا ح



الشكل (١٠٤)

المعطيات : م دائرة رسم فيها
المثلث ا ب ح والقطران
ب م ه ، ح م ء
الشكل (١٠٤)

المطلوب : اثبات ان
∠ ء ا ب = ∠ ه ا ح

البرهان : ∠ ء ا ب ، ∠ ء ح ب زاويتان مرسومتان في القطعة ءاحب

∴ ∠ ء ا ب = ∠ ء ح ب نظرية

وبالمثل ∠ ه ا ح = ∠ ه ب ح «

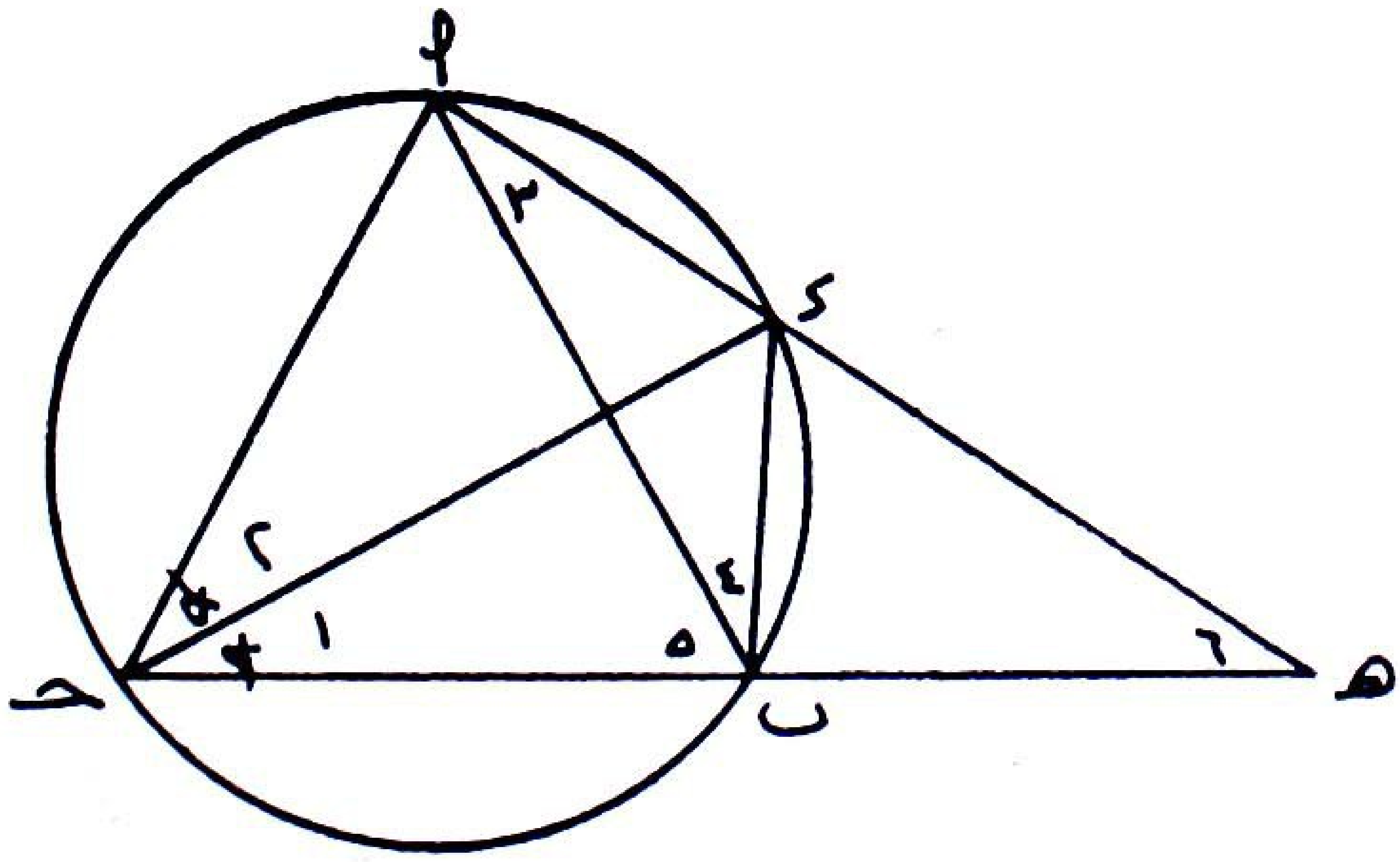
ولكن ∠ م ب ح = ∠ م ح ب لأن م ب = م ح

∴ ∠ ء ا ب = ∠ ه ا ح

وهو المطلوب

تمرين محلول (٢) :

ا ب ح △ فيه ا ب = ا ح مرسوم داخل دائرة رسم ح ء ينصف



الشكل (١٠٥)

∠ ا حـ ب ويقابل المحيط في ء فإذا مد حـ ب ، ا ء حتى تلاقيا في هـ .

برهن ان : (١) ب ء = ء ا (٢) ب هـ = ب ا

المعطيات : △ ا ب حـ فيه ا ب = ا حـ ، حـ ء ينصف ∠ ا حـ ب الشكل (١٠٥)

المطلوب : اثبات ان (١) ب ء = ا ء (٢) ب هـ = ب ا

البرهان : ∵ ∠ ٣ = ∠ ١ (لانهما مشتركتان في ب ء⌢)

، ∠ ٤ = ∠ ٢ ولكن ∠ ١ = ∠ ٢ بالتنصيف فرضاً

∴ ∠ ٣ = ∠ ٤ ∴ ء ا = ء ب

وهو المطلوب أولاً

∵ ∠ ٥ خارجة عن △ ا ب هـ

∴ ∠ ٥ = ∠ ٣ + ∠ ٦

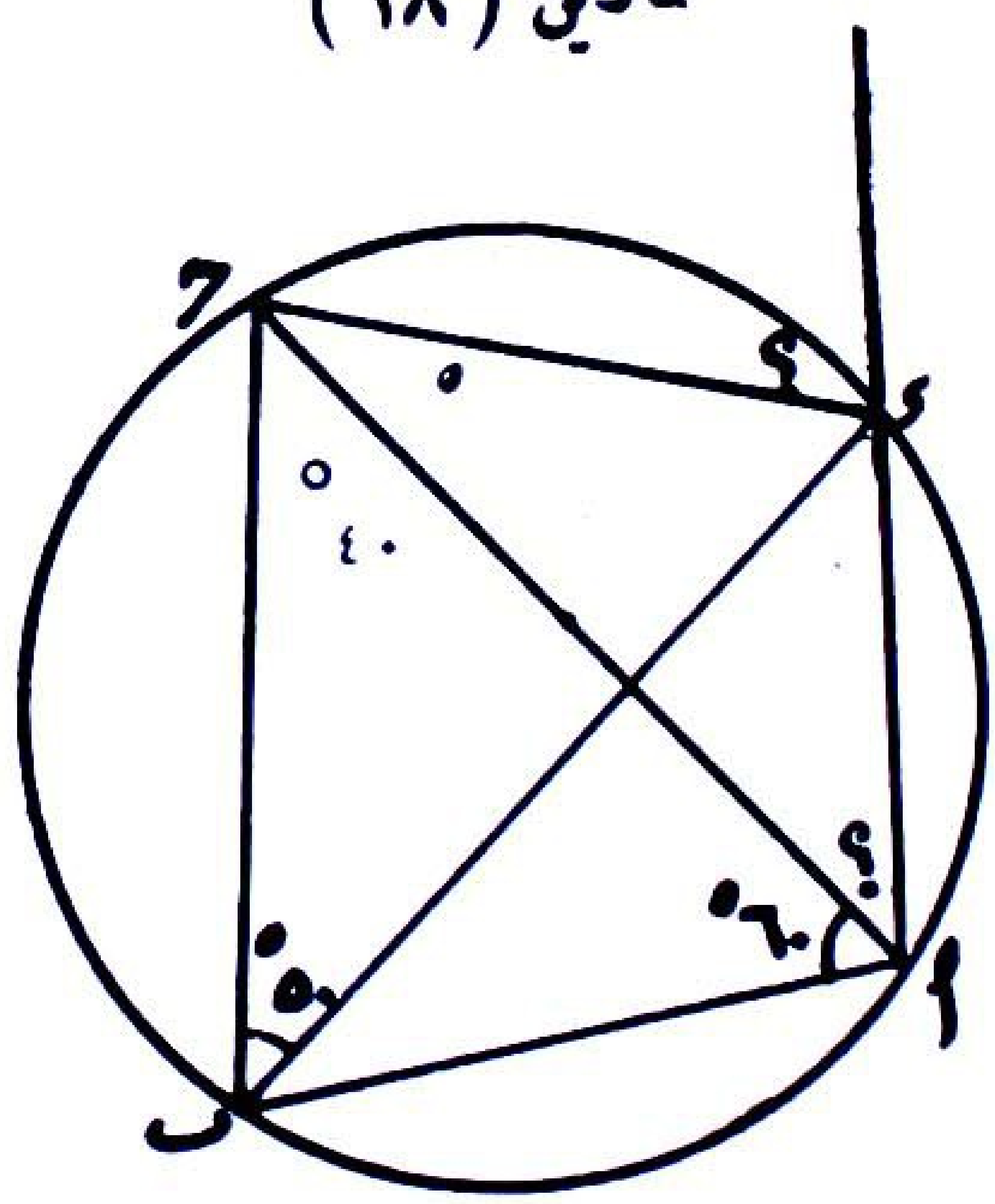
ولكن ∠ ٥ = ∠ ١ + ∠ ٢ ∴ ∠ ٣ + ∠ ٦ = ∠ ١ + ∠ ٢

ولكن ∠ ٣ = ∠ ١ نظرية

∴ ∠ ٦ = ∠ ٣ ∴ هـ ب = ا ب

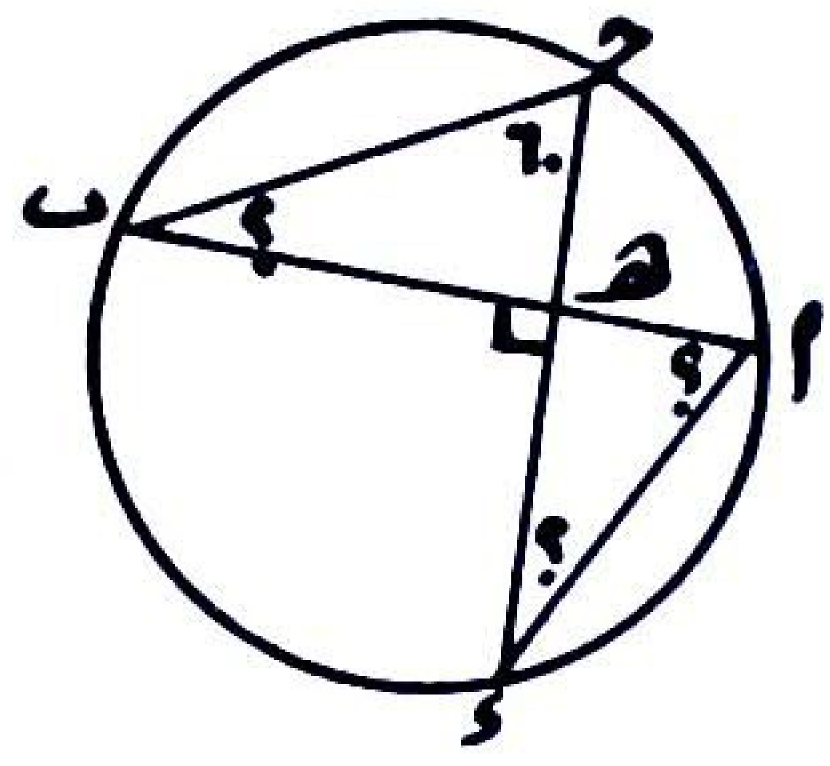
وهو المطلوب

تمارين (١٨)

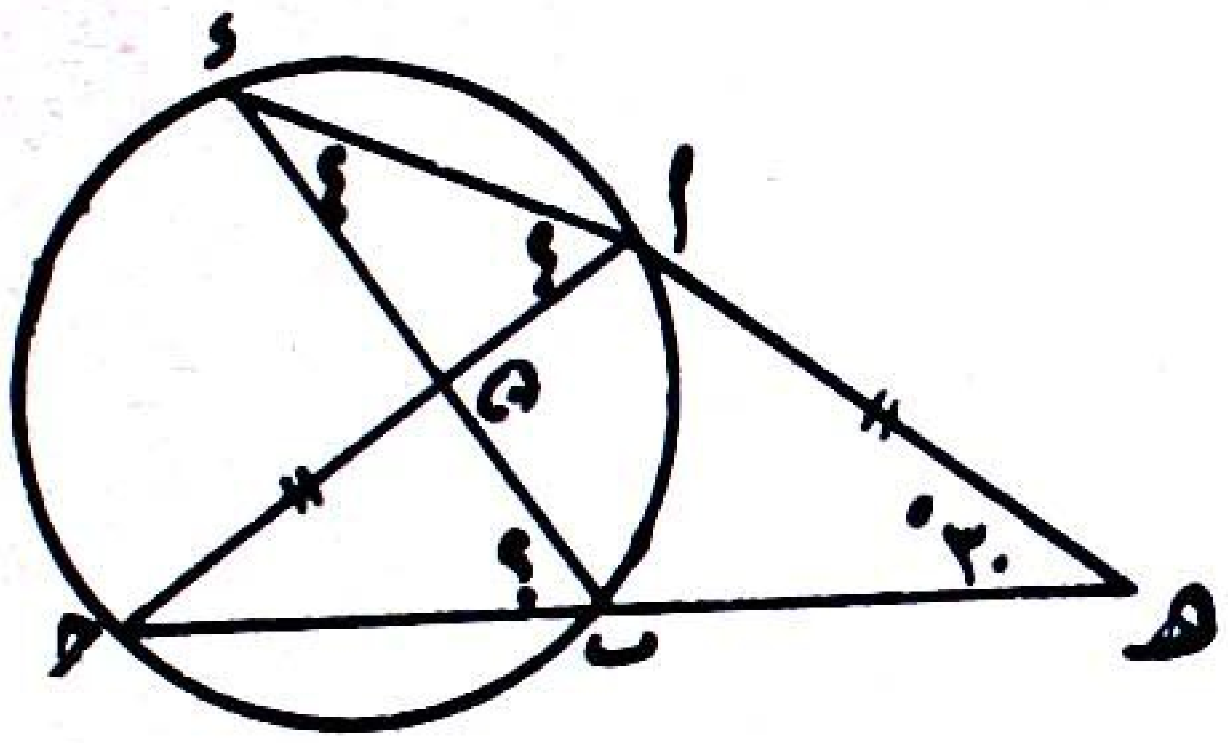


الشكل (١٠٦)

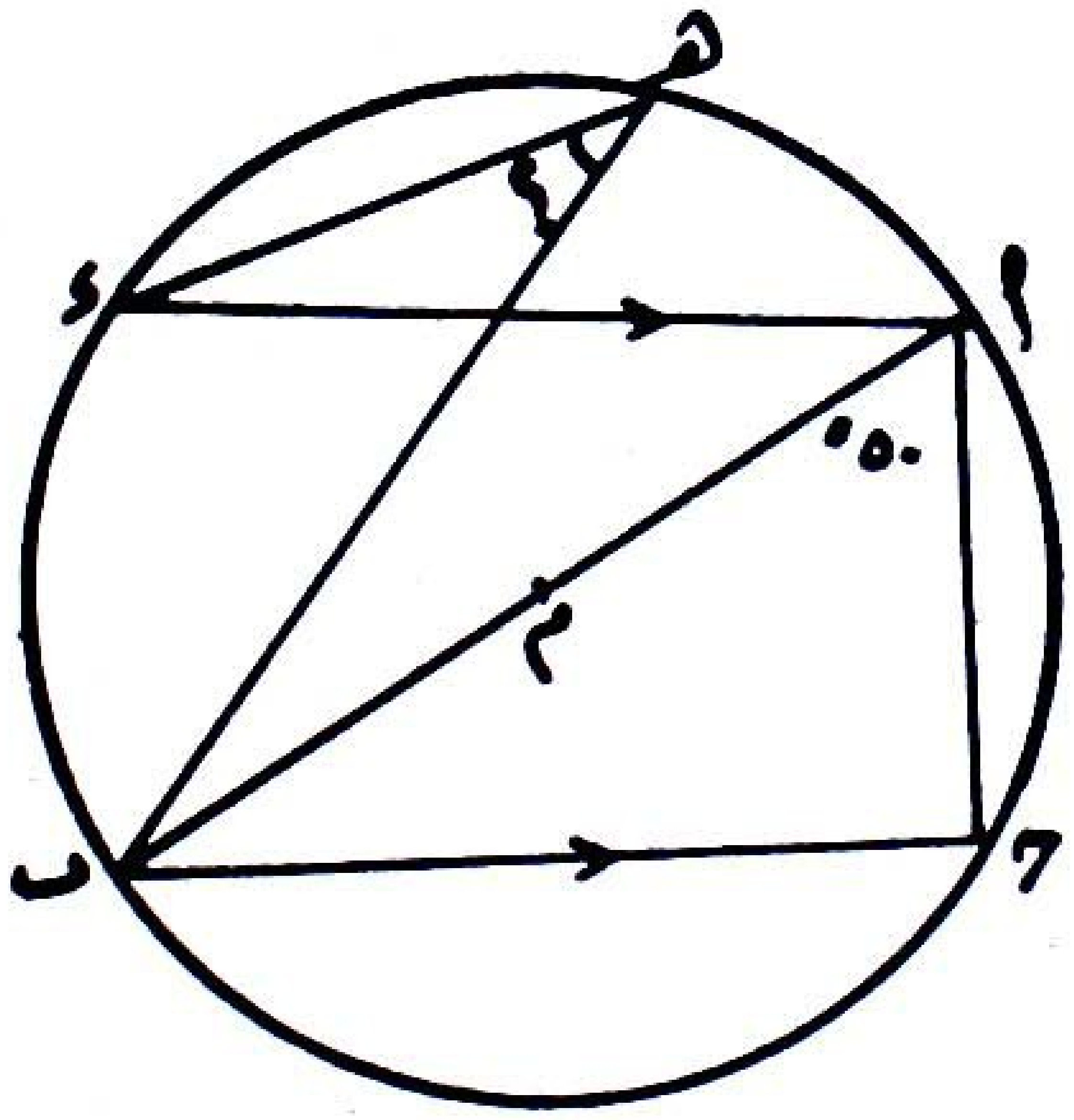
١ – بين مقدار الزوايا المجهولة بالدرجات في كل من الاشكال ، (١٠٦) (١٠٧) ، (١٠٨) ، (١٠٩) .



الشكل (١٠٧)



الشكل (١٠٨)



الشكل (١٠٩)

٢ – ا ن ب ، حـ ن ء وتران في دائرة متقاطعان ومتعامدان فاذا أخذت نقطة هـ على ا ن الذي هو اكبر من ب ن بحيث كان ن هـ = ن ب برهن أن امتداد حـ هـ ⊥ ا ء .

٣ – ا ب ، حـ ء وتران متعامدان في دائرة ومتقاطعان في م فاذا انزل

م ل عموداً على ا حـ ثم مد ل م حتى لاقى ب ى في هـ برهن أن :

ب هـ = هـ ى .

٤ – اب ، حـ ى وتران في دائرة متقاطعان في س برهن ان زوايا المثلث اس ى تساوي زوايا المثلث حـ س ب

٥ – دائرتان تقاطعتا في ا ، ب ثم رسم الوتران س ا ص ، ى ا هـ يقطعان الدائرة الاولى في س ، ى والثانية في هـ ، ص . والمطلوب اثبات أن :

∠ س ب ى = ∠ هـ ب ص

٦ – دائرتان متقاطعتان في س ، ص رسم مستقيم يمر بالنقطة س وعمودي على الوتر المشترك س ص . ويقطع محيطي الدائرتين في ا ، ب فاذا وصل ا ص فقطع هو او امتداده محيط الدائرة الاخرى في حـ وكذلك وصل ب ص فقطع هو او امتداده محيط الدائرة الاولى في ى .

برهن أن ∠ حـ س ص = ∠ ى س ص

٧ – ا ب حـ مثلث متساوي الساقين مرسوم داخل دائرة فيه ا ب = ا حـ ، حـ س وتر ينصف ∠ ا حـ ب . وصل ا س ثم مد حتى قابل امتداد حـ ب في ص . اثبت ان ب ص = ا ب

٨ – ا ب حـ ى شكل رباعي مرسوم داخل دائرة فيه ا ب = ا ى ، ب حـ > حـ ى . اخذ على حـ ب البعد حـ هـ = حـ ى اثبت ان ا ب = ا هـ

٩ – ا ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة فيه ∠ ا = ٦٠° نصفت زاويتا ب ، حـ بمستقيمين لاقيا محيط الدائرة في ى ، هـ

أثبت أن ب هـ ∥ حـ ى

١٠ – ا ب حـ مثلث متساوي الاضلاع مرسوم داخل دائرة أخذت أي نقطة ى على القوس الاصغر ا ب ثم وصل ب ى ، حـ ى . واخذ على ى حـ البعد ى هـ يساوي ى ب

أثبت ان ∠ ى ب ا = ∠ هـ ب حـ

١١ — ا ب حـ مثلث مرسوم داخـــل دائرة انزل ا ى ، ب هـ عمودين على ب حـ ، حـ ا فتقاطعا في ط . مد ا ى حتى قطع محيط الدائرة في ن .
برهن أن ط ى = ن ى

١٢ — س نقطة خارج دائرة رسم القاطعان س ا ب ، س حـ ى فاذا كانت زاوية س ب حـ = ٥٢° ، ∠ ا س حـ = ٣٥° احسب قيمة الزاوية س ا ى

١٣ — ا نقطة خارج دائرة رسم منها القاطعان ا ب حـ ، ا ى هـ فقطعا الدائرة في ب ، حـ ، ى ، هـ . أثبت ان المثلثين ا حـ ى ، ا هـ ب متساويان في الزوايا

١٤ — ا ب ، حـ ى وتران متعامدان في دائرة ومتقاطعان في هـ . انزل العمود هـ ل على ا ى فاذا مد ل هـ على استقامته حتى لاقى حـ ب في س . أثبت ان حـ س يساوي هـ س

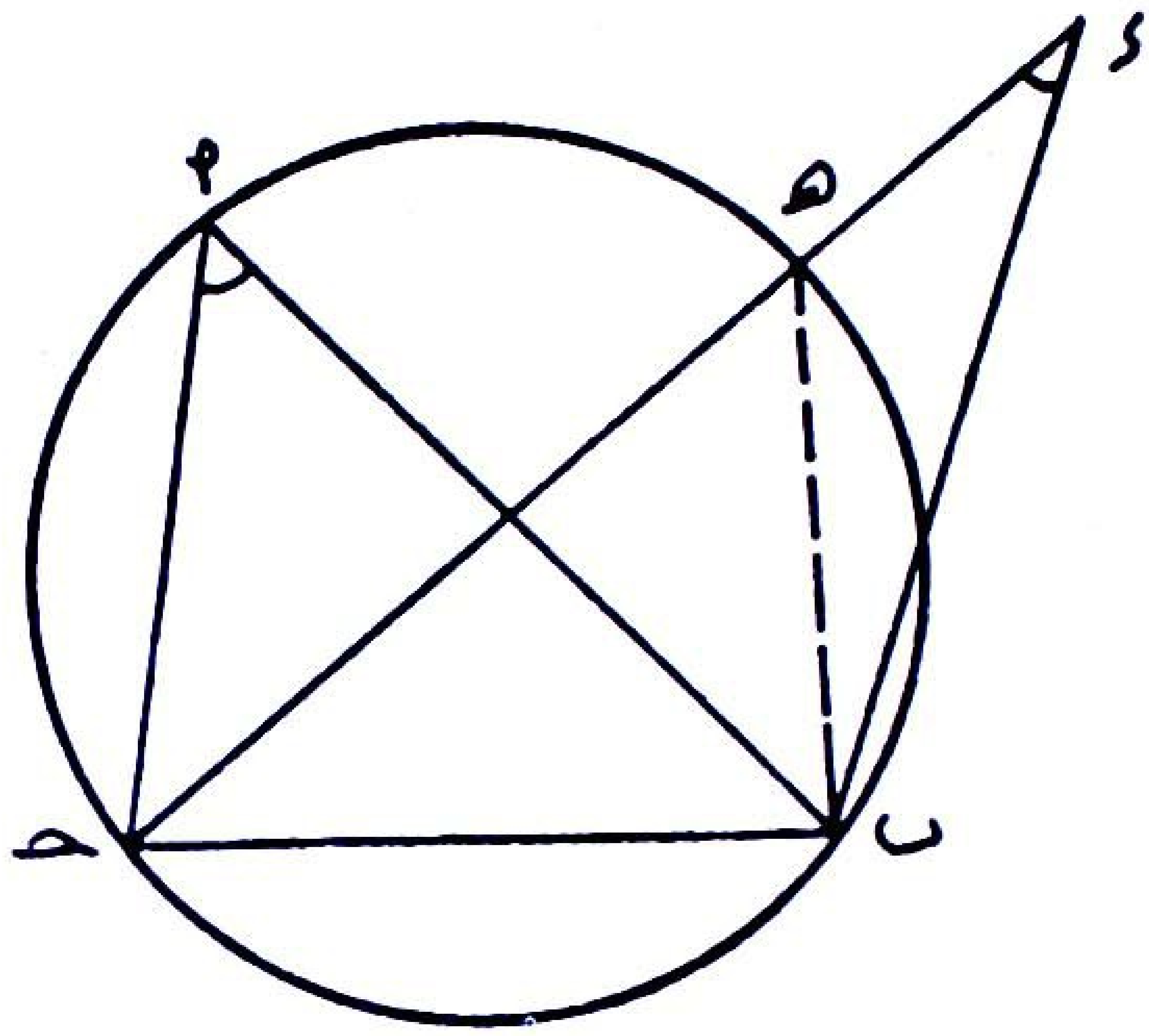
١٥ — ا ب ، حـ ى وتران متعامدان في دائرة ومتقاطعان في هـ نصف ا ى في س ثم وصل هـ س . برهن ان امتداد س هـ عمود على حـ ب

١٦ — ا ب حـ ى متوازي أضلاع رسمت دائرة تمر بالنقطة ا ويقطع محيطهـــا ا ب ، ا حـ ، ا ى في النقط س ، ص ، ع .

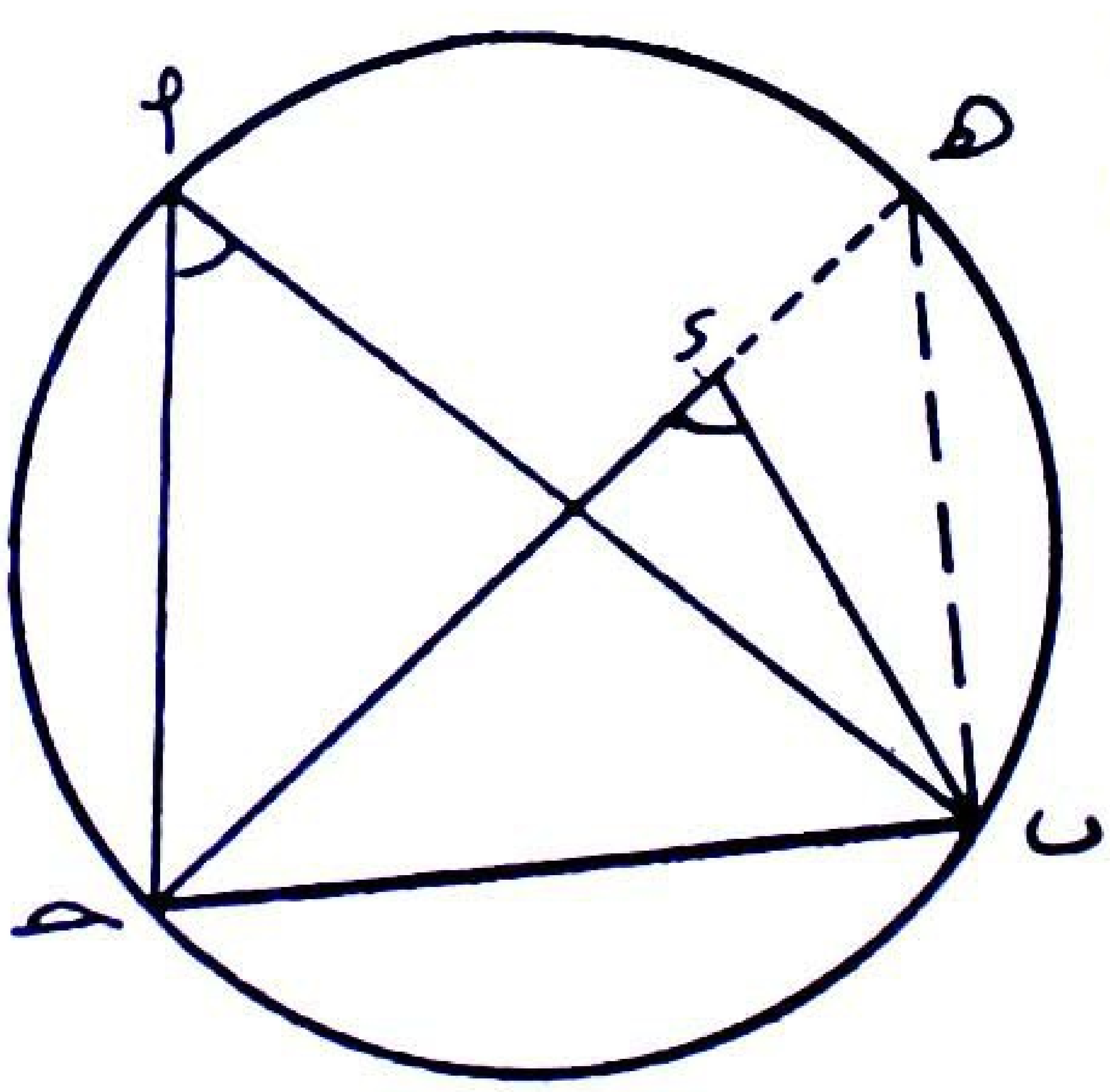
برهن ان زوايا المثلث س ص ع تساوي زوايا المثلث ا ى حـ

نظرية (٨)

اذا تساوت زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها امكن ان يمر برأسيهما محيط دائرة تكون هذه القاعدة وتراً فيها .



الشكل (١١٠ – ا)



الشكل (١١٠ ب)

المعطيات : ∠ ب ا حـ = ∠ ب ء حـ (مرسومتان على قاعدة واحدة ب حـ وفي جهة واحدة منها) .

المطلوب : اثبات أن ا ، ب ، حـ ، ء تقع على محيط دائرة واحدة .

العمل : ∵ ا ، ب ، حـ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة لذلك يمكن رسم محيط دائرة

يمر بها فاذا مر بالنقطة ء ثبت المطلوب واذا لم يمر بها فانـه يقطع حـ ء الشكل (١١٠ – ١) ، أو امتداده الشكل (١١٠ – ب) في هـ نصل هـ ب

البرهان : ∠ هـ ، ∠ ا مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها

∴ ∠ هـ = ∠ ا نظرية

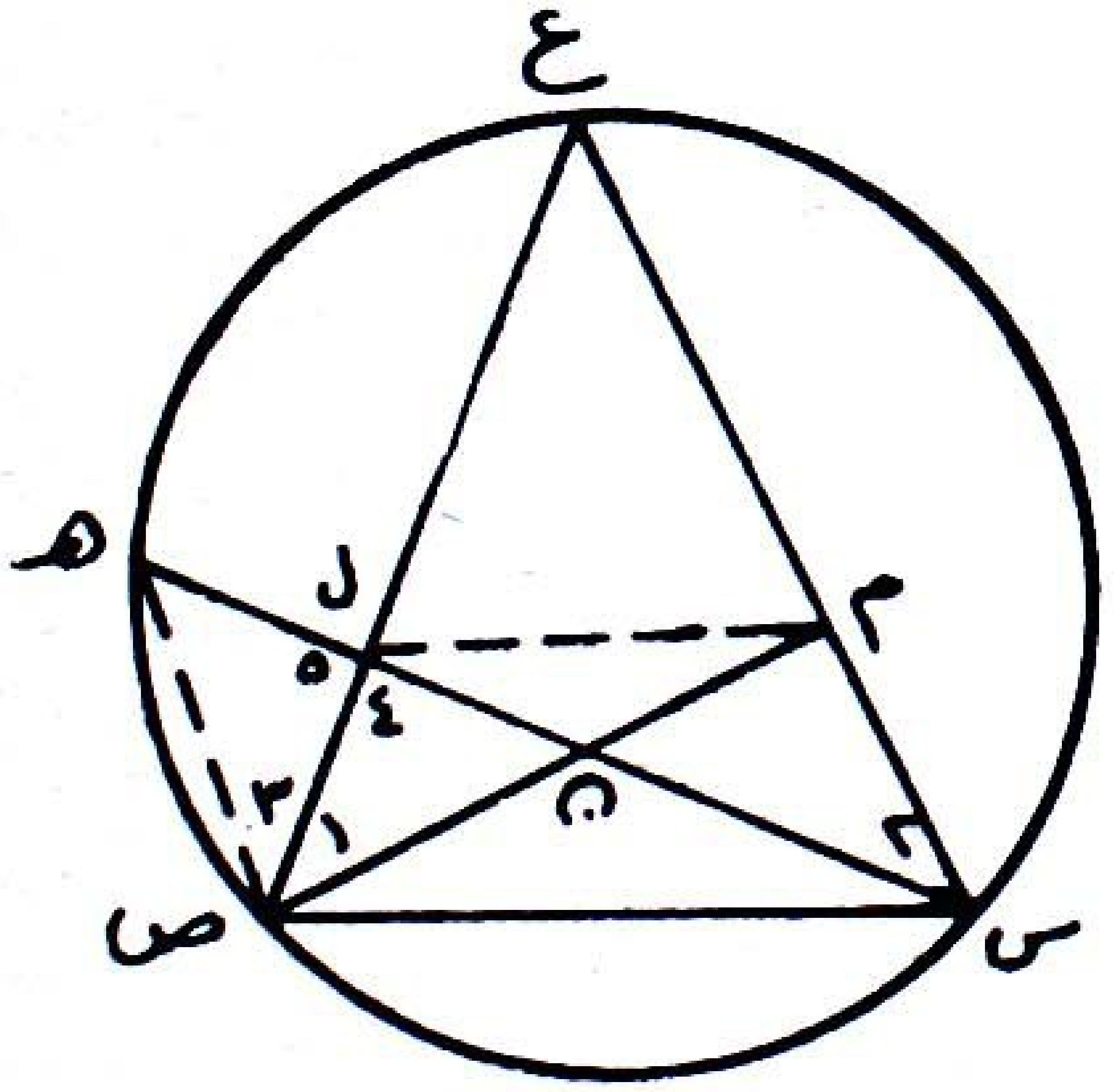
ولكن ∠ ء = ∠ ا

∴ ∠ ء = ∠ هـ وهذا لايمكن الا اذا انطبقت النقطة هـ على النقطة ء أي ان محيط الدائرة الذي يمر بالنقط ا ، حـ ، ب يمر بالنقطة ء

وهو المطلوب

تمرين محلول (١) :

س ص ع △ مرسوم داخـــل دائرة انزل ص م ، س ل عمودين على س ع ، ص ع على الترتيب فتقاطعا في د مد س د ل على استقامته فقابل محيط الدائرة في هـ برهن ان د ل = هـ ل



الشكل (١١١)

المعطيات : س ص ع △ ص م ⊥ س ع ، س ل ⊥ ص ع ، د نقطة تقاطع الارتفاعين ، هـ نقطة تقابل س ل بمحيط الدائرة ، الشكل (١١١)

المطلوب : اثبات ان د ل = هـ ل

العمـل : نصل ص هـ

البرهان : ∵ ∠ ل = ن ،

∠ م = ن

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة س ص وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل س م ل ص رباعي دائري

∴ ∠ ١ = ∠ ٢ نظرية

والشكل هـ ص س ع   رباعي دائري

∴ ∠٣ = ∠٢   نظرية

∴ ∠١ = ∠٣

في △△ ص د ل ، ص ل هـ

فيهما { ص ل مشترك
∠١ = ∠٣
∠٤ = ∠٥ بالقيام }

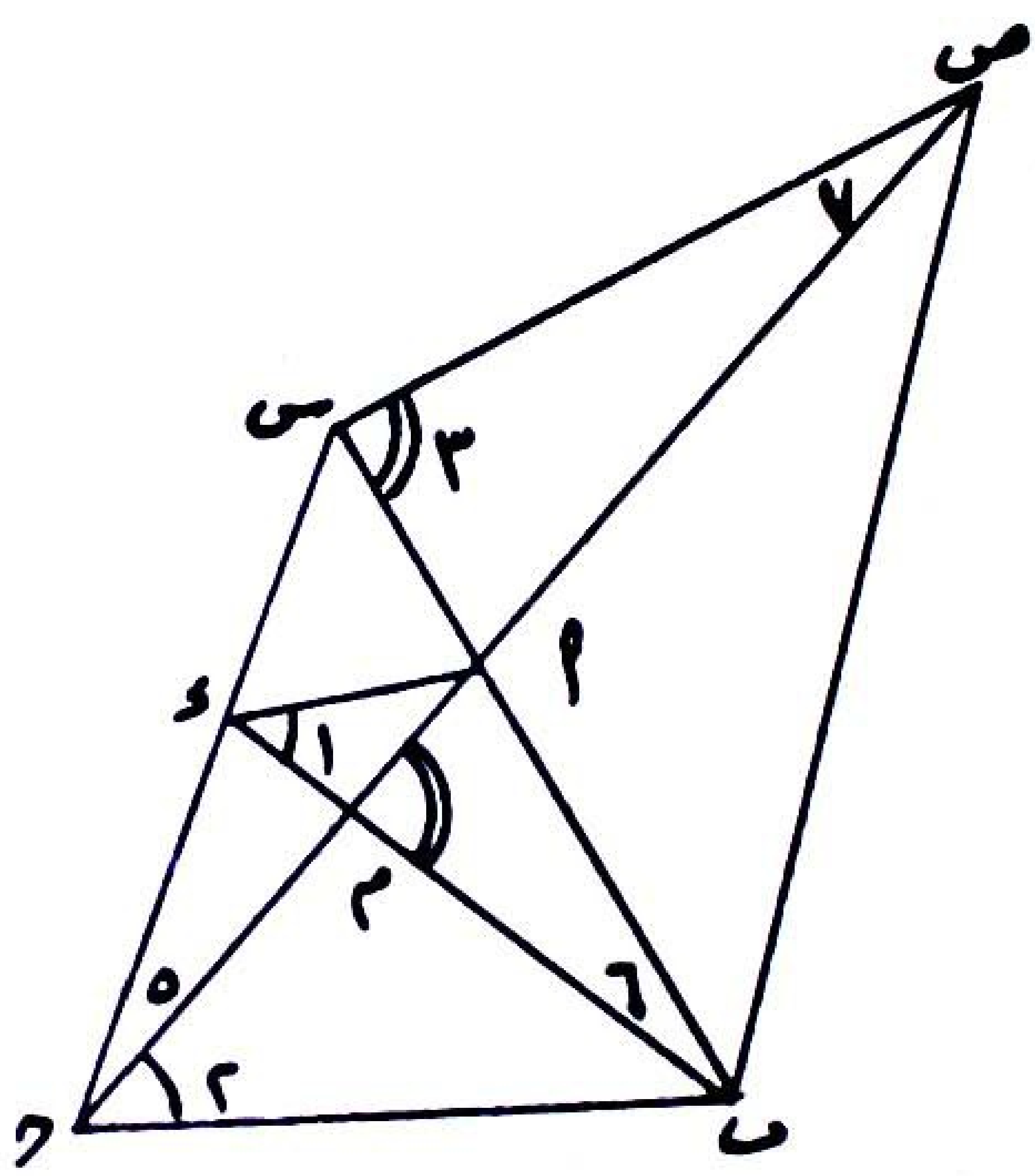
∴ ينطبق △△ وينتج ان :

د ل = هـ ل   وهو المطلوب

تمرين محلول (٢) :

ا ب حـ ء شكل رباعي تقاطع قطراه في م وكانت ∠ ا ء ب = ∠ ا حـ ب مد ب ا ، حـ ء فتلاقيا في س ثم مد حـ ا الى ص بحيث كانت ∠ ص س ا = ∠ ا م ب . اثبت ان :

س ص = س حـ .



الشكل (١١٢)

المعطيات : ا ب حـ ء شكل رباعي فيه ∠١ = ∠٢ مد ب ا ، حـ ء فتلاقيا في س ومد حـ ا الى ص وكانت ∠٣ = ∠٤ الشكل (١١٢)

المطلوب : اثبات ان س ص = س حـ

البرهان : ∵ ∠١ = ∠٢ وهما مرسومتان على القاعدة ا ب وفي جهة واحدة منها

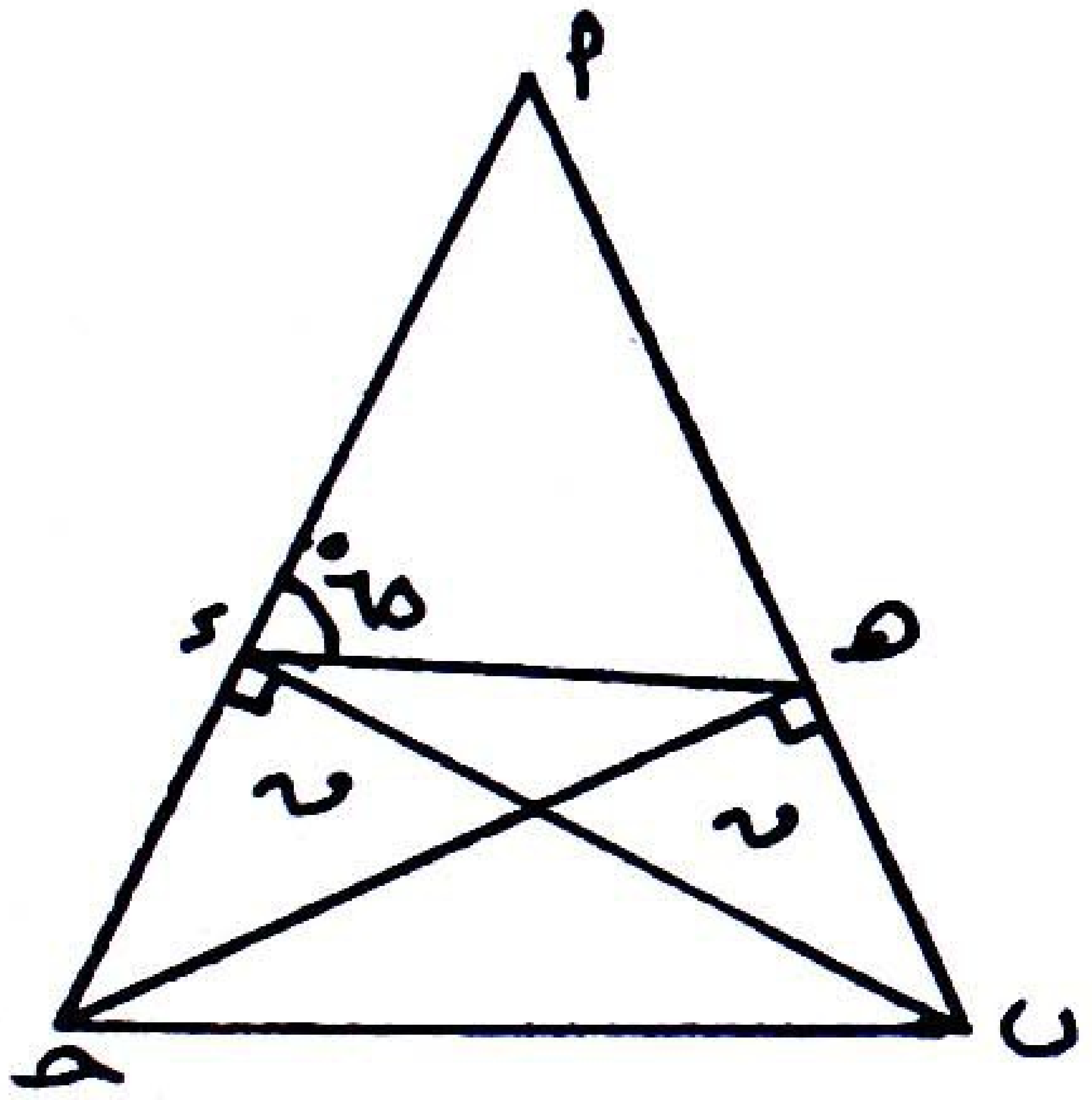
∴ الشكل ا ب حـ ى رباعي دائري ∴ ∠ ٥ = ∠ ٦ . . . (١)
وكذلك ∵ ∠ ٣ = ∠ ٤ ∴ الشكل س ص ب م رباعي دائري
∴ ∠ ٧ = ∠ ٦ . . . . (٢)
من (١) ، (٢) ينتج ان ∠ ٥ = ∠ ٧
∴ س ص = س حـ

وهو المطلوب

تمارين (١٩)

١ - في الشكل (١١٣) ب ى ⊥ ا حـ ، حـ هـ ⊥ ا ب وكانت ∠ ا ى هـ = ٦٥°
اوجد مقدار ∠ هـ حـ ب

٢ - ا ب حـ △ فيه ∠ ا = ٣٦° ، ا ب = ا حـ نصفت ∠ ب بمستقيم لاقى المستقيم المرسوم من حـ موازياً ب ا في نقطة ى . اثبت ان الشكل ا ب حـ ى رباعي دائري.



الشكل (١١٣)

٣ - ا ب ، ا حـ وتران في دائرة اخذت نقطة ط على ا ب ، نقطة د على ا حـ وكانت ∠ ب ط حـ = ∠ ب د حـ مد ب د حتى قابل محيط الدائرة في ل ثم مد حـ ط فقابل محيط الدائرة في م اثبت ان م ل // ط د

٤ - ا ب حـ ى مربع مد ب حـ على استقامته الى هـ فإذا وصل ا هـ وأقيم عليه عمود من هـ قابل منصف ∠ ى حـ هـ في س فاثبت ان الشكل ا حـ هـ س رباعي دائري

٥ - ا ب ، حـ ى وتران متعامدان تقاطعا داخل الدائرة في س . فرضت النقطة

ه على حـ س بحيث كانت س ه = س ى ثم مد ا ه على استقامته حتى قابل ب حـ في ص برهن ان ا ، س ، ص ، حـ يمر بها محيط دائرة واحد

٦ - ا حـ ، ب ى مستقيمان متعامدان ومتقاطعان في ه . انزل ه س ⊥ ا ب ومد س ه حتى لاقى ى حـ في ص . فاذا كانت ص منتصف ى حـ برهن ان الشكل ا ب حـ ى رباعي دائري

٧ - ا ب حـ ى شكل رباعي مرسوم داخل دائرة . تقاطع قطراه في س . نصفت ∠ ب ا س بالمنصف ا ه فقابل ى ب في ه ونصفت ∠ حـ ى س بالمنصف ى ل لاقى م حـ في ل برهن ان الشكل ا ه ل ى رباعي دائري

٨ - ا ب حـ △ حاد الزوايا . انزل العمودان ب س ، حـ ص على الضلعين ا حـ ، ا ب على الترتيب فاذا كانت ∠ ص ب س = ٢٠° ، ∠ ا ص س = ٥٥° فأوجد قيمة ∠ ا حـ ص ، ∠ س ب حـ

٩ - ا ب حـ ى شكل رباعي مرسوم داخل دائرة وصل ا حـ ، ب ى فتقاطعا في ه رسم ا س يقطع ب ه في س ورسم ى ص يقطع حـ ه في ص فاذا كانت ∠ ب ا س = ∠ حـ ى ص فاثبت ان س ص // ب حـ

١٠ - ا ب حـ ى مربع فرضت نقطة ه على القطر ا حـ رسم المستقيمان م د ، ل ع يمران من نقطة ه موازيان ا ب ، ا ى على الترتيب فاذا كانت النقط م ، د ، ل ، ع تقع على أضلاع المربع . اثبت انه يمكن ان يمر بها محيط دائرة واحد

١١ - دائرتان متقاطعتان في ا ، ب . رسم قطرا الدائرتين ا حـ ، ا ى ثم مدا على استقامتيهما من جهة ا فقابل كل قطر محيط الدائرة الاخرى في س ، ص على الترتيب . اثبت ان الشكل حـ ى س ص رباعي دائري .

١٢ - ا ب قطر دائرة مركزها م اخذت نقطة حـ على المحيط فاذا كان امتداد ب حـ يقابل العمود المقام من م على ا ب في نقطة ى . فاثبت ان

(ا) الشكل ا م حـ ء رباعي دائري

(ب) ∠ م حـ ا = ∠ م ء ب

١٣ - ا ب حـ △ ما انشيء على ا ب ، ب حـ خارج المثلث المربعان ا ب ء هـ ، ب حـ و س فاذا تقاطع حـ ء ، ا س في ح فأثبت ان :

(أ) الشكل ا ء ب ح رباعي دائري

(ب) ء حـ ⊥ ا س

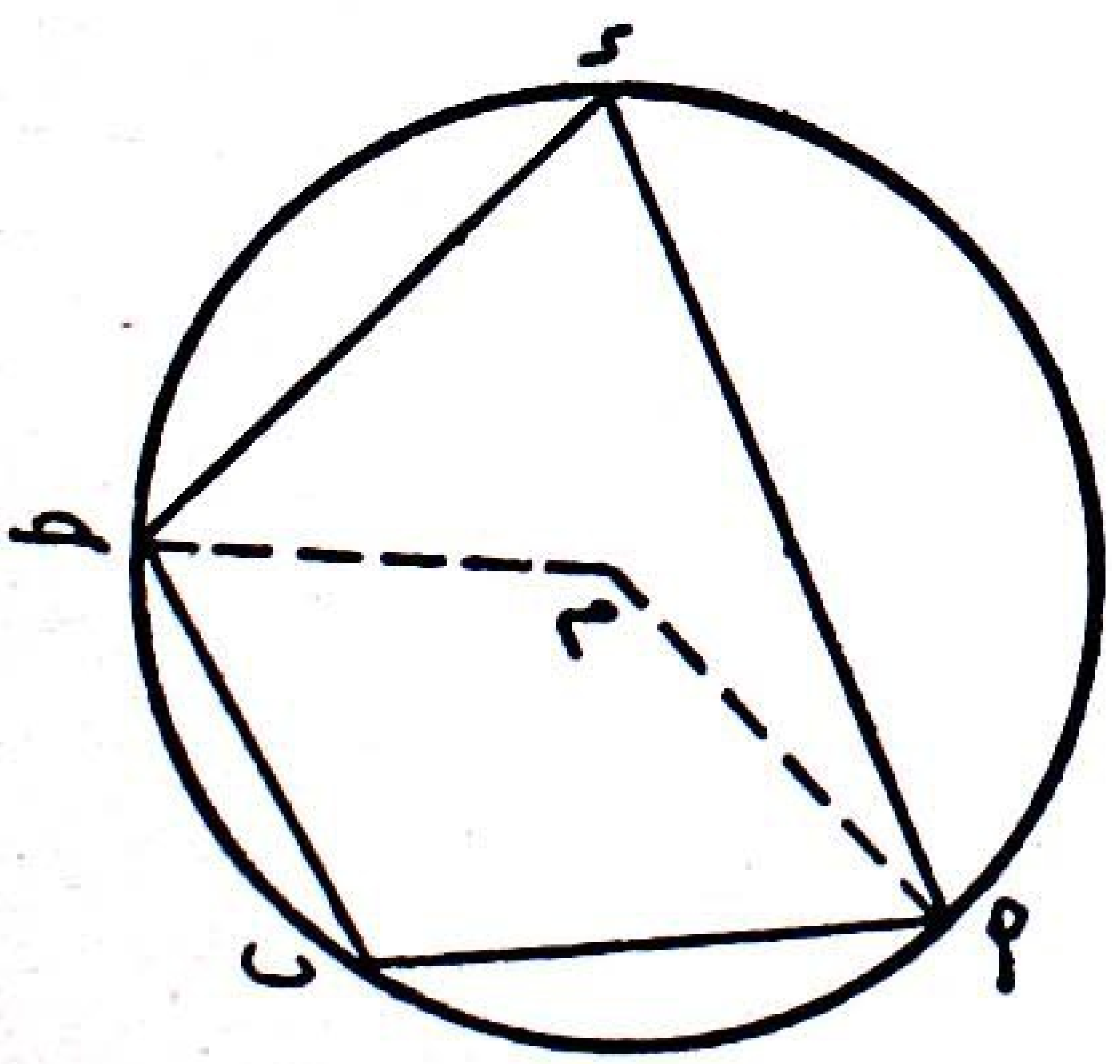
(حـ) ب ح ينصف ∠ ء ح س

١٤ - ا ب حـ ء شكل رباعي مرسوم داخـل دائرة رسم من ا مستقيم يوازي ب حـ ويقابل ب ء او امتـداده في ل . ثم رسم من ب مستقيم يوازي ا ء ويقابل ا حـ أو امتداده في م برهن أن :

أ : الشكل ا ب م ل رباعي دائري ، ب : حـ ء // م ل

نظرية (٩)

الزاويتان المتقابلتان في الشكل الرباعي الدائري متكاملتان



الشكل (١١٤)
نظرية

المعطيات : ا ب حـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة مركزها م

الشكل (١١٤)

المطلوب : اثبات ان :

١ : ∠ ب + ∠ ء = ٢ ق

٢ : ∠ ا + ∠ حـ = ٢ ق

العمل : نصل م ا ، م حـ

البرهان : ∠ ا م حـ = ضعف ا ء حـ

، $\angle$ ا م حـ (المنعكسة) = ضعف $\angle$ ا ب حـ نظرية

ولكن $\angle$ ا م حـ + $\angle$ ا م حـ (المنعكسة) = ٤ ق

∴ $\angle$ ا ى حـ + $\angle$ ا ب حـ = ٢ ق

وهو المطلوب اولا

وبالمثل يمكن اثبات ان :

$\angle$ ب ا ى + $\angle$ ب حـ ى = ٢ ق

وهو المطلوب ثانياً

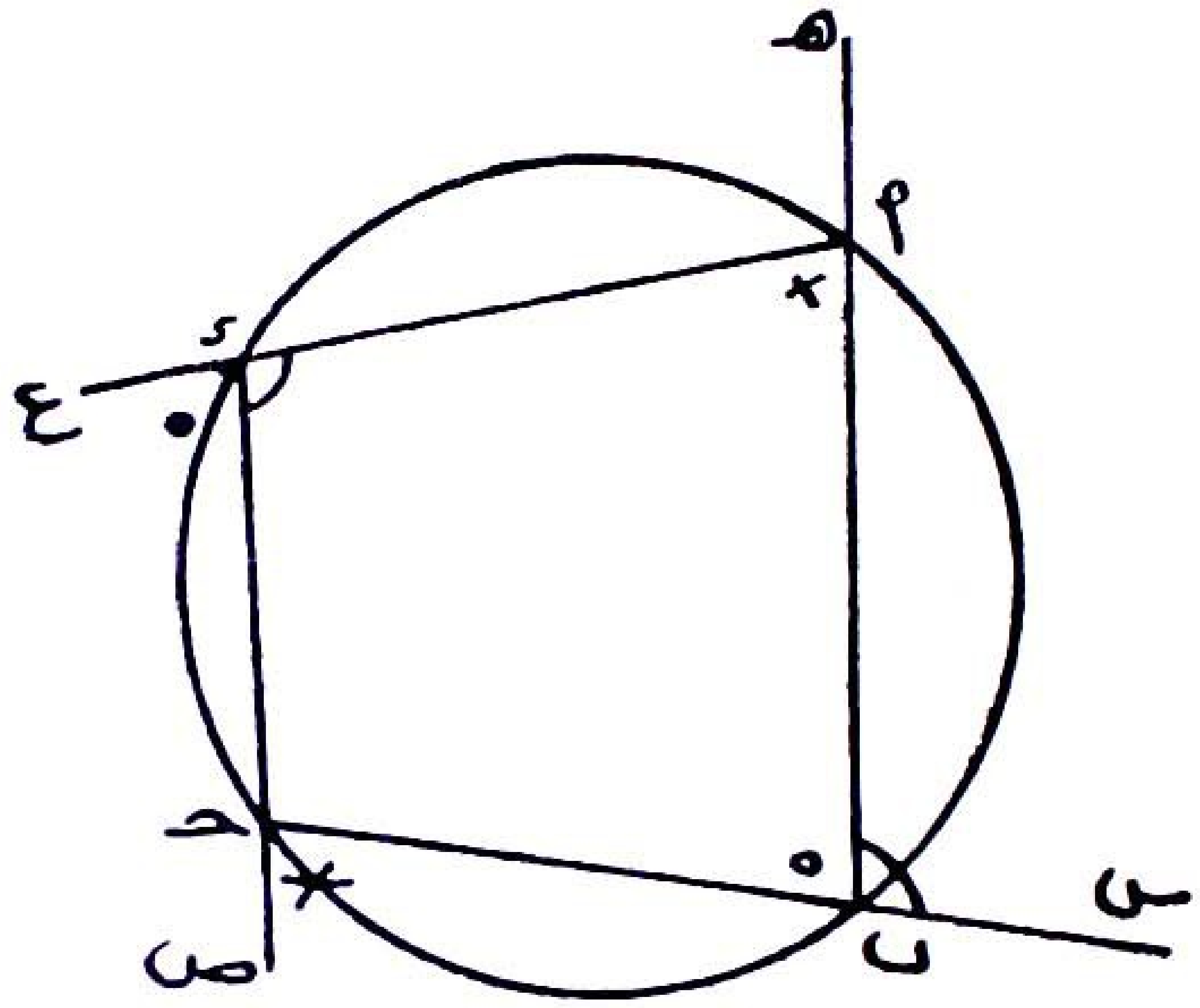
نتيجة هامة :

اذا مد أحد أضلاع الشكل الرباعي الدائري على استقامته كانت الزاوية الخارجة الحادثة = الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها

المعطيات: من رأس النتيجة الشكل (١١٥)

المطلوب : اثبات ان :

$\angle$ ا ب س الخارجة عن الشكل الرباعي الدائري ا ب حـ ى = $\angle$ ا ى حـ وبالمثل في باقي الزوايا



الشكل (١١٥)

البرهان : $\angle$ ا ى حـ تكمل $\angle$ ا ب حـ ، $\angle$ ا ب س تكمل $\angle$ ا ب حـ

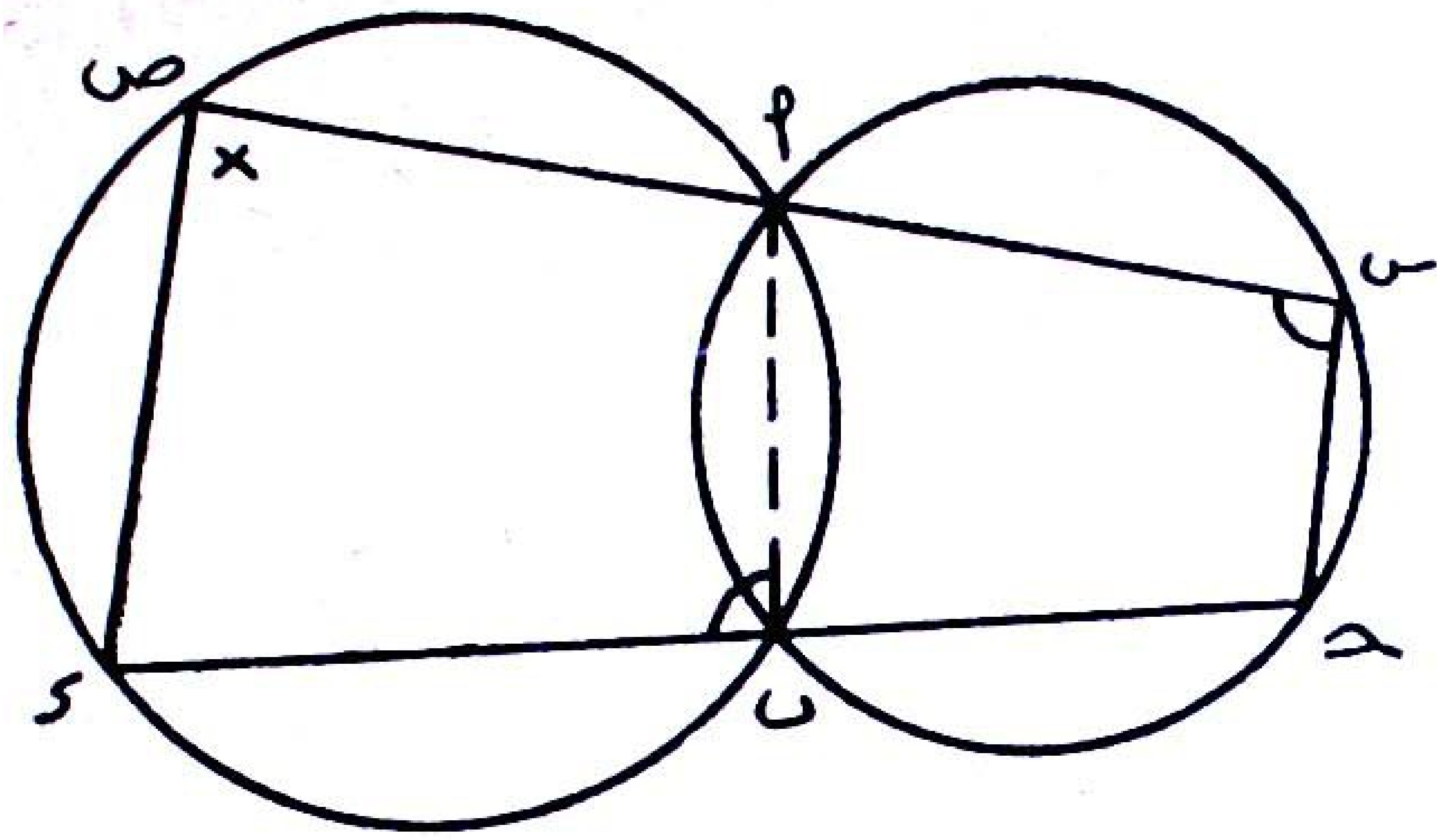
∴ $\angle$ ا ب س = $\angle$ ا ى حـ

وبالمثل $\angle$ ب حـ ص = $\angle$ ب ا ى وهكذا في باقي الزوايا .

تمرين محلول :

دائرتان متقاطعتان في ا ، ب رسم المستقيم س ا ص قاطعا احدى الدائرتين في س والثانية في ص ـ رسم حـ ب ى قاطعا الدائرة الاولى في حـ والثانية في ى .

برهن ان : س حـ // ص ى



الشكل (١١٦)

المعطيات : دائرتان متقاطعتان في ا ، ب ، س ا ص ، حـ ب ى مستقيمان يقطعان الدائرتين مارين بنقطتي تقاطعهما ا ، ب الشكل (١١٦) .

المطلوب : اثبات ان س حـ // ص ى

البرهـان : ∵ ∠ ا ب ى تكمل ∠ ص نظرية

، ∵ ∠ ا ب ى = ∠ س «

∴ ∠ س تكمل ∠ ص ∴ س حـ // ص ى

وهو المطلوب

تمرين (٢٠)

١ ـ في الشكل (١١٧)

حـ ا ى ، حـ ب هـ مستقيمان

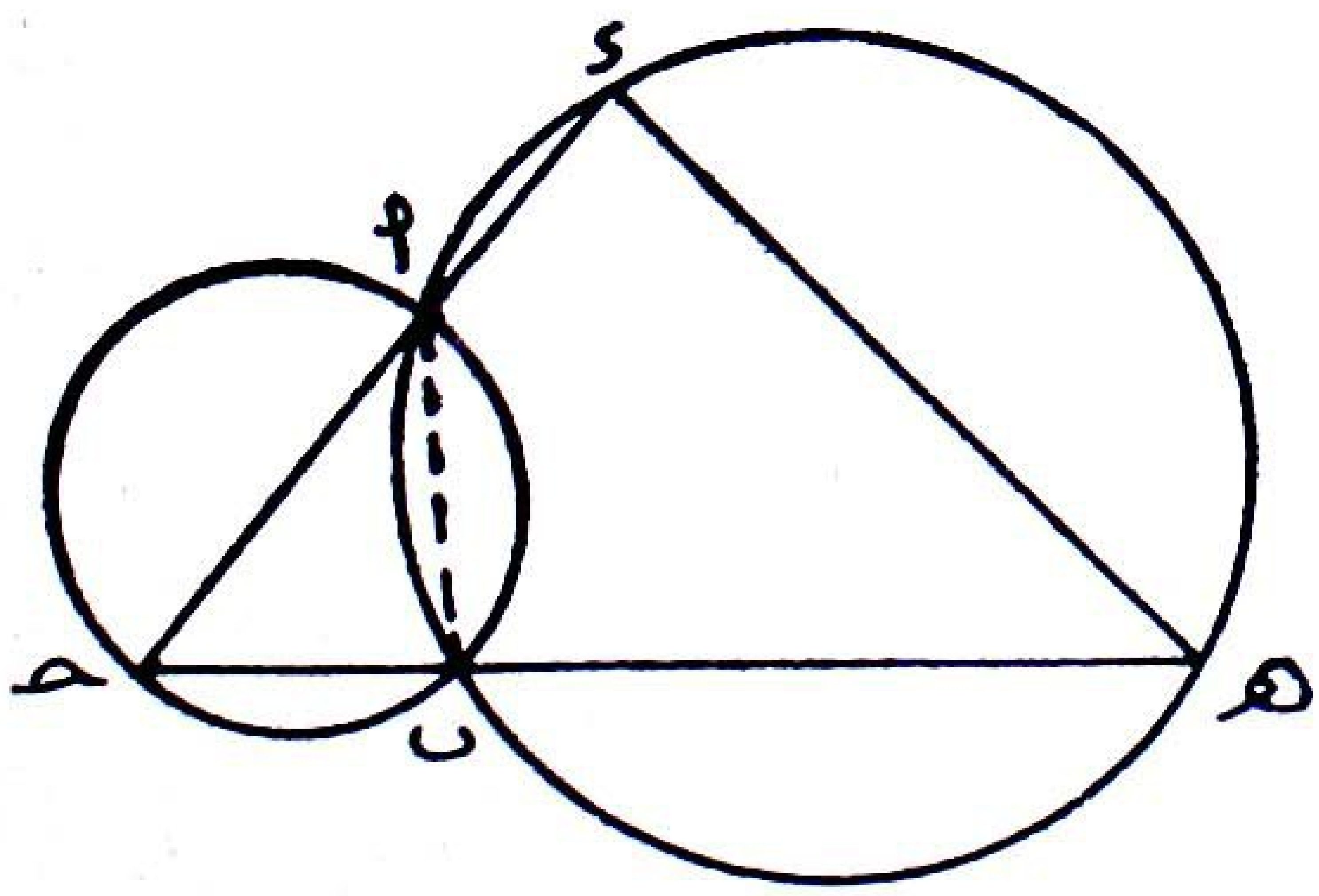
، ا حـ قطر الدائرة

ا ب حـ . اثبت ان

∠ حـ ى هـ قائمـة

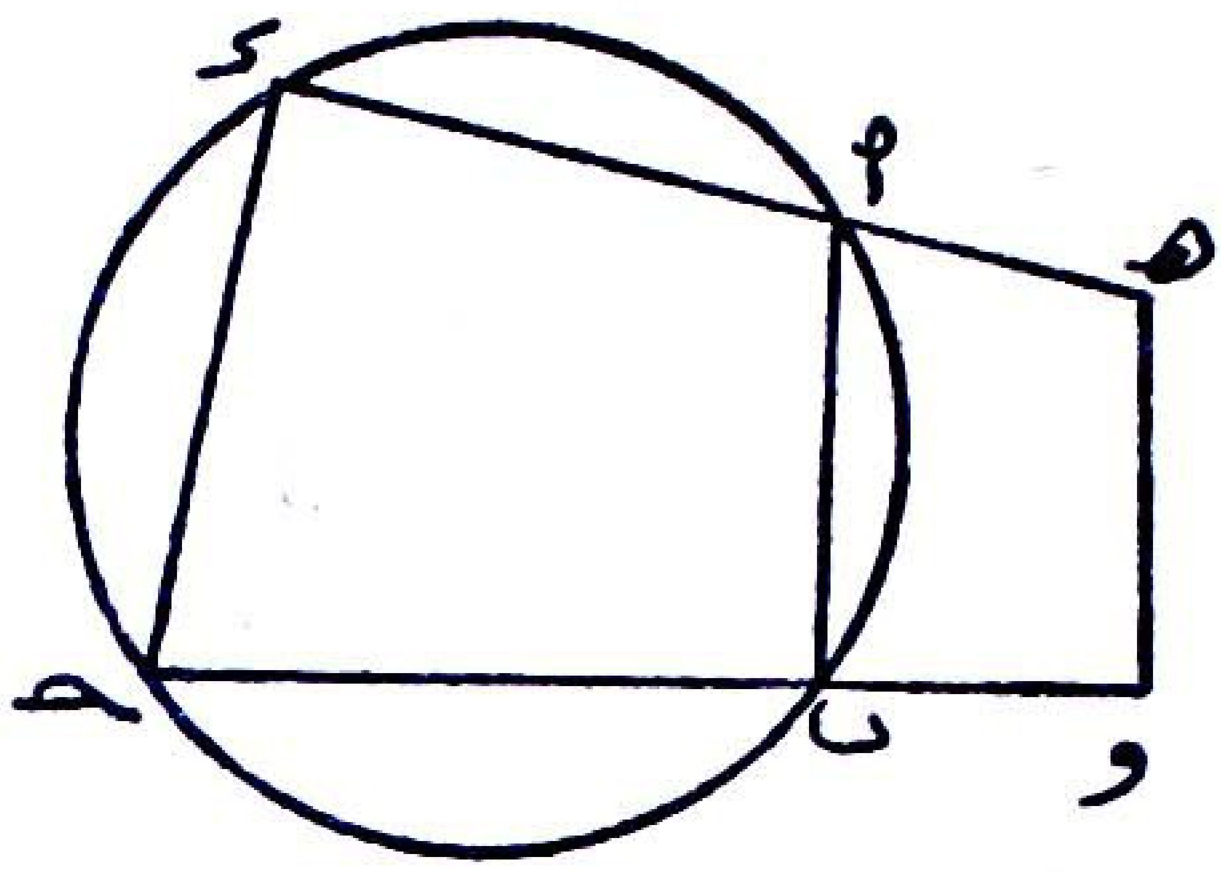
(صل ا ب)

٢ ـ ا ب حـ ى شبه



الشكل (١١٧)

منحرف مرسوم داخل دائرة قاعدتاه ا ى ، ب حـ اثبت ان ا ب = ى حـ



الشكل (١١٨)

٣ - برهن ان كل متوازي اضلاع مرسوم داخل دائرة يكون مستطيلا وان قطريه يكونان قطرين للدائرة .

٤ - الشكل الرباعي ا ب حـ ى الشكل (١١٨) ، مرسوم داخل دائرة . مد ى ا على استقامته الى هـ ، حـ ب على استقامته الى و . فاذا كان الشكل ى هـ و حـ رباعي دائري برهن ان : ا ب // هـ و

٥ - ا ب حـ △ متساوي الساقين فيه ا ب = ا حـ رسم ى هـ قاطعاً ا ب في ى ، ا حـ في هـ بحيث كان الشكل ى ب حـ هـ رباعياً دائرياً .
اثبت ان ى هـ // ب حـ

٦ - دائرتان متقاطعتان في س ، ص رسم القاطع المشترك ب ص حـ يقطع الدائرة الاولى في ب والثانية في حـ فرضت نقطتان مثل ى على محيط الدائرة الاولى ، هـ على محيط الدائرة الثانية . وصل ب ى ، حـ هـ فتلاقيا في ا
اثبت ان ∠ ا ى س + ∠ ا هـ س = ٢ ق

٧ - س ا ص ، حـ ا ى وتران مشتركان مرسومان في دائرتين متقاطعتين في ا ، ب فرضت النقطة م على محيط الدائرة الاولى وتقع بين س ، حـ ، النقطة د على محيط الدائرة الثانية بين ى ، ص .
اثبت ان ∠ س م حـ = ∠ ى د ص

٨ - دائرتان متقاطعتان في ا ، ب رسم س ا ص قاطعا احدى الدائرتين في س والاخرى في ص ورسم حـ ب ى قاطعا الدائرة الاولى في حـ . والاخرى في ى . برهن ان س حـ // ص ى .

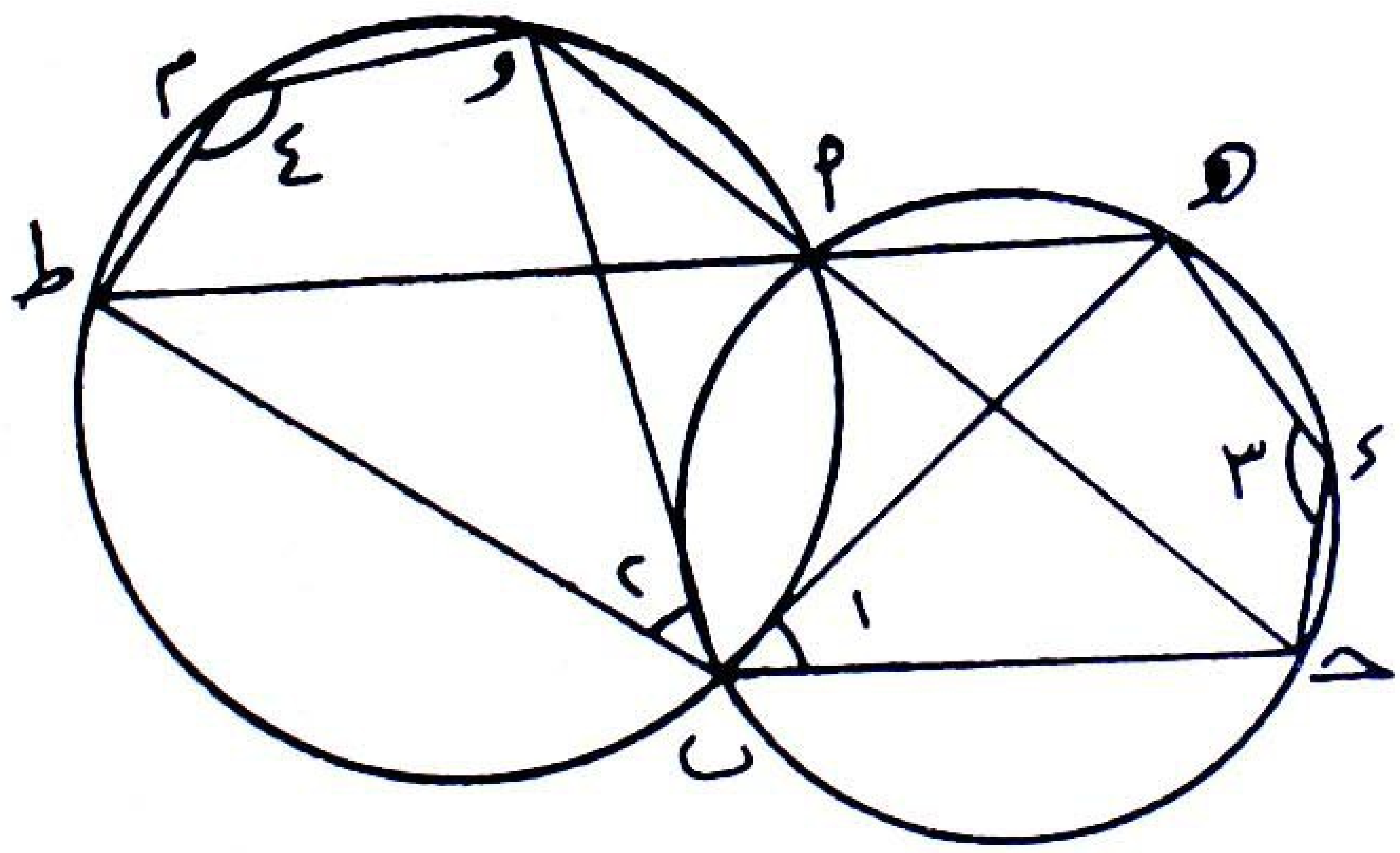
٩ – دائرتان متقاطعتان في ا ، ب – ى ا ط ، س ا ر مستقيمان ماران بالنقطة ا وقاطعان احدى الدائرتين في ى ، س والاخرى في ر ، ط برهن أن زوايا △ ى ب ط = زوايا △ س ب ر . وان ∠ ى ب س = ∠ ط ب ر .

١٠ – ا ، ب ، حـ ثلاث نقط على محيط دائرة نصفت ∠ ا ب حـ بمستقيم قابل المحيط في ء . فرضت نقطة هـ على القوس ء حـ . وصل حـ هـ ومد الى و . برهن ان ء هـ ينصف ∠ ا هـ و

١١ – في الشكل (١١٩) كل من هـ ا ط ، حـ ا و مستقيم . اثبت ان :

(أ) : ∠ ١ = ∠ ٢

(ب) : ∠ ٣ = ∠ ٤

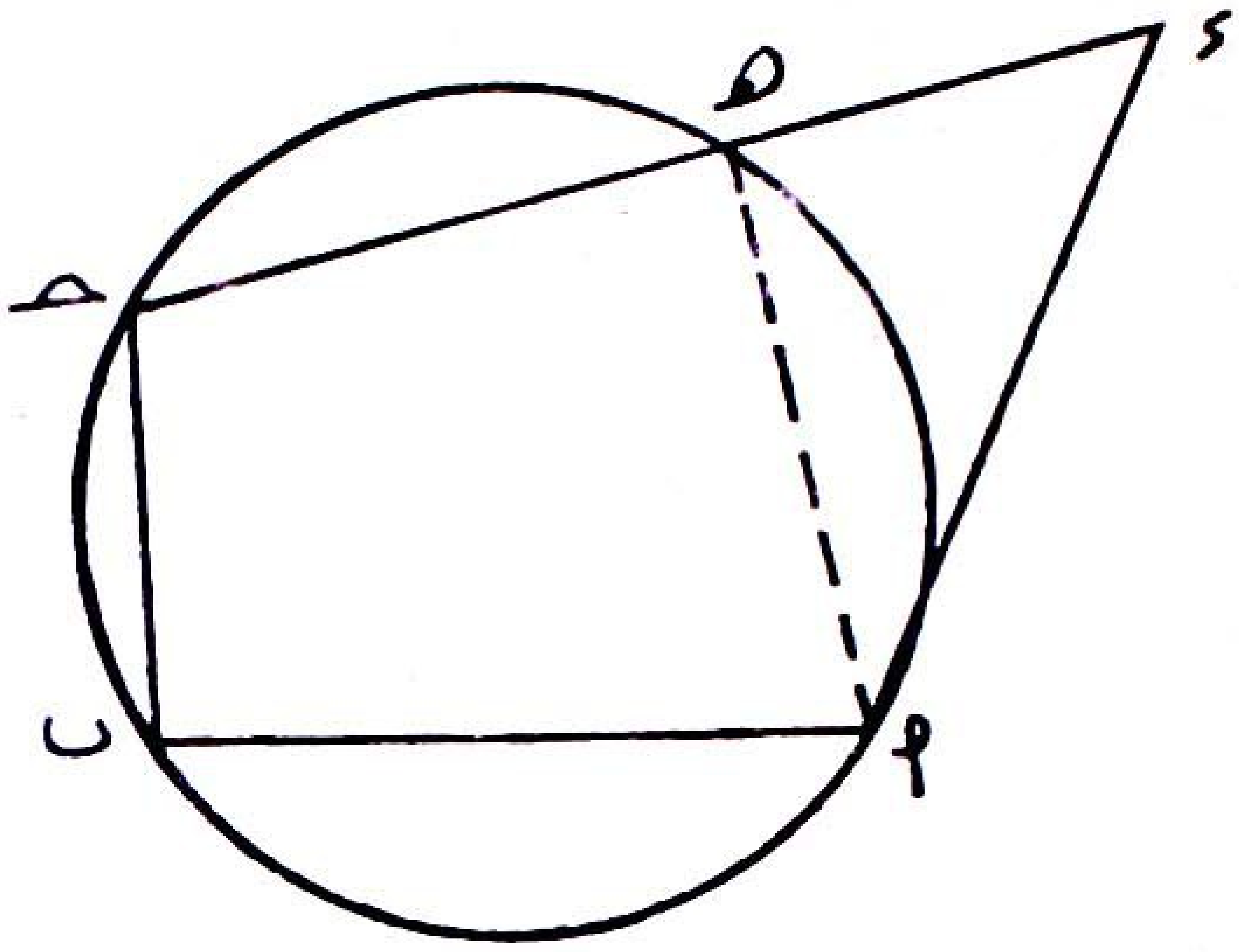


الشكل (١١٩)

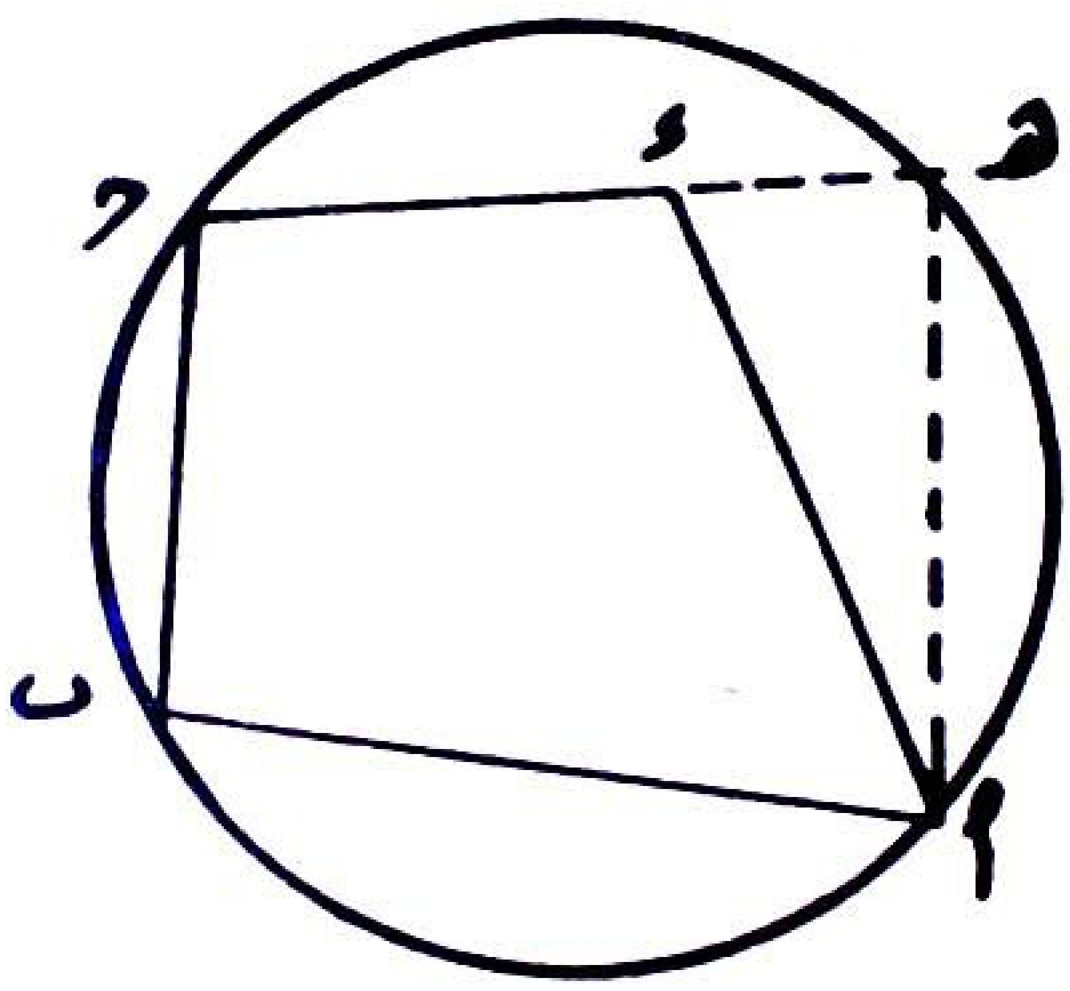
١٢ – ا ب حـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة مد ب ا ، حـ ء فتقاطعا في هـ اثبت ان △ △ هـ ا ء ، هـ حـ ب متساويان في الزوايا

نظرية (١٠)

اذا كانت الزاويتان المتقابلتان في الشكل الرباعي متكاملتين كان الشكل دائريا



الشكل (١٢٠)



المعطيات : ا ب ح د شكل رباعي فيه ∠ د + ∠ ب = ٢ ق الشكل (١٢٠) ، (١٢١)

المطلوب : اثبات ان النقط ا ، ب ، ح ، د يمر بها محيط دائرة واحدة .

الشكل (١٢١)

العمل والبرهان :

ا ، ب ، ح ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة فانه يمكن ان يمر بها محيط دائرة واحدة فاذا مر بالنقطة د ثبت المطلوب واذا لم يمر بها فانه يقطع ح د او امتداده في ه نصل ه ا

∴ ∠ ا ه ح + ∠ ب = ٢ ق نظرية

ولكن ∠ د + ∠ ب = ٢ ق فرضا

∴ ∠ د = ∠ ا ه ح وهذا لا يمكن الا اذا انطبقت النقطة ه على النقطة د

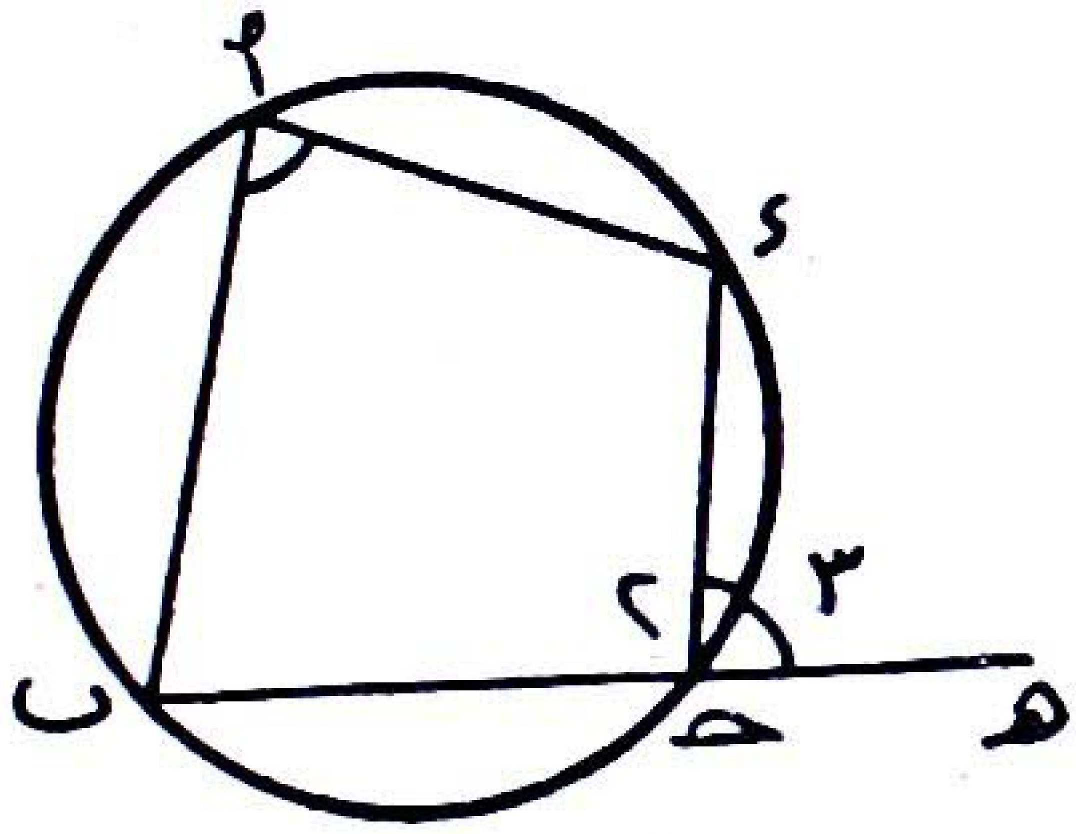
∴ محيط الدائرة الذي يمر بالنقط ا ، ب ، حـ يمر بالنقطة ء

∴ الشكل ا ب حـ ء رباعي دائري

وهو المطلوب

نتيجـــة :

اذا مد احد اضلاع الشكل الرباعي على استقامته وكانت الزاوية الخارجـــة الحادثة مساوية للزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها كان الشكل الرباعي دائرياً



الشكل (١٢٢)

لأن ∠ ٢ + ∠ ٣ = ٢ ق

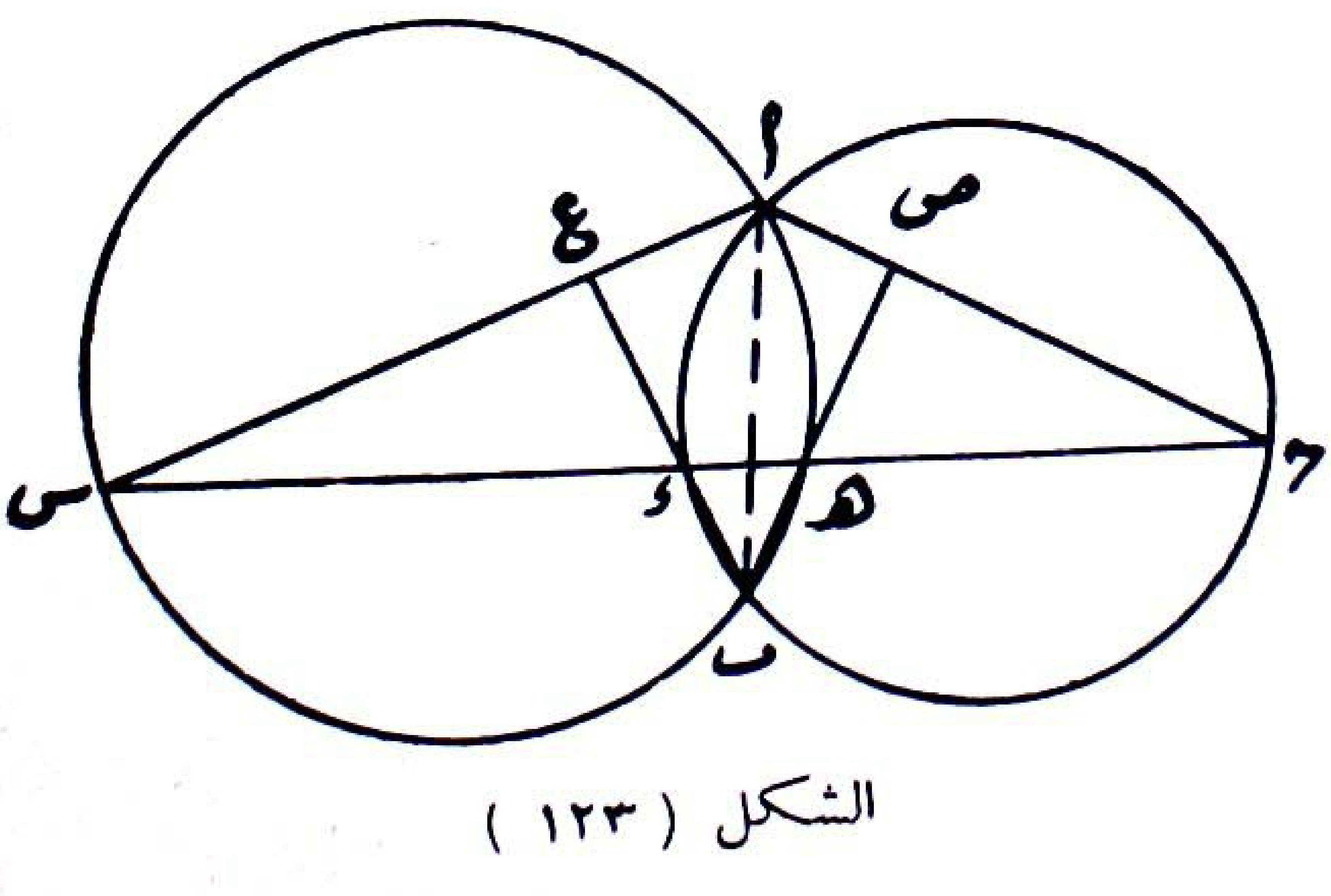
، ∵ ∠ ٣ = ∠ ١ = فرضا

∴ ∠ ١ + ∠ ٢ = ٢ ق

∴ الشكل ا ب حـ ء رباعي دائري

تمرين محلول (١) :

دائرتان متقاطعتان في ا ، ب رسم القاطـــع حـ هـ ء س بحيث يقطع احدى الدائرتين في حـ ، ء والاخرى في هـ ، س ثم وصل ب هـ ومد حتى لاقى ا حـ في ص . وصل ب ء ومد حتى لاقى ا س في ع . اثبت ان الشكل ا ص ب ع رباعي دائري



الشكل (١٢٣)

المعطيات : ا ، ب نقطتا تقاطع الدائرتين ، حـ هـ ء س قاطع للدائرتين ، ص ملتقى امتداد ب هـ مع ا حـ ، ع ملتقى ا س مع امتداد ب ء الشكل (١٢٣) .

المطلوب : اثبات ان الشكل ا ص ب ع رباعي دائري

العمل : نصل الوتر المشترك ا ب

البرهان : ∠ ا ب ء = ∠ ا حـ ء لانهما مشتركتان في القوس ا ء

∠ ا ب هـ = ∠ ا س هـ لانهما مشتركتان في القوس ا هـ

ولكن ∠ ا حـ س + ∠ ا س حـ + حـ ا س = ٢ ق

∴ ∠ ع ب ا + ∠ ا ب ص + ص ا ع = ٢ ق

∴ ∠ ص ب ع + ∠ ص ا ع = ٢ ق

∴ الشكل ا ص ب ع رباعي دائري

وهو المطلوب

تمرين محلول (٢) :

ا ب قطر في الدائرة ، ب حـ وتر فيها مد ب حـ على استقامته من جهة حـ الى نقطة ما مثل هـ ثم أسقط من هـ عمود على امتداد ب ا قابله في س ثم وصل س حـ ومد على استقامته فقابل محيط الدائرة في ص

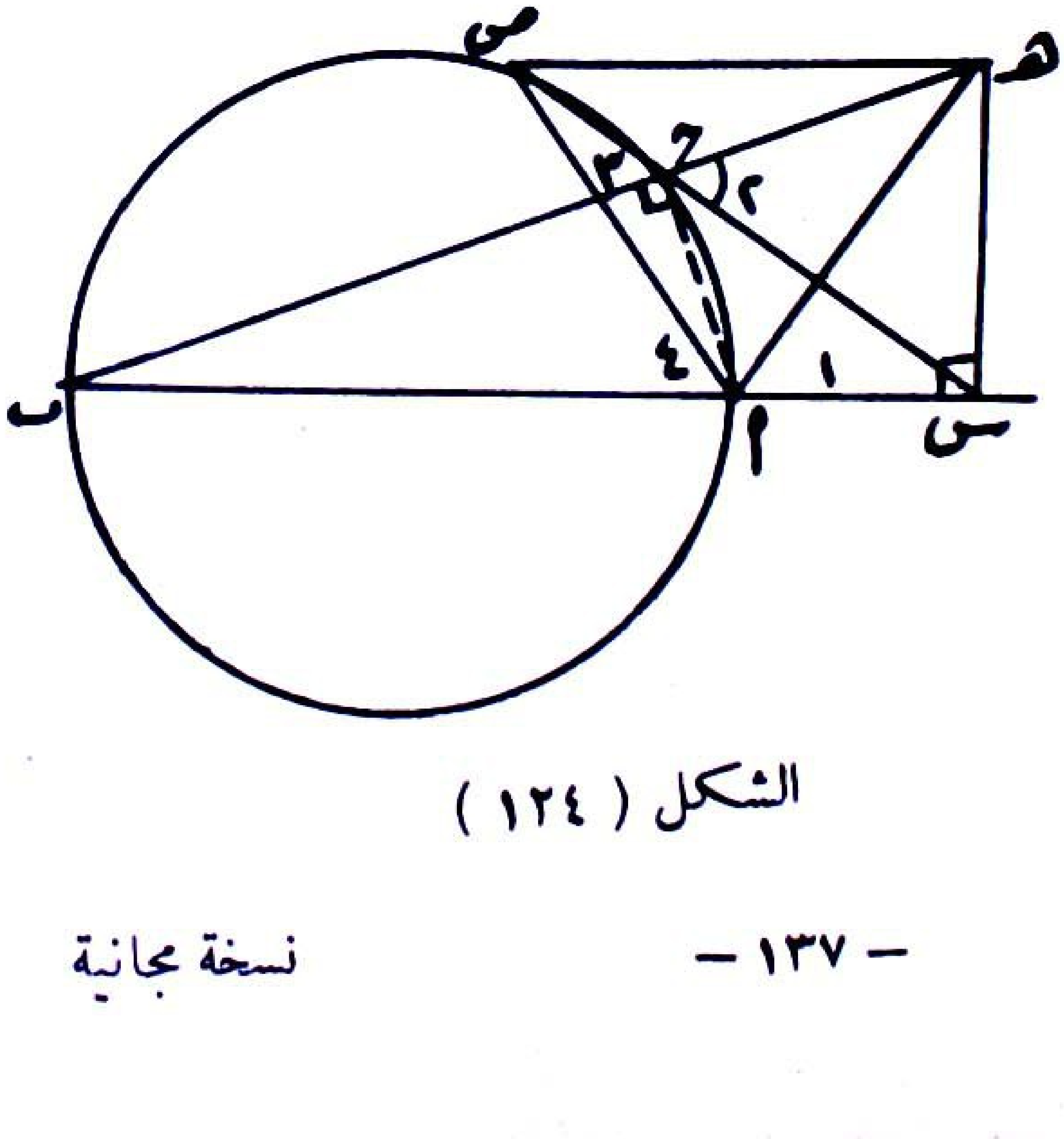
اثبت ان ∠ س ا هـ = ∠ ب ا ص

المعطيات : ب ا قطر في الدائرة ، ب حـ هـ مستقيم

هـ س ⊥ امتداد ب ا

الشكل (١٢٤) .

المطلوب : اثبات ان ∠ ١ = ∠ ٤



الشكل (١٢٤)

البرهان : ∵ ا ب قطر ∴ ∠ ا حـ ب = ٯ

∵ الشكل هـ س ا حـ فيه ∠ هـ س ا = ∠ هـ حـ ا = ٯ

∴ ∠ هـ س ا + ∠ هـ حـ ا = ٢ ٯ ∴ الشكل رباعي دائري

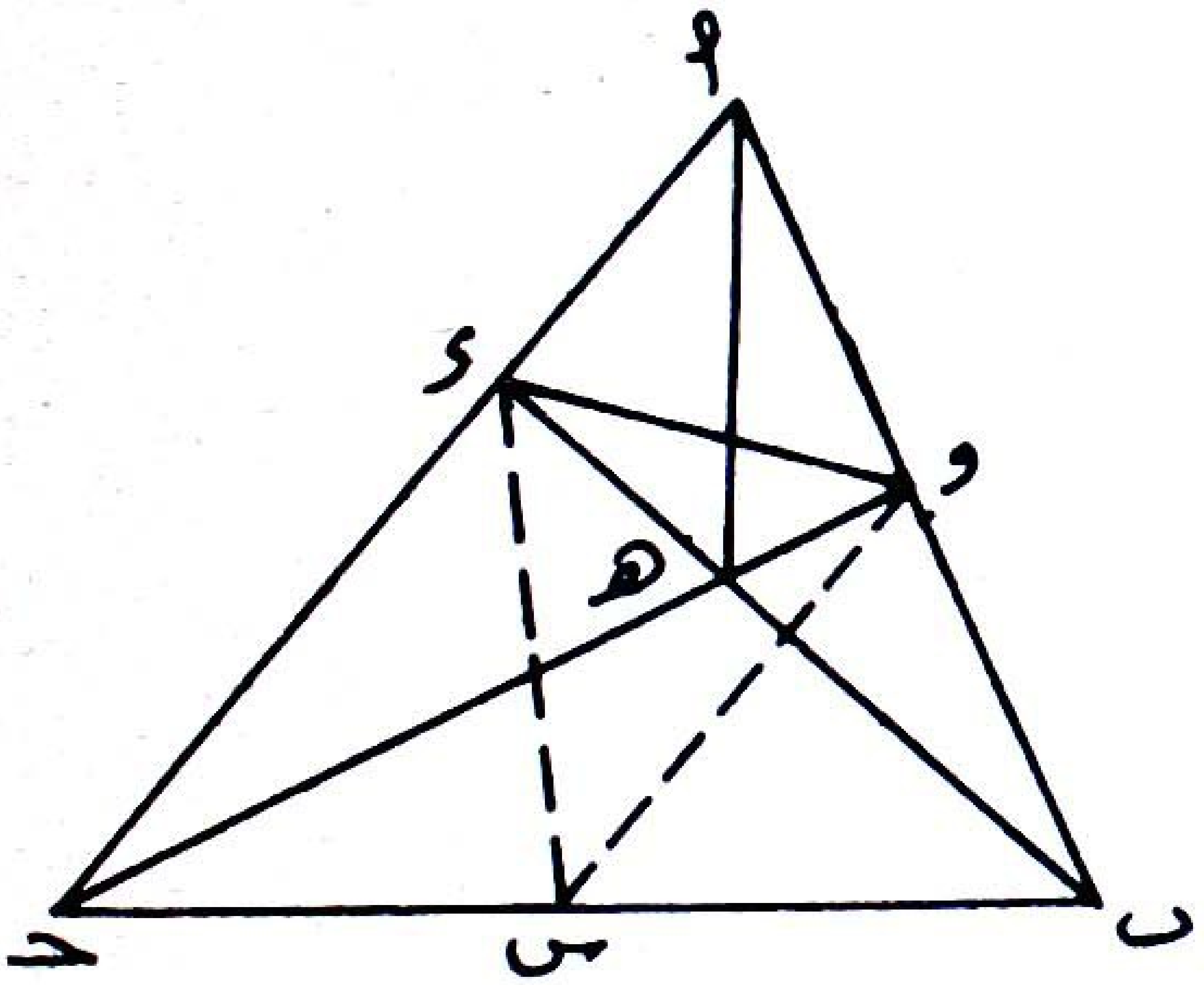
∴ ∠ ١ = ∠ ٢ ، ∠ ٢ = ∠ ٣ ، ∠ ٣ = ∠ ٤

∴ ∠ ١ = ∠ ٤

وهو المطلوب

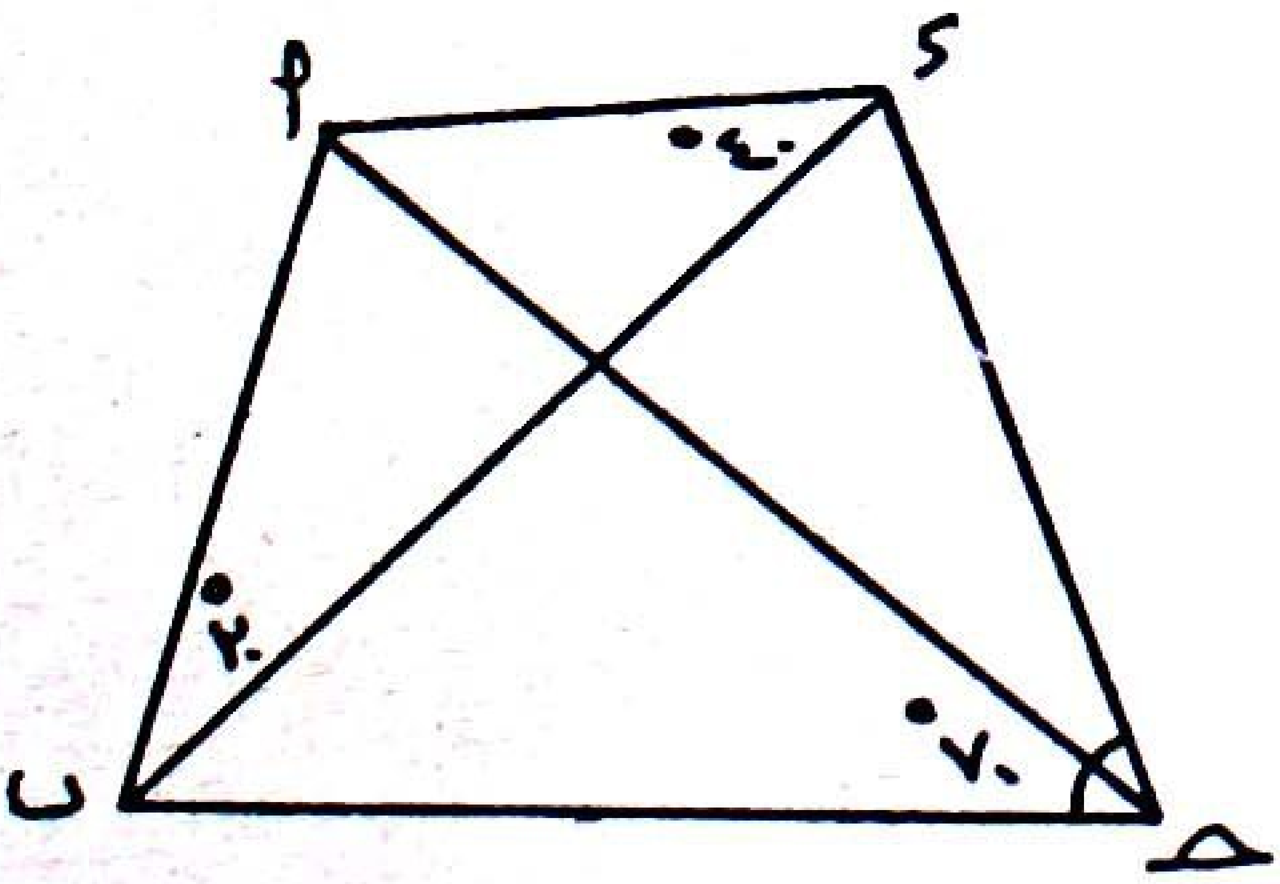
تمرين (٢١)

١ – في الشكل (١٢٥)
ب ى ⊥ ا حـ ،
حـ و ⊥ ا ب ،
ب س = حـ س
اثبت ان :
(١) ∠ ا هـ ى = ∠ ا و ى = ∠ ا حـ ب
(٢) ∠ هـ ا ى = ∠ ى ب حـ
(٣) △ س و ى متساوي الساقين .



الشكل (١٢٥)

٢ – في الشكل (١٢٦)
احسب من الشكل قيمة ∠ ا حـ ب بالدرجات

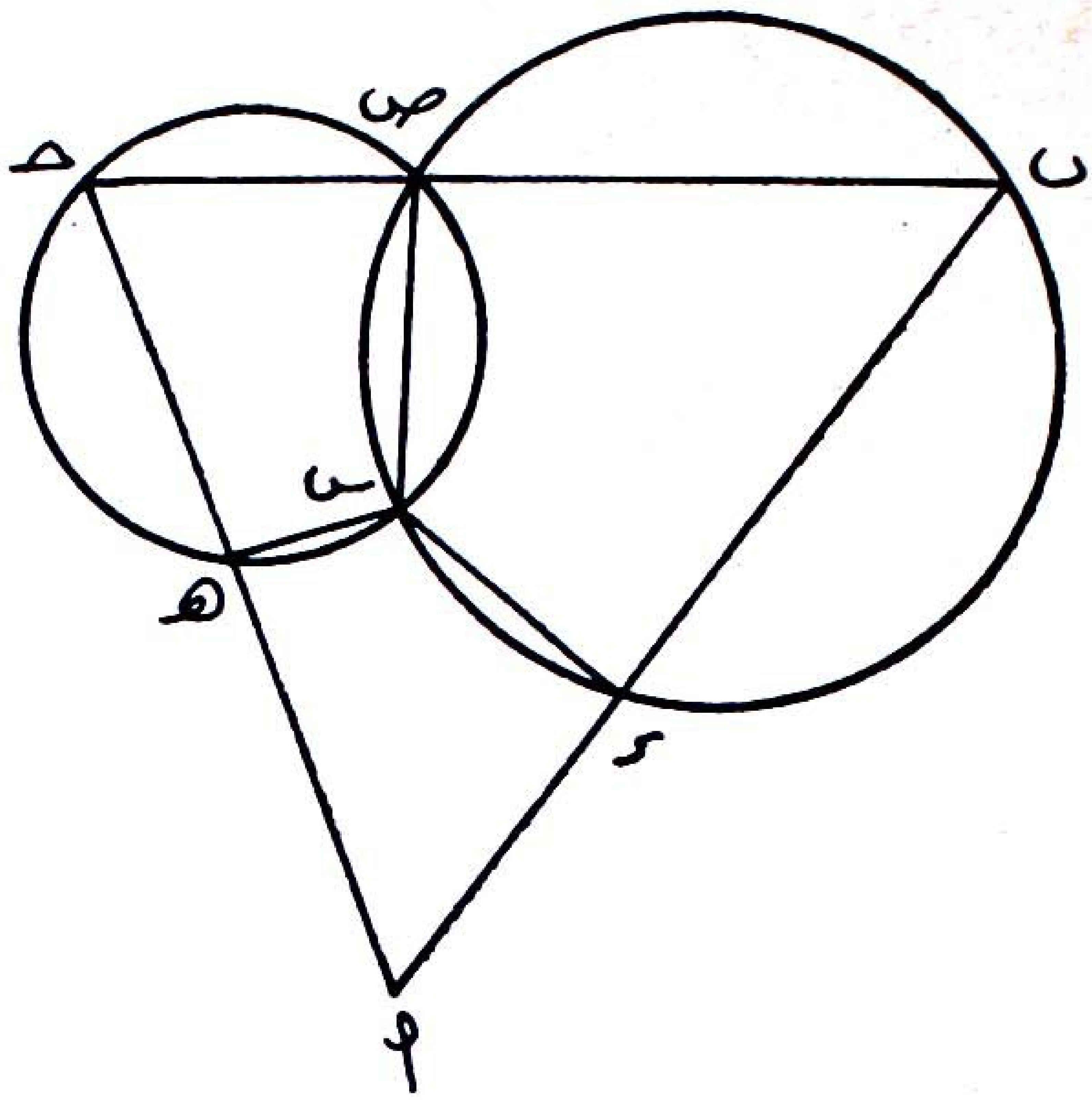


الشكل (١٢٦)

٣ – في الشكل (١٢٧)
ى نقطة على ا ب ، هـ نقطة على ا حـ ، ص نقطة على ب حـ تقاطعت الدائرتان ى ب ص ، هـ حـ ص . اثبت

ان الشكل
ا ى س هـ رباعي
دائري (صل
س ص)

٤ – ا ب حـ ى شكل
رباعي مرسوم
داخل دائرة مد
ى ا الى س ثم
رسم س ص //
ا ب ويقابل
امتداد حـ ب في
ص برهن ان
س ص حـ ى شكل رباعي دائري



الشكل (١٢٧)

٥ – ا ب حـ △ نصف اضلاعه ا ب ، ب حـ ، حـ ا في ع ، س ، ص على الترتيب وانزل ا ى ⊥ ب حـ برهن ان النقط ى ، س ، ص ، ع يمر بها محيط دائرة

٦ – ا ب حـ △ متساوي الساقين فيه ا ب = ا حـ مرسوم داخل دائرة . اخذت نقطة س على القوس الاصغر ا حـ انزل حـ ص ⊥ امتداد ا س ثم مد ب س حتى لاقى امتداد حـ ص في ع برهن ان س ع = س حـ

٧ – دائرتان متقاطعتان في س ، ص رسم القاطع ب ص حـ يقطع احدى الدائرتين في ب . والاخرى في حـ . فرضت النقطه ى على محيط الدائرة الاولى والنقطة ع على محيط الدائرة الاخرى مد ب ى ، حـ ع فتلاقيا في ا برهن ان النقط ا ، ى ، س ، ع يمر بها محيط دائرة

٨ – ا ب حـ △ مرسوم داخل دائرة اسقط من ا العمود ا ى على ب حـ فقابله

في ى فاذا مد ا ى على استقامته حتى قابل محيط الدائرة في هـ ثم اخذت نقطة ص على ا ى بحيث كان ى ص = ى هـ فاذا وصل ب ص ثم مد على استقامته حتى قابل احـ في س اثبت ان الشكل س ص ى حـ رباعي دائري

٩ – ا ب حـ △ حاد الزوايا رسم من ا ، ب العمودان ا ى ، ب هـ على ب حـ ، ا حـ فتقابلا في م برهن ان ∠ حـ م ى = ∠ ا ب حـ

١٠ – ا ب حـ ى شكل رباعي دائري فيه ا ى قطر الدائرة انزل من ب العمود ب س فلاقى ا ى في س ، ا حـ في ص اثبت ان الشكل ص س ى حـ رباعي دائري.

١١ – ا ب حـ ى متوازي اضلاع رسمت دائرة تمر بنقطتي ا ، ى وتقطع ا ب ، حـ ى أو امتداديها في هـ ، و على الترتيب برهن ان النقط و ، حـ ، ب ، هـ محيطية

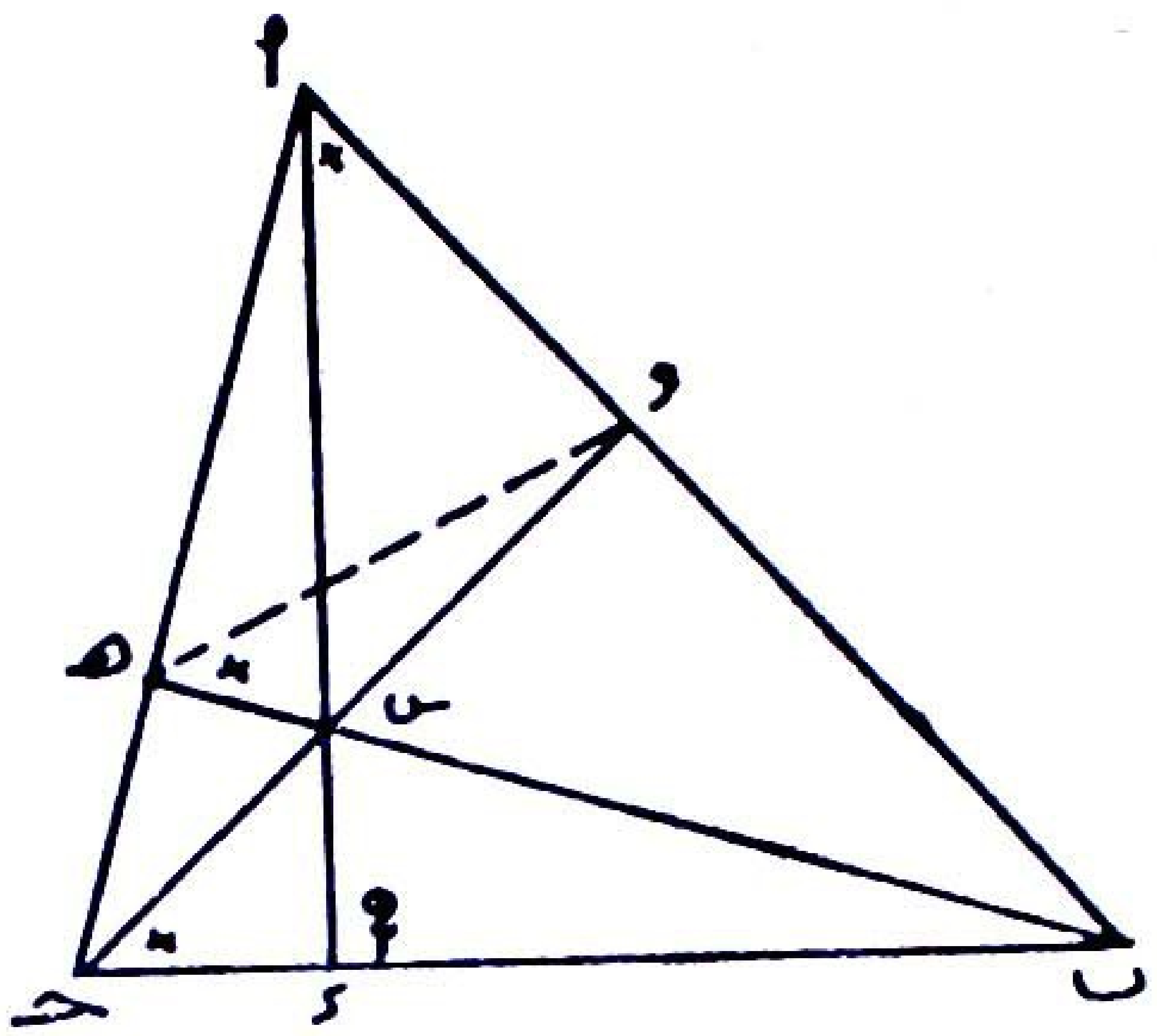
١٢ – ا ب حـ ى مستطيل رسم من حـ عمود على القطر ا حـ ومد هذا العمود من جهتيه فقابل امتداد ا ى في س ، امتداد ا ب في ص . اثبت ان النقط ب ، ص ، س ، ى على محيط دائرة

١٣ – م ، ن دائرتان متقطعتان في ا ، ب رسم الوتر ا حـ في الدائرة م . والوتر ا ى في الدائرة ن ثم وصل حـ ى فقطع الدائرة ن في هـ والدائرة م في و فإذا وصل ب هـ ومد حتى لاقى ا حـ في س ووصل ب و . ومد حتى لاقى ا ى في ص اثبت ان ∠ حـ س ب = ∠ ا ص ب

١٤ – اذا كان مجموع اي زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي = ٢ ق فاثبت الاعمدة المقامة على اضلاعه من منتصفاتها تتلاقى جميعاً في نقطة واحدة

تمرين مشهور

ارتفاعات المثلث الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة



الشكل (١٢٨)

المعطيات : ا ب حـ مثلث الشكل (١٢٨)

المطلوب : اثبات ان ارتفاعاته تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة

العمل : ننزل العمودين ب هـ على ا حـ ، حـ و على ا ب فيتقاطعان في س . نصل ا س ثم نمده على استقامته حتى يقابل ب حـ في ى . يكفي ان نثبت ان ا ى ⊥ ب حـ لذلك نصل هـ و

البرهان : ∵ ∠ س و ا + ∠ س هـ ا = ٢ ق   لأن كلا منهما قائمة

∴ الشكل ا و س هـ رباعي دائري   نظرية

∴ ∠ و هـ س = ∠ و ا س   (محيطيتان على قوس واحد)

، ∵ ∠ ب و حـ = ∠ ب هـ حـ = ق

∴ الشكل و ب حـ هـ   رباعي دائري نظرية

∴ ∠ و هـ ب = ∠ و حـ ب   محيطيتان على قوس واحد

ولكن ∠ و هـ ب = ∠ و ا س   اثباتاً

∠ و حـ ب = ∠ و ا س

اي ان ∠ وحى = ∠ وا ى وهما مرسومتان في جهة واحدة من و ى

∴ الشكل ا و ى حـ   رباعي دائري

∴ $\angle$ ا ى حـ = $\angle$ ا و حـ

ولكن $\angle$ ا و حـ = ق

∴ $\angle$ ا ى حـ = ق

اي ان ا ى عمودي على ب حـ

∴ ارتفاعات المثلث ا ب حـ تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة

وهو المطلوب

ملاحظة :

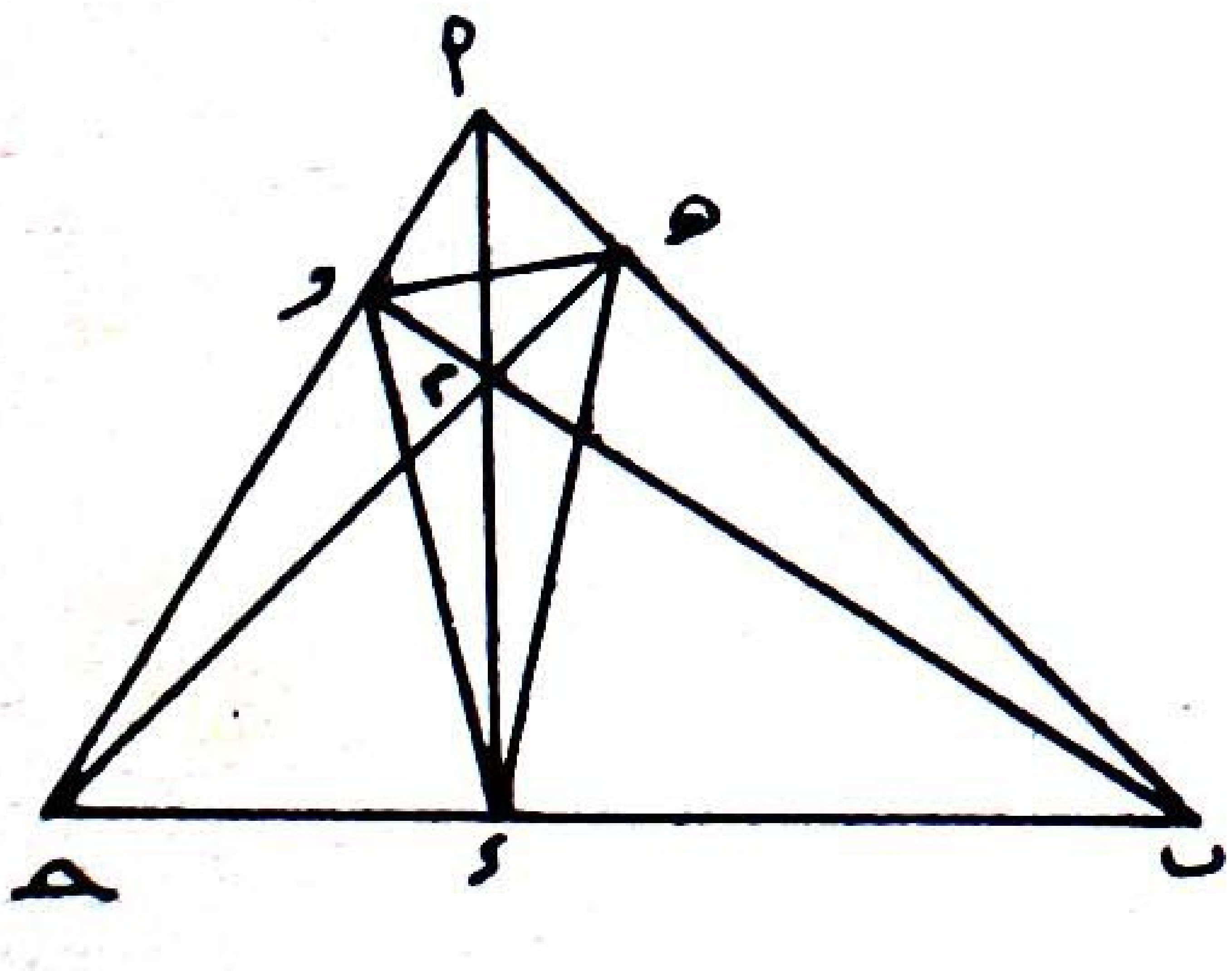
في الشكل السابق يسمى $\triangle$ و هـ ى مثلث المواقـع وهو المثلث الذي رؤوسه هي مواقع الاعمدة النازلة من رؤوس المثلث على الاضلاع المقابلة لها (انظر مثلث المواقع هـ ى و الشكل (١٢٩)

تمرين محلول (١)

اثبت ان ارتفاعات المثلث تنصف زوايا مثلث المواقع

المعطيات : ا ب حـ $\triangle$
الارتفاعات ا ى ، حـ هـ ، ب و تقاطعت في م .
وصل هـ ى ، ى و ، و هـ
الشكل (١٢٩)

المطلوب : اثبات ان ا ى ، حـ هـ ، ب و تنصف زوايا $\triangle$ ى هـ و



الشكل (١٢٩)

البرهان : الشكل هـ ب ى م رباعي دائري (لأن $\angle$ ب هـ م + $\angle$ ب ى م = ٢ ق)

∴ $\angle$ هـ ب م = $\angle$ هـ ى م (١)

، الشكل م ى حـ و رباعي دائري (لأن . . .)

∴ ∠ م ى و = ∠ م حـ و (٢)

، الشكل هـ ب حـ و رباعي دائري (لأن . . .)

∴ ∠ هـ ب و = ∠ هـ حـ و (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج ان

∠ هـ ى م = ∠ و ى م

∴ ا ى ينصف ∠ هـ ى و

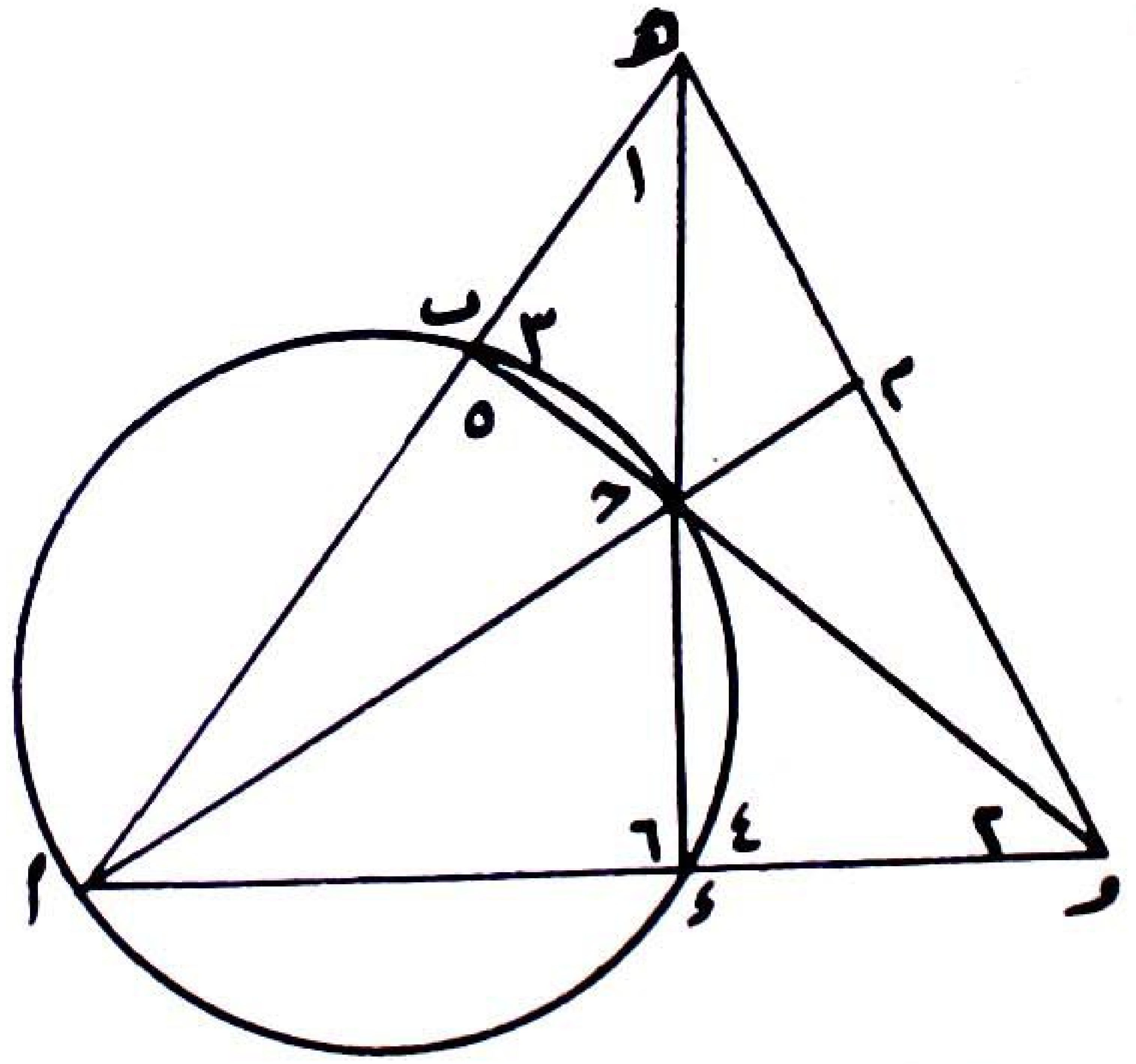
وبالمثل يكون حـ هـ منصفاً لزاوية ى هـ و

ويكون ب و منصفاً لزاوية ى و هـ

وهو المطلوب

تمرين محلول (٢)

ا ب حـ ى شكل رباعي مرسوم داخل دائرة مد ا ب ، ى حـ فتلاقيا في هـ مد ب حـ ، ا ى فتلاقيا في و فاذا كانت ∠ ا هـ ى = ∠ ب و ا فاثبت ان امتداد ا حـ عمود على هـ و



الشكل (١٣٠)

المعطيات : ا ب حـ ى شكل رباعي دائري هـ ملتقى ا ب ، ى حـ ــ و ملتقى امتداد ب حـ ، ا ى

∠ ١ = ∠ ٢

الشكل (١٣٠)

المطلوب : اثبات ان امتداد ا حـ ⊥ هـ و

البرهان :

∴ ∠ ١ = ∠ ٢

∴ الشكل هـ و ى ب رباعي دائري

∴ ∠ ٤ = ∠ ٣ ولكن ∠ ٤ خارجة عن الشكل الرباعي الدائري
ا ب حـ ى

∴ ∠ ٤ = ∠ ٥ ∴ ∠ ٣ = ∠ ٥ ∴ كل منهما = ن

∴ و ب ⊥ ا هـ وبالمثل هـ ى ⊥ ا و

∴ حـ نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث

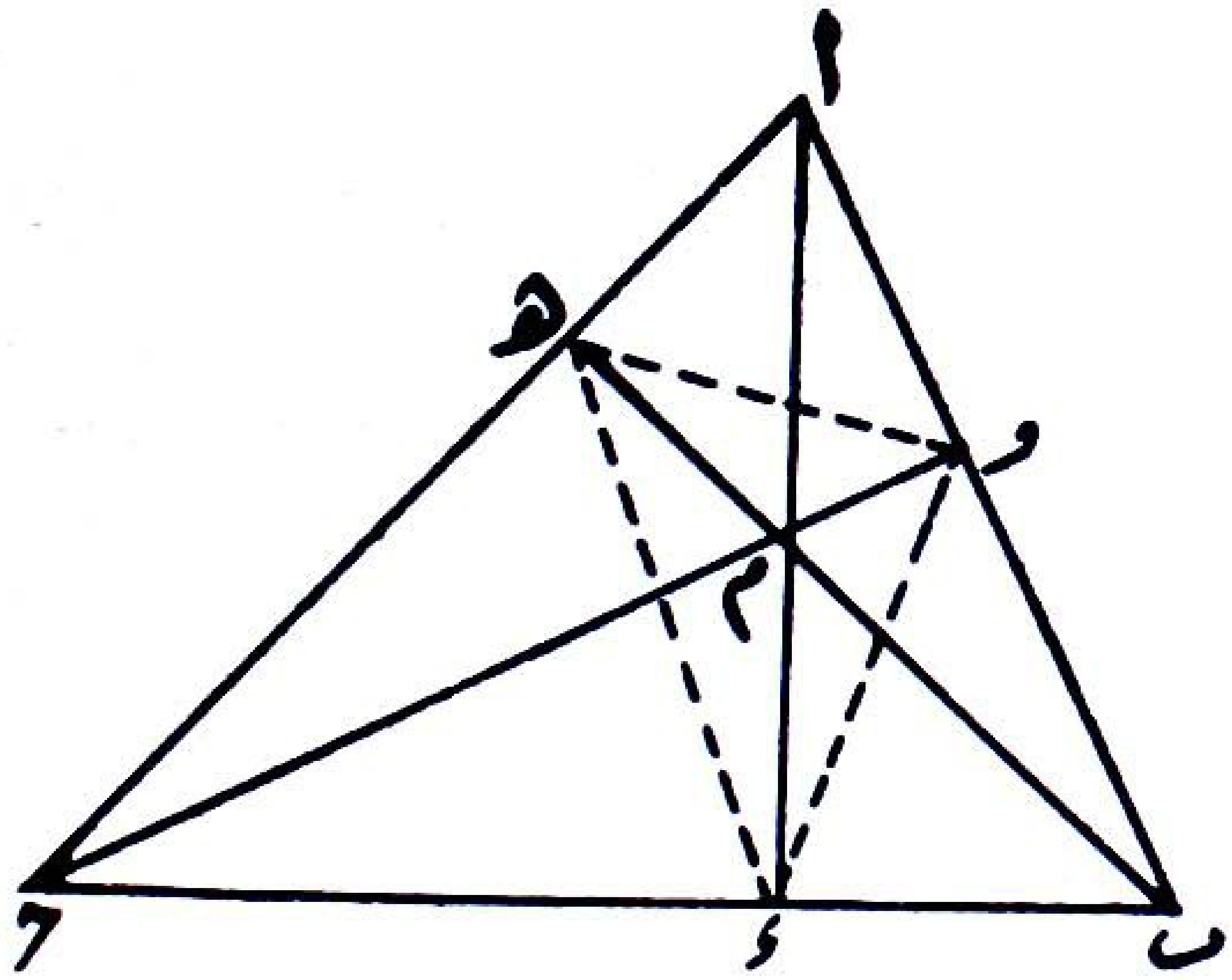
∴ امتداد ا حـ عمودي على هـ و

وهو المطلوب

تمرين (٢٢)

١ – في الشكل (١٣١) ا ب حـ مثلث فيه ا ى ، ب هـ ، حـ و ، اعمدة على اضلاعه ب حـ ، حـ ا ، ا ب على الترتيب والمطلوب اثبات ان :

١) ∠ ب م حـ تكمل ∠ ب ا حـ .



الشكل (١٣١)

٢) △△ ا ب حـ ، ا هـ و متساويان في الزوايا

٣) ∠ م ى و = ∠ م ى هـ = ٩٠° – ∠ ب ا حـ

٤) ارتفاعات المثلث منصفات زوايا مثلث المواقع

٢ – ا ب قطر في دائرة رسم فيها الوتران ا حـ ، ب ى في جهة واحدة من القطر ا ب فتقاطعا في هـ ثم مد ا ى ، ب حـ فتقاطعا في و برهن ان امتداد و هـ ⊥ ا ب

٣ – ا ب حـ ء متوازي اضلاع رسم من ا عمود على ا ب ثم رسم من حـ عمود على ب حـ فتلاقى العمودان في هـ اثبت ان امتداد هـ ء ⊥ ا حـ

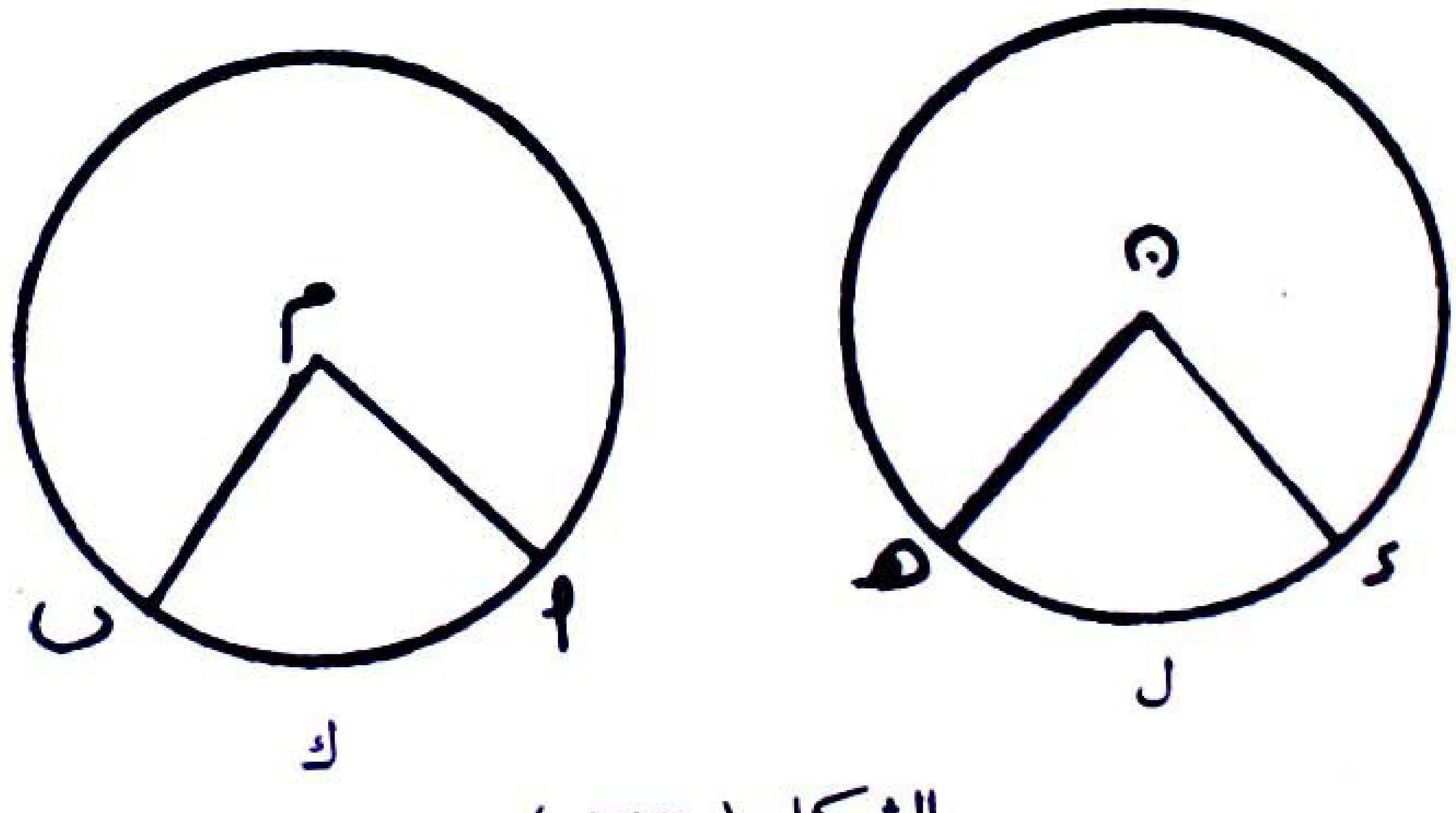
٤ – ا ب حـ مثلث رسم حـ هـ ⊥ ا ب ، ب و ⊥ ا حـ فتقاطع العمودان في م ثم وصل ا م ومد على استقامته فقطع ب حـ في ء ثم مد أيضاً الى س بحيث م ء = ء س . اثبت أن الشكل ا ب س حـ رباعي دائري

٥ – اهـ و ب نصف دائرة وصل ب هـ ، او فتقاطعا في س وصل ا هـ ، ب و حتى تلاقيا في حـ برهن ان امتداد حـ س ⊥ ا ب

٦ – ا ب حـ △ مرسوم داخل دائرة أنزل ا ء ، ب هـ عمودان على ب حـ ، ا حـ على الترتيب فتلاقيا في س فاذا مد ا ء حتى قابل محيط الدائرة في ص اثبت أن ء ص = ء س

نظرية (١١)

في الدوائر المتساوية او في نفس الدائرة اذا تساوت الزوايا المركزية تتساوى اقواسها



الشكل (١٣٢)

المعطيات اولا :(في الدوائر المتساوية)م ، ن دائرتان متساويتان ، ∠ ا م ب المركزية = ∠ ء ن هـ المركزية الشكل (١٣٢)

المطلوب : اثبات ان القوس أ ك ب = القوس ى ل هـ

البرهان : نتصور وضع الدائرة م على الدائرة د بحيث يقع المركز م على المركز د ويأخذ نصف القطر م أ اتجاه نصف القطر د ى

∵ م ا = د ى

∴ نقطة ا تقع على نقطة ى وينطبق المحيطان على بعضهما

∵ ∠ ا م ب = ∠ ى د هـ   فرضاً

∴ م ب يأخذ اتجاه د هـ   وحيث انهما متساويان

∴ نقطة ب تقع على نقطة هـ

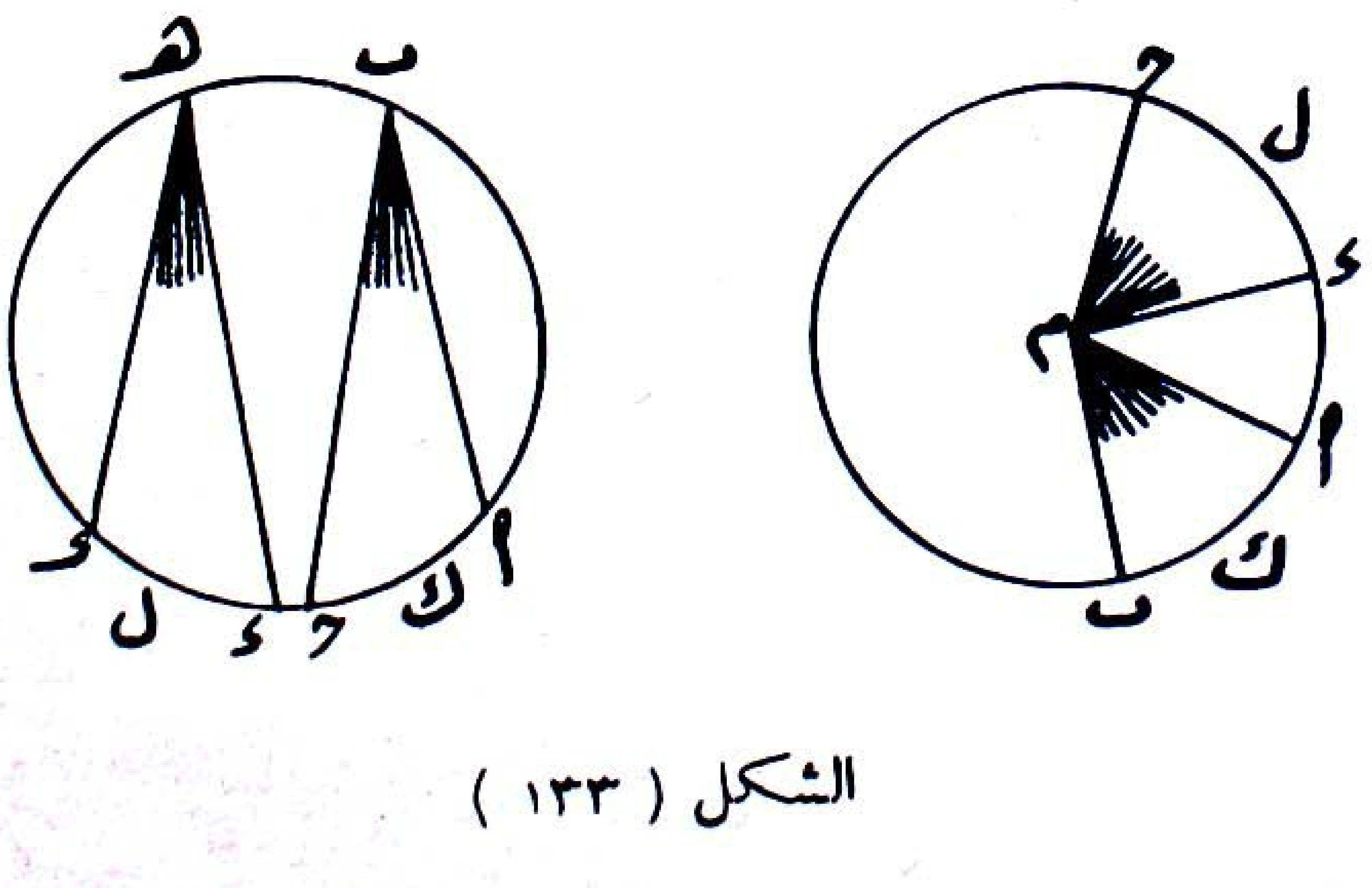
القوس ا ك ب ينطبق على القوس ى ل هـ

أي أن القوس ا ك ب = القوس ى ل هـ

وهو المطلوب

نتيجة : في الدوائر المتساوية أو في نفس الدائرة اذا تساوت الزوايا المحيطية تساوت أقواسها .

ثانياً :(في الدائرة الواحدة)نفس البرهان السابق بتصور تطبيق ∠ ا م ب على مساويتها ∠ حـ م ى



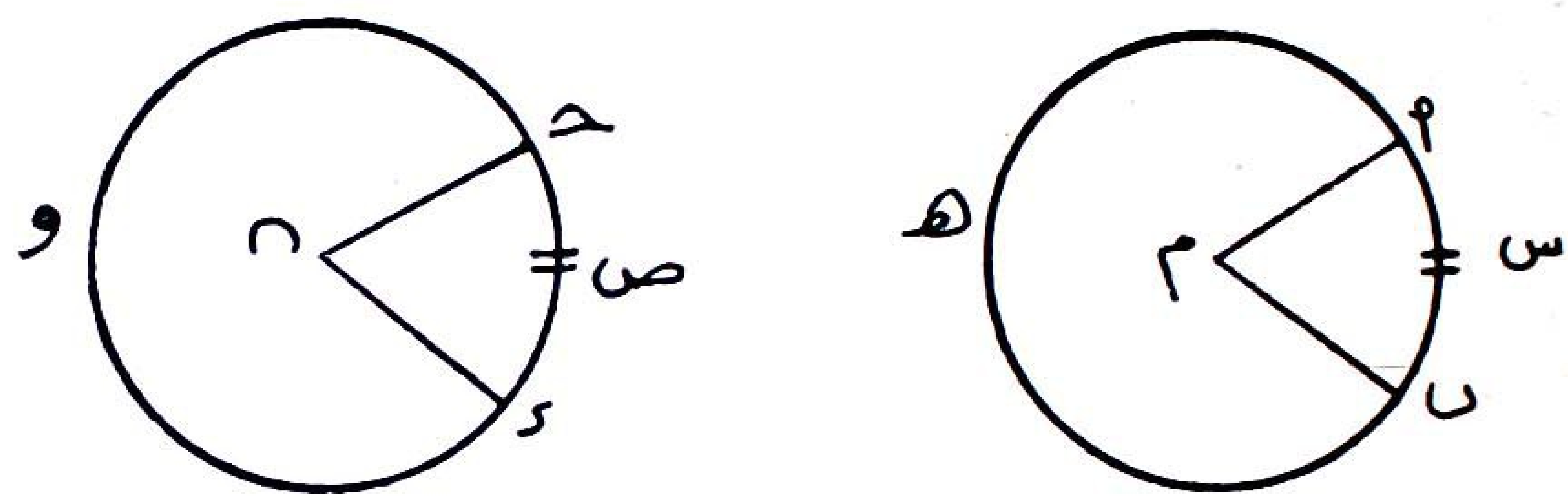
الشكل (١٣٣)

اذا كانت $\measuredangle$ ا م ب المركزية = $\measuredangle$ حـ م ء المركزية الشكل (١٣٣)
ينتج أن القوس ا ك حـ = القوس حـ ل ء

وكذلك اذا كانت الزاوية المحيطية ا ب حـ = الزاوية المحيطية ء هـ و
ينتج أن القوس ا ك حـ = القوس ء ل و

نظرية (١٢)

في الدوائر المتساوية او في نفس الدائرة اذا تساوت الاقواس تتساوى زواياها المركزيه



شكل (١٣٤)

المعطيات : م ، ن دائرتان فيهما ا س ب = حـ ص ء شكل (١٣٤)

المطلوب : اثبات ان $\measuredangle$ ا م ب = $\measuredangle$ حـ ن ء

البرهان : نتصور رفع الدائرة م ووضعها على الدائرة ن بحيث يقع المركز م على المركز ن و بحيث ينطبق م ا على ن حـ . وحيث ان الدائرتين متساويتان وان م ا = ن حـ فان نقطة ا تنطبق على نقطة حـ وينطبق المحيطان كل على الآخر تمام الانطباق .

، ∵ ا س ب = حـ ص ء ∴ نقطة ب تقع على نقطة ء .

، ∵ النقطة ب تنطبق على النقطة ء

∴ م ب ينطبق على ن ء

∴ ضلعا الزاوية ا م ب ينطبقان على ضلعي الزاوية ح م د .

∴ ∠ ا م ب = ∠ ح م د

نتيجة : في الدوائر المتساوية او في نفس الدائرة اذا تساوت الاقواس تساوت زواياها المحيطية .

في (شكل ١٣٥) ∠ ح م د =

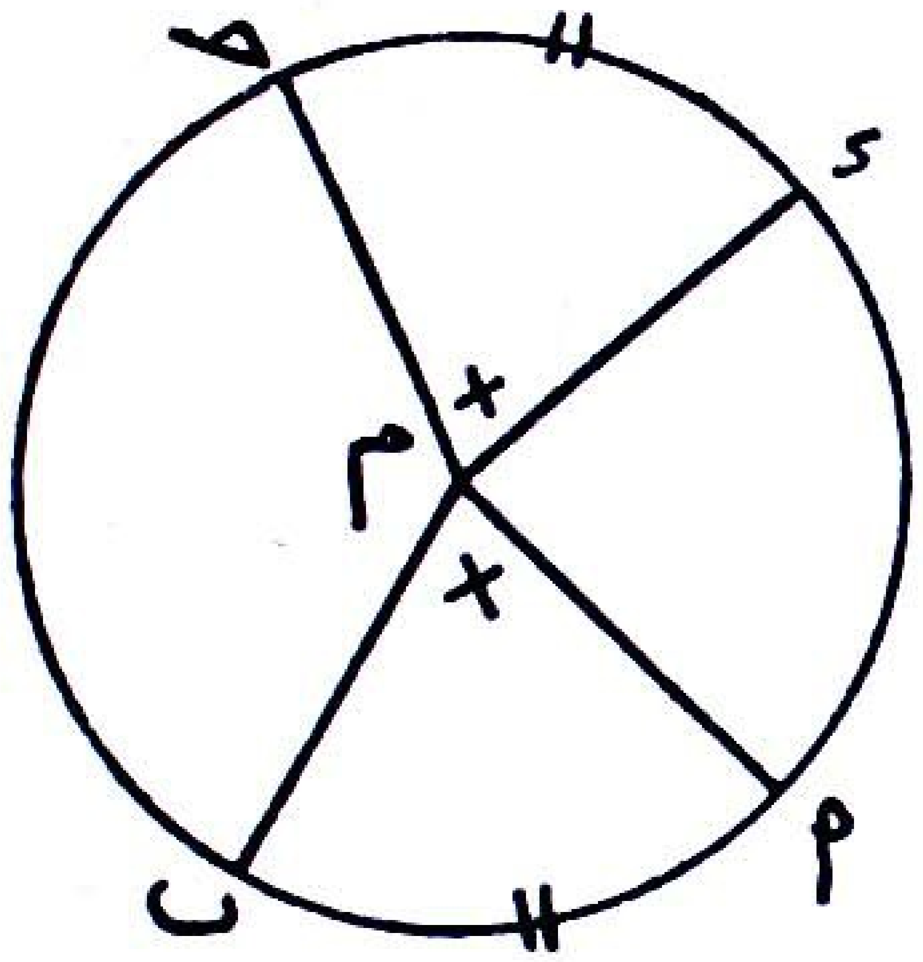
∠ ا م ب

∴ $\overset{\frown}{\text{ح د}}$ = $\overset{\frown}{\text{ا ب}}$

وبالعكس اذا كان

$\overset{\frown}{\text{ح د}}$ = $\overset{\frown}{\text{ا ب}}$

فان ∠ ح م د = ∠ ا م ب



الشكل (١٣٥)

وبالمثل في (الشكل ١٣٦)

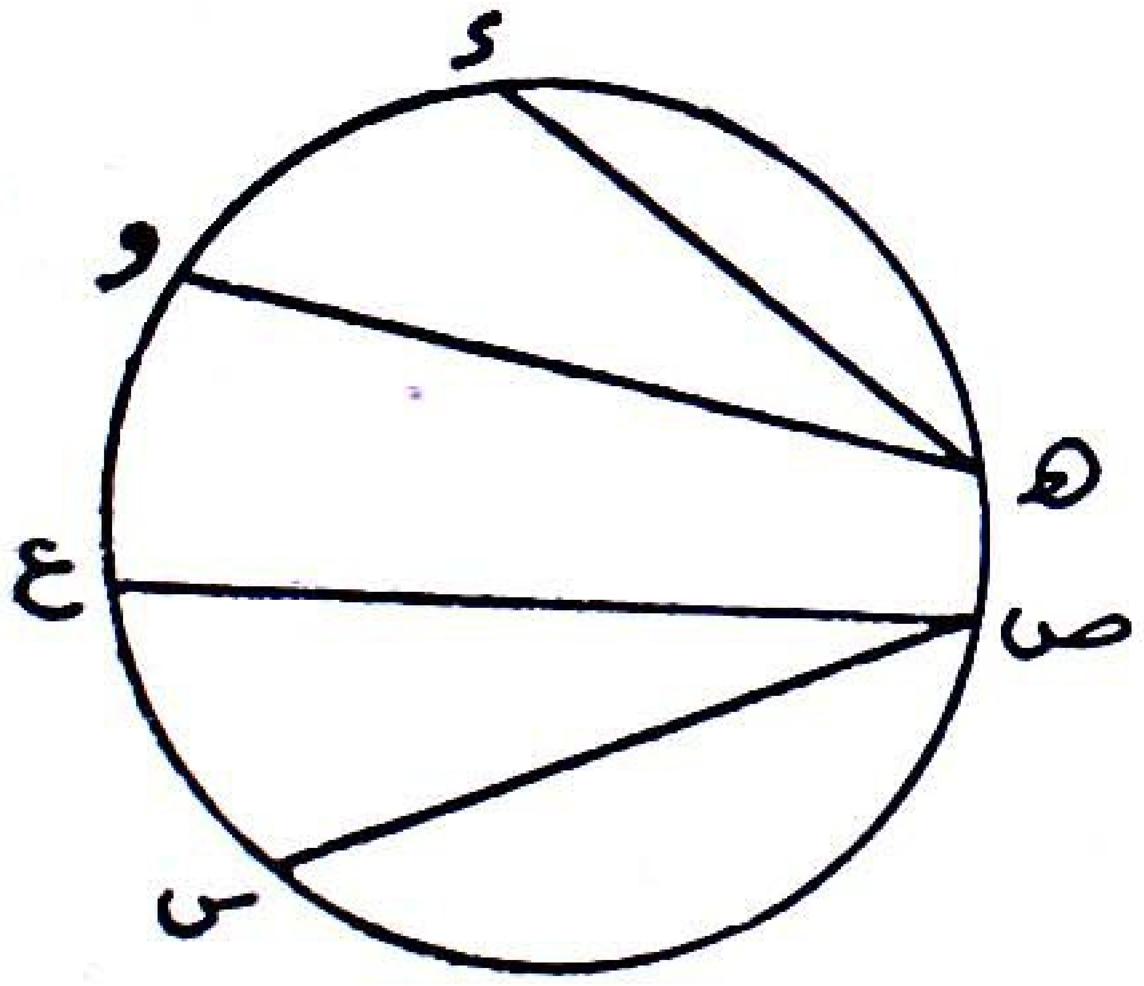
∠ د ه و = ∠ س ص ع

∴ $\overset{\frown}{\text{د و}}$ = $\overset{\frown}{\text{ع س}}$

وبالعكس اذا كان

$\overset{\frown}{\text{د و}}$ = $\overset{\frown}{\text{ع س}}$

فان ∠ د ه و = ∠ س ص ع

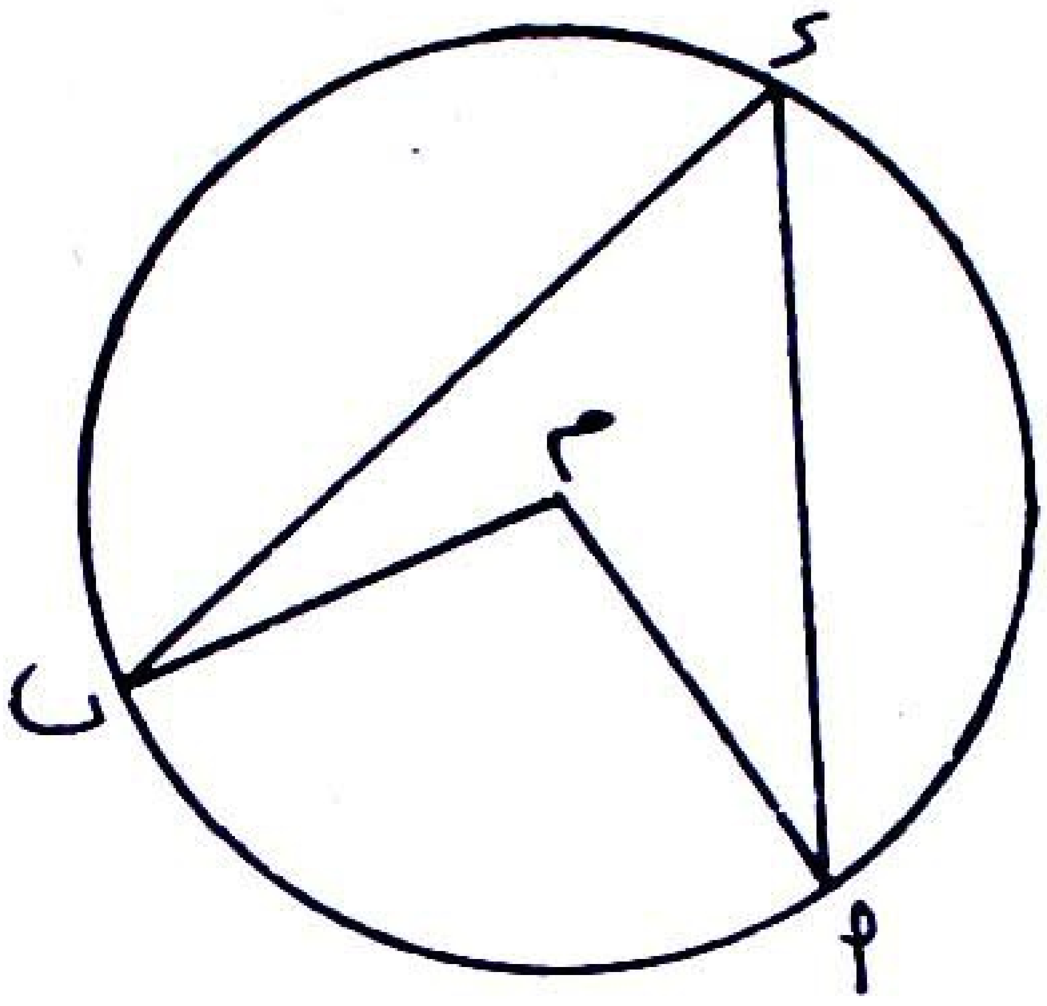


الشكل (١٣٦)

تقدير الزاوية المركزية :

يمكن معرفة مقدار اي زاوية مركزية اذا علم طول القوس المقابل لها على الدائرة وعلم نصف قطر الدائرة .

تدريب :



الشكل (١٣٧)

أوجد مقدار الزاوية المركزية ا م ب الشكل (١٣٧) اذا علمت ان $\overset{\frown}{اب}$ = ٢٢ سم ونصف قطر الدائرة ١٤ سم

الحل :

طول محيط الدائرة = ٢ط نق =

$$٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ١٤ = ٨٨ \text{ سم}$$

فلو قسم محيط الدائرة الى ٨٨ قسماً متساوياً فإن هذه الاقسام المتساوية تقابل ٨٨ زاوية مركزية متساوية مقدار كل منها

$$\frac{٣٦٠}{٨٨} = \frac{٤٥}{١١} = ٤\frac{١}{١١}^\circ$$

والقوس ا ب ينقسم الى ٢٢ جزءاً متساوياً ويقابل ٢٢ زاوية مركزية متساوية ومقدار كل منها $٤\frac{١}{١١}^\circ$

$\therefore$ الزاوية المركزية ا م ب = ٢٢ × $\frac{٤٥}{١١}$ = ٩٠°

او بمعنى آخر القوس ا ب = $\frac{٢٢}{٨٨}$ = $\frac{١}{٤}$ محيط الدائرة

$\therefore$ $\angle$ ام ب = $\frac{١}{٤}$ × ٣٦٠ = ٩٠°

وبالمثل اذا كان القوس ا ب = ٩ سم

$\therefore$ ∠ ا م ب $= \frac{٩}{٨٨} \times ٣٦٠ = \frac{٤٠٥}{١١} = ٣٦\frac{٩}{١١}°$

وعلى ذلك مقدار أي زاوية مركزية $= \frac{\text{طول قوسها}}{\text{طول محيط الدائرة}} \times ٣٦٠$

تقدير الزوايا المحيطية :

$\therefore$ الزاوية المحيطية $= \frac{١}{٢}$ الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس

المحصور بين ضلعيها

$\therefore$ الزاوية المحيطية $= \frac{\text{طول قوسها}}{\text{طول محيط الدائرة}} \times \frac{٣٦٠}{٢}$

مقارنة زاويتين مركزيتين او محيطيتين في دائرة واحدة او دوائر متساوية

اذا كان قوس احدى زاويتين مركزيتين $= \frac{٢}{٣}$ قوس زاوية

مركزية اخرى فيكون مقدار الزاوية الاولى $\frac{٢}{٣}$ الزاوية الثانية .

وذلك لانه لو انقسم قوس الزاوية الاولى الى قسمين متساويين فإن قوس الزاوية الثانية ينقسم الى ٣ أقسام متساوية من نفس اقسام الزاوية الاولى .

وبما ان هذه الاقسام المتساوية تقابل زوايا مركزية متساوية

$\therefore$ يكون مقدار الزاوية الاولى $\frac{٢}{٣}$ مقدار الزاوية الثانية وبالمثل في

الزوايا المحيطية .

تمارين (٢٣)

١ – ا ب وتر مرسوم داخل دائرة رسم ا ﺣ ، ب ٮ وتران متوازيان من نهايتي الوتر ا ب وفي جهتين مختلفتين منه برهن ان $\overset{\frown}{\text{ا ٮ}} = \overset{\frown}{\text{ﺣ ب}}$

٢ – ا ب ، ﺣ ٮ وتران متوازيان في دائرة بحيث كان ا ، ﺣ في جهة واحدة اثبت ان القوس ا ﺣ = القوس ب ٮ (صل ا ٮ)

ملاحظة : هذا التمرين مشهور ومنطوقه العام هكذا

« الوتران المتوازيان يحصران بينهما قوسين متساويين »

٣ – ا ب ﺣ زاوية محيطية مشتركة في القوس مع الزاوية المركزية ا م ﺣ اثبت ان منصفي ∠ ب ، ∠ م يتقابلان في نقطة هي منتصف القوس $\overset{\frown}{\text{ب ﺣ}}$

٤ – ا ب ، ﺣ ٮ قطران متقاطعان داخل الدائرة م برهن ان قوسي كل زاويتين متقابلتين بالرأس متساويان

٥ – ا ب ﺣ △ متساوي الساقين مرسوم داخل دائرة برهن أن

$\overset{\frown}{\text{ا ب ﺣ}} = \overset{\frown}{\text{ا ﺣ ب}}$

٦ – ا ب ﺣ ٮ شكل رباعي مرسوم داخل دائرة نصفت الزاوية ا ٮ ب بالمنصف ٮ ﮬ قابل محيط الدائرة في ﮬ ونصفت زاوية ا ﺣ ب بالمنصف ﺣ و قابل محيط الدائرة في و وأثبت أن و تنطبق على ﮬ

٧ – ا ب ﺣ ٮ متوازي اضلاع رسمت دائرة مركزها ا . ونصف قطرها ا ب فقطع محيطها امتداد ب ا في و ، ﺣ ب أو متداده في س ، ٮ ا أو امتداده من أي جهة في ص ، ع اثبت ان :

(١) $\overset{\frown}{\text{س ع}} = \overset{\frown}{\text{و ع}}$ (٢) $\overset{\frown}{\text{س ص}} = \overset{\frown}{\text{ص و}}$

٨ – اذا تقاطع وتران داخل دائرة وكانا متعامدين فان مجموع كل قوسين

متقابلين محصورين بينهما = $\frac{1}{2}$ المحيط

٩ — ا ب وتر في دائرة ، حـ نقطة على القوس الاصغر ا ب فاذا نصف القوس الاصغر ب حـ في هـ وانزل من هـ العمود هـ س على ا ب ومد على استقامته فقطع محيط الدائرة في ء ثم وصل ء حـ فقطع ا ب في ص برهن ان ا ص = ا حـ

١٠ – ا ب حـ مثلث متساوي الاضلاع مرسوم داخل دائرة نصف القوس الاصغر ا حـ في ء ثم مد حـ ء حتى لاقى امتداد ب ا في هـ اثبت ان ا هـ = ا ب

١١ – ا ب وتر في دائرة نصف $\frown{ا ب}$ في حـ وفرضت النقطتان ء ، هـ على الوتر ا ب ثم وصل حـ ء ، حـ هـ ومداحتى لاقيا المحيط في س ، ص على الترتيب اثبت ان الشكل ء هـ ص س رباعي دائري

١٢ – ا ب ، حـ ء وتران متعامدان في دائرة فاذا كان القوس

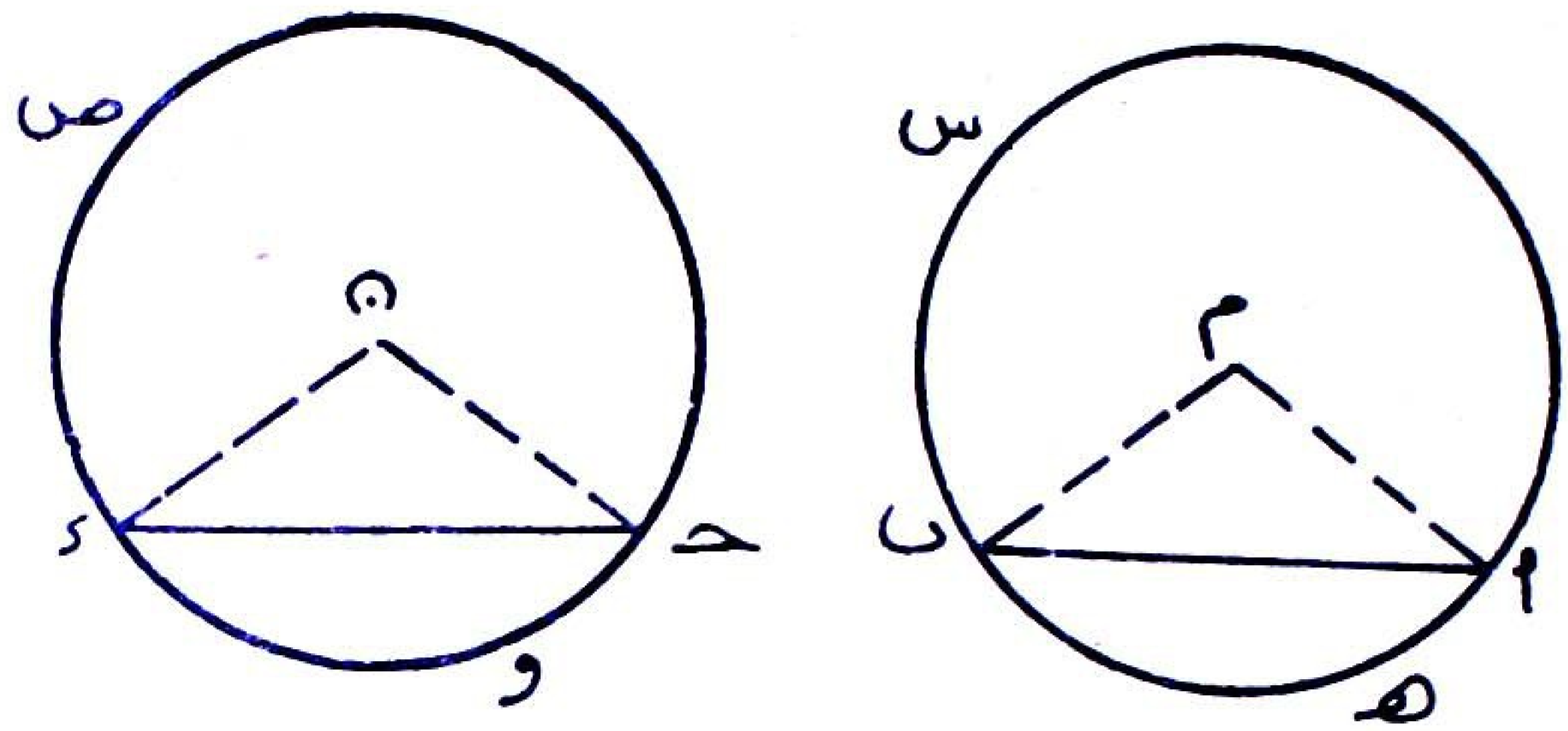
ا حـ = $\frac{1}{2}$ القوس ب ء فأوجد مقدار $\angle$ ا ء حـ بالدرجات

١٣ – ا ب قطر لنصف دائرة فرضت على محيطها نقطتان ء ، هـ بحيث أن القوس ا ء = القوس ء هـ ثم اخذت نقطة حـ على القوس هـ ب فاذا تقاطع ا حـ ، ب ء في س وتقاطع ب هـ ، ء حـ في و فأثبت أن و س عمودي على و ب

١٤ – ب حـ وتر في دائرة ، م . منتصف القوس الاصغر ب حـ ، س ، ص نقطتان على ب حـ مد م س ، م ص فقابلا المحيط في ء ، د اثبت ان ء ، س ، ص ، د تقع على محيط دائرة

نظرية (١٣)

في الدوائر المتساوية أو في نفس الدائرة اذا تساوت الاوتار تساوت اقواسها الأصغر للأصغر والأكبر للأكبر



الشكل (١٣٨)

المعطيات : م ، ن دائرتان متساويتان فيهما الوتر ا ب = الوتر د ح

المطلوب : اثبات ان ا هـ ب = ح و د

، ا س ب = ح ص د

العمـل : نصل م ا ، م ب ، ن ح ، ن د

البرهان : △ م ا ب ، △ ن ح د

فيهما { م ا = ن ح نصفا قطرين في دائرتين متساويتين
، م ب = ن د " " " " "
، ا ب = ح د فرضا

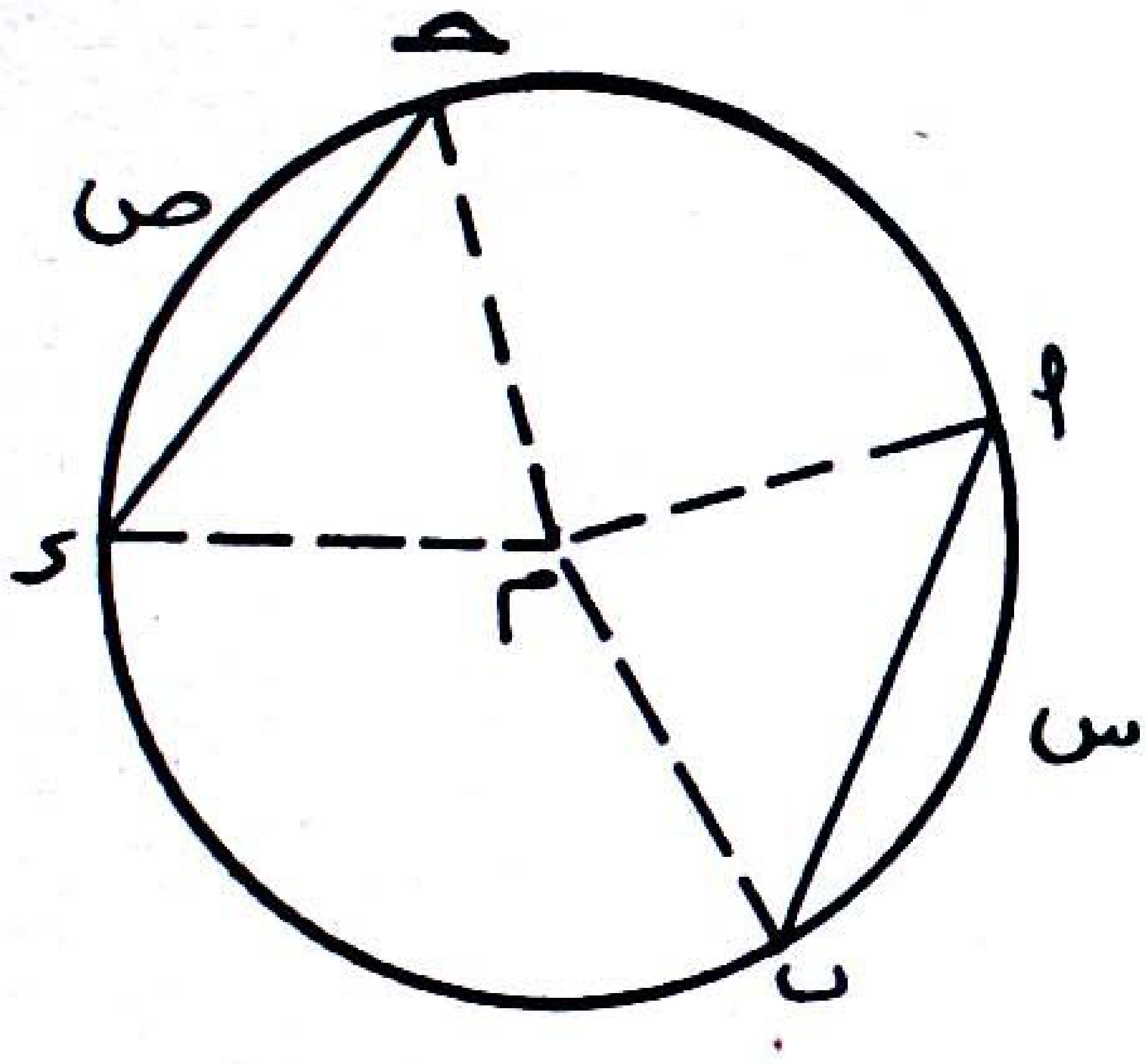
∴ ينطبق المثلثان وينتج ان ∠ ا م ب = ∠ ح ن د

∴ ا هـ ب = ح و د

6 ∵ المحيطين متساويان لتساوي الدوائر

∴ اسب = حصد

وهو المطلوب



الشكل (١٣٩)

في نفس الدائرة: الشكل(١٣٩)

ΔΔ م ا ب 6 م ح د

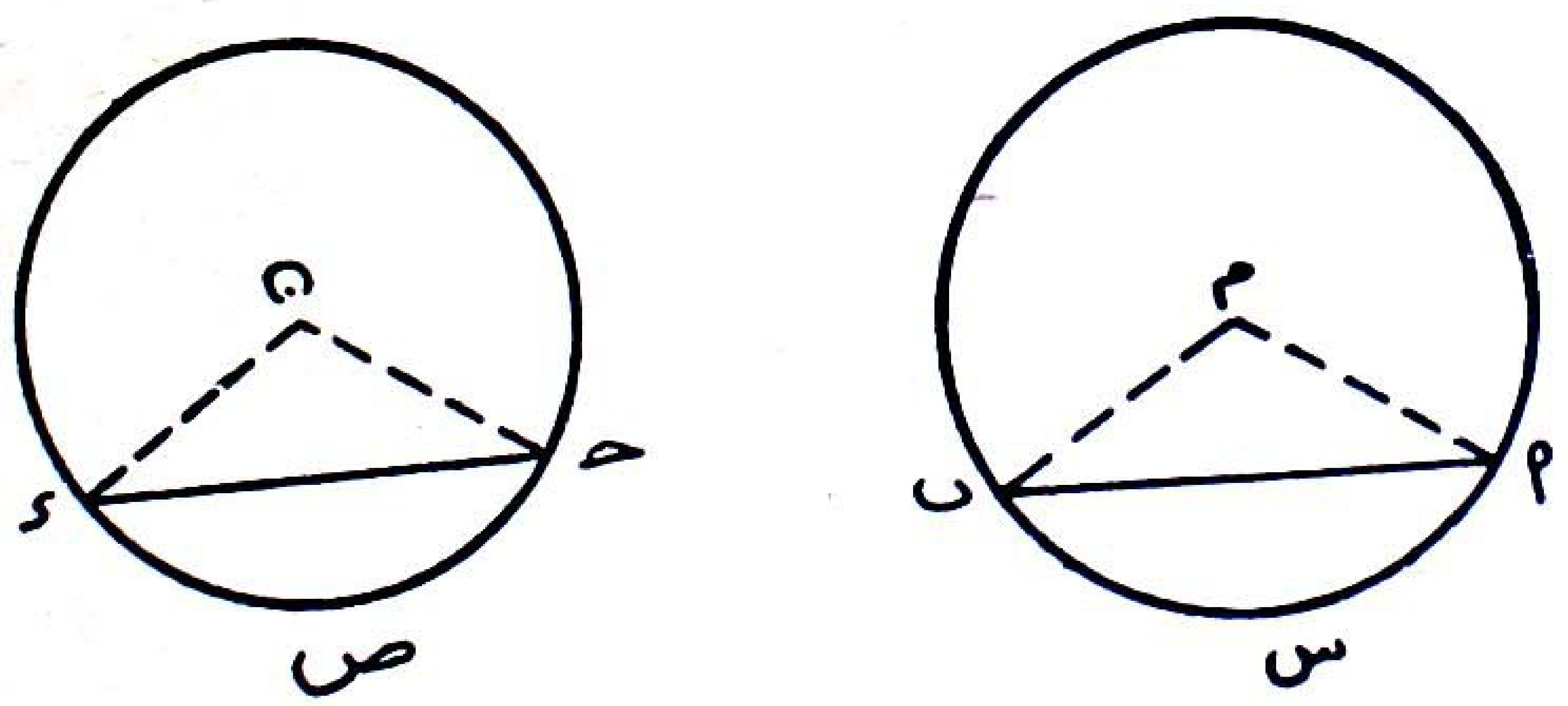
ينطبقان (اضلاع متساوية)

∴ ∠ ا م ب = ∠ ح م د

∴ اسب = حصد

نظرية (١٤)

في الدوائر المتساوية او في نفس الدائرة اذا تساوت الاقواس تساوت اوتارها



الشكل (١٤٠)

المعطيات : اولا : في الدوائر المتساوية

م 6 ه دائرتان متساويتان فيهما اسب = حصد الشكل (١٤٠)

المطلوب : اثبات ان الوتر ا ب = الوتر حـ ى

العمـل : نصل م ا ، م ب ، ن حـ ، ن ى

البرهان : ∵ $\overset{\frown}{\text{اس ب}} = \overset{\frown}{\text{حـ ص ى}}$ ∴ ∠ م = ∠ ن نظرية

في ∆ ∆ م ا ب ، ن حـ ى

فيهما
م ا = ن حـ نصفا قطرين في دائرتين متساويتين
، م ب = ن ى » » » » »
∠ ا م ب = ∠ حـ ن ى برهاناً

∴ ينطبق ∆ ∆ وينتج ان الوتر ا ب = الوتر حـ ى

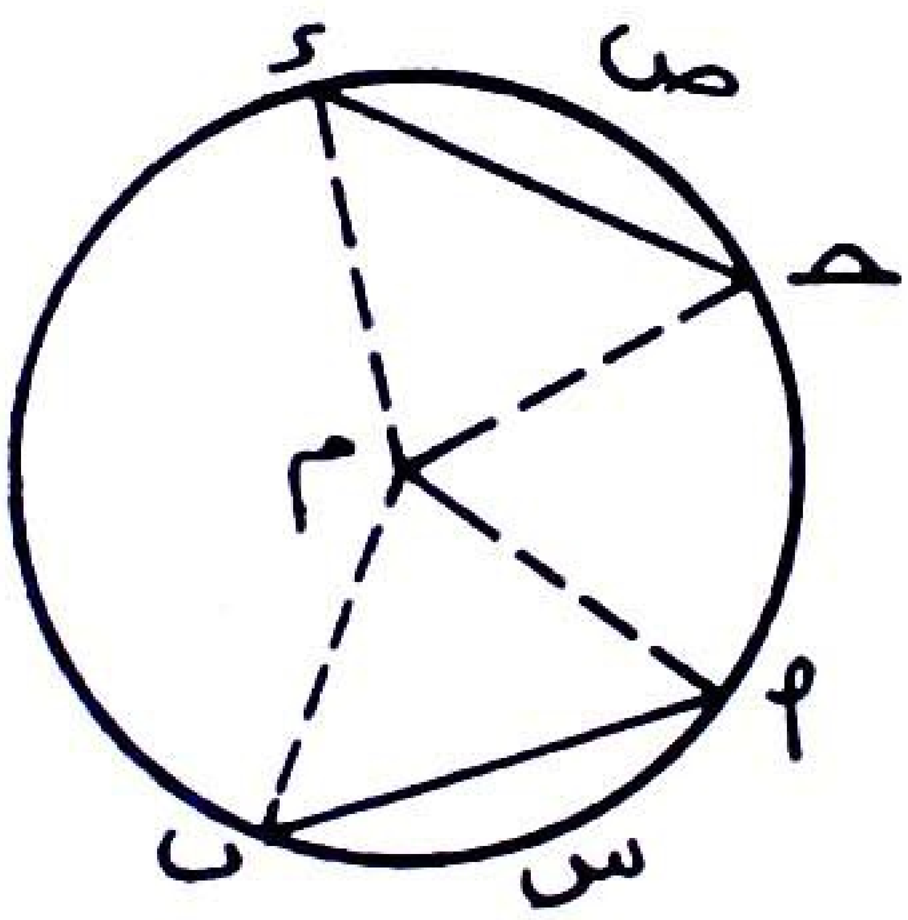
وهو المطلوب

ثانياً: في نفس الدائرة الشكل (١٤١)
يتبع في برهانها نفس البرهان السابق
ملاحظات هامة :

نستنتج من النظريات الاربع السابقة ان هناك ثلاثة عناصر في الدوائر المتساوية (ونفس الدائرة) وهي :

(١) الزوايا (٢) الاقواس (٣) الاوتار

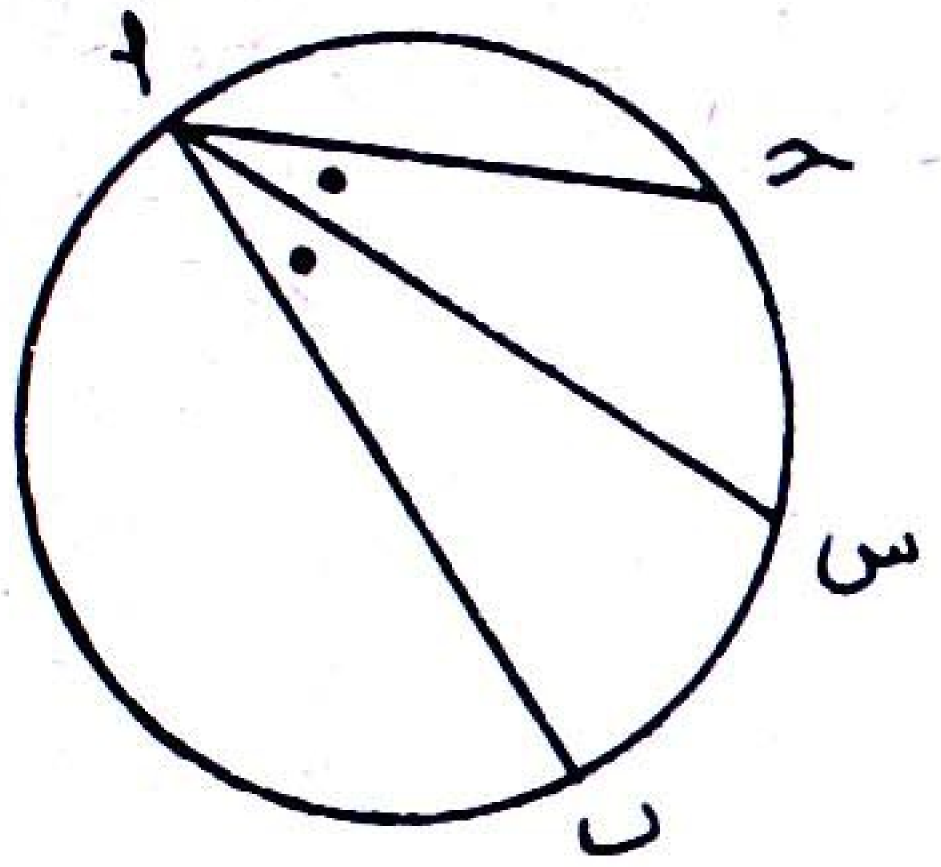
فإذا تساوى زوج من احداها نتج منه تساوي زوج من كل من الآخرين



الشكل (١٤١)

تمارين شفوية

١ – في الشكل (١٤٢) س ينصف ب ا ح
ما هي الاستنتاجات التي تستنتجها



الشكل (١٤٢)

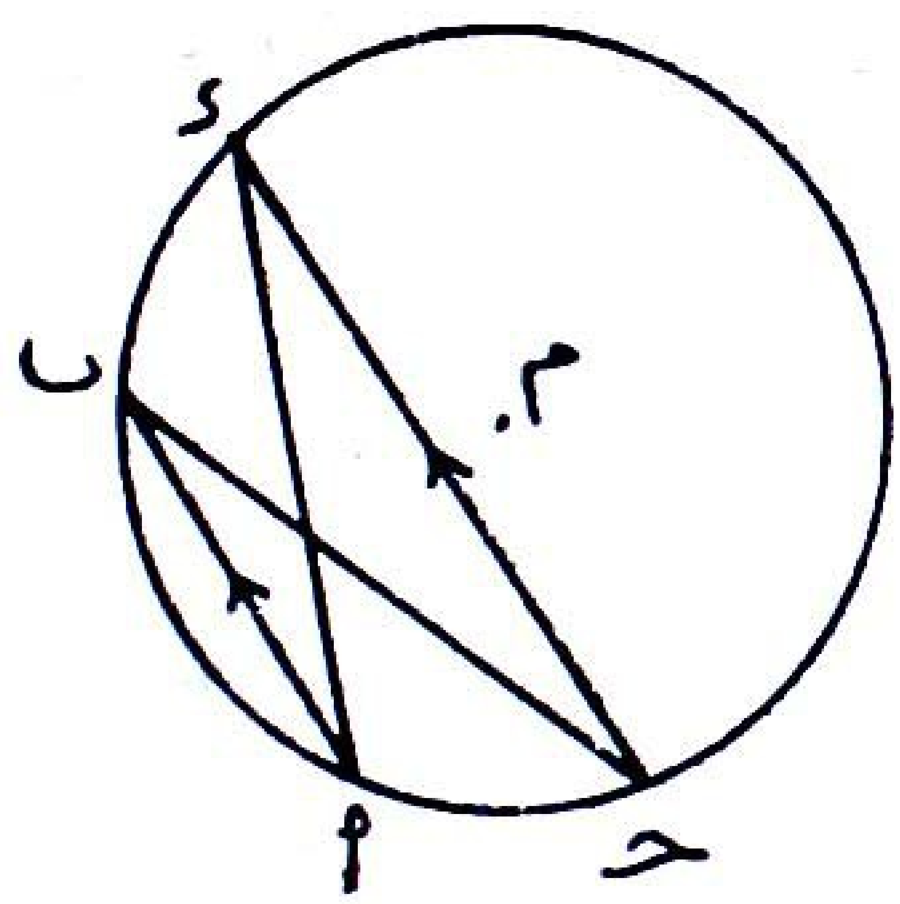
٢ – في الشكل (١٤٣) دائرة مركزها م
رسم فيها الوتران المتوازيان ا ب ، ح ء
ثم وصل ا ء ، ب ح اثبت ان :

١" – القوس ا ح = القوس ب ء

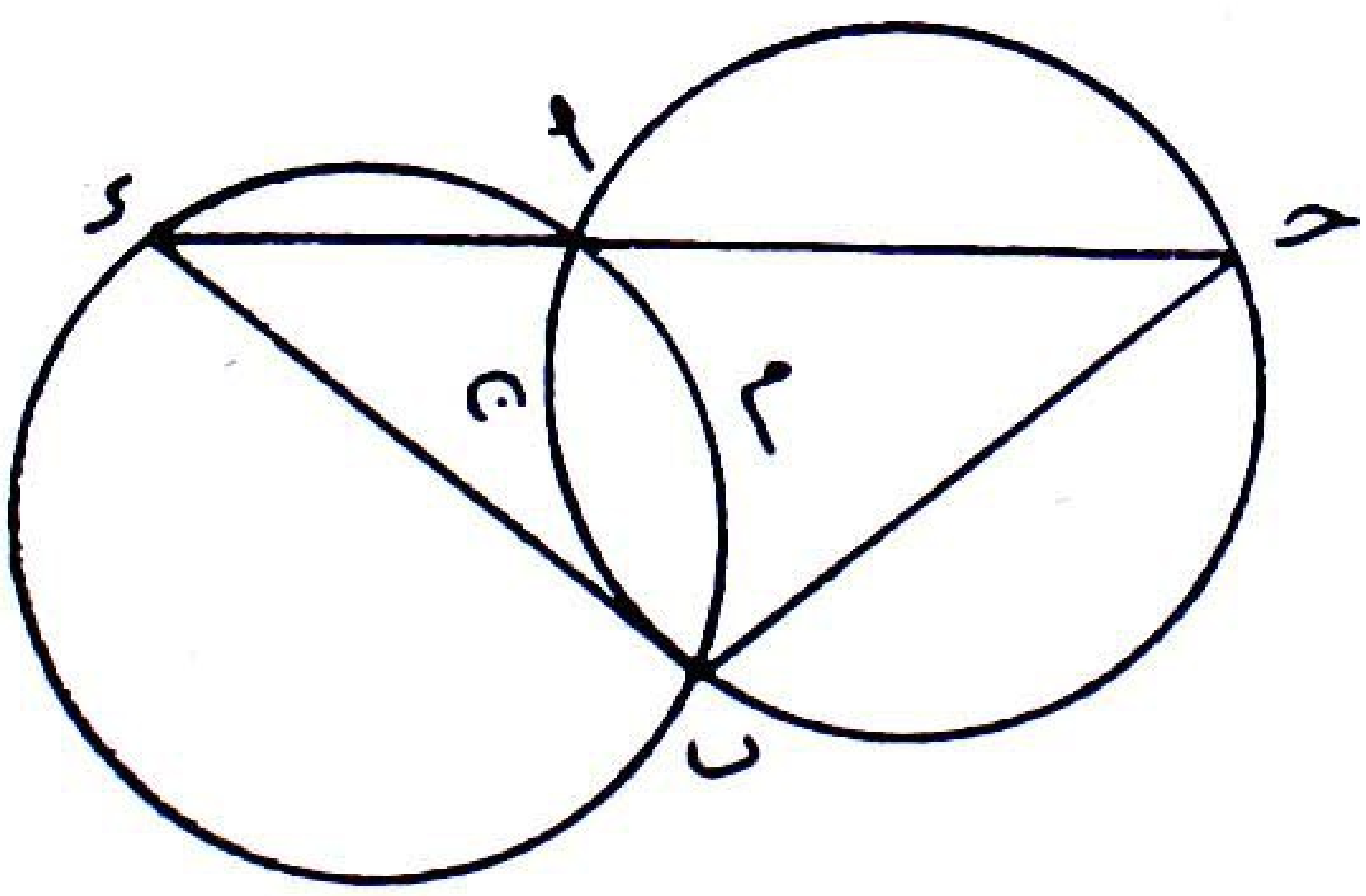
٢" – الوتر ا ء = الوتر ب ح

٣" – ماهي الزوايا المتساوية في الشكل مع ذكر السبب

٤" – اذكر الاقواس المتساوية التي يمكنك استنتاجها من الشكل (١٤٣)



الشكل (١٤٣)



الشكل (١٤٤)

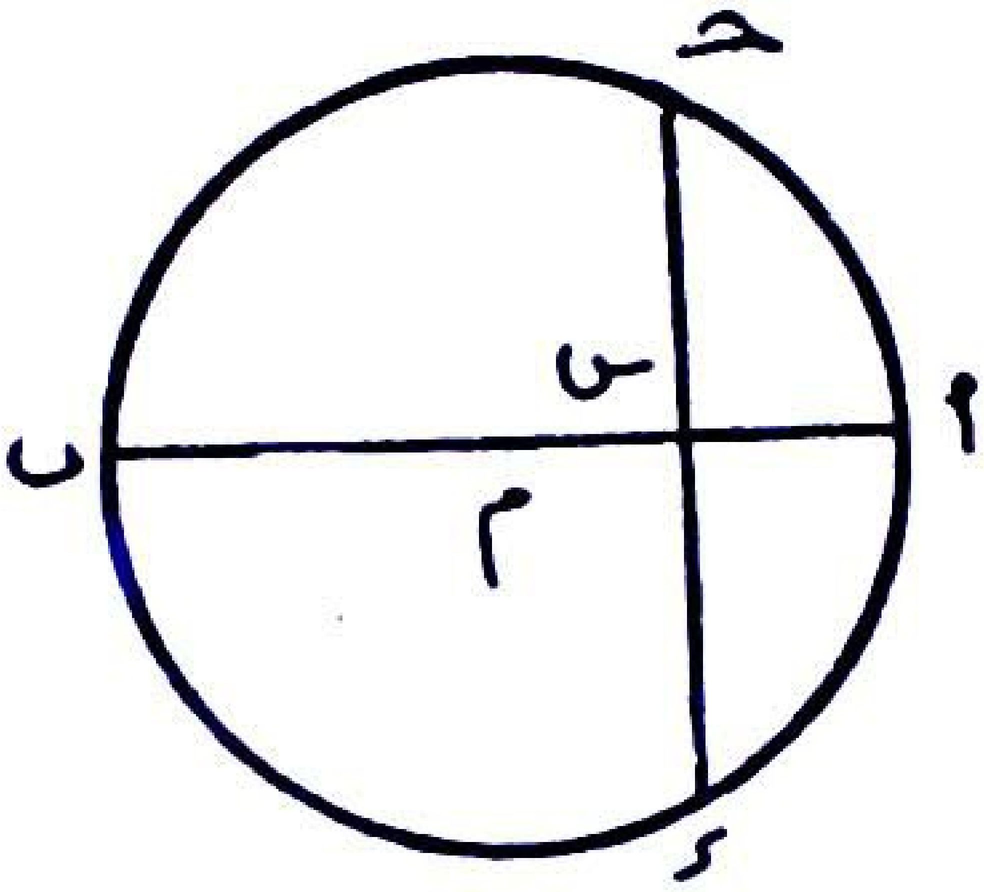
٣ – الشكل (١٤٤) دائرتان متساويتان متقاطعتان في ا ، ب رسم المستقيم حـ ا ء ماراً بالنقطة ا ثم وصل ب حـ ، ب ء العمل صل ا ب ثم اثبت ان:

١" – القوس ا م ب = القوس ا د ب

٢" – اكمل الحقيقة الآتية :

في الدوائر المتساوية الزوايا التي تقابل اوتاراً متساوية اما ان تكون متساوية او . . . .

٤ – في الشكل (١٤٥) دائرة م ، ا ب قطر فيها ، حـ ء وتر عمودي على القطر ا ب



الشكل (١٤٥)

والمطلوب اثبات ان :

القوس ا ء + القوس ب حـ يساوي

القوس ا حـ + القوس ب ء

تمارين (٢٤)

١ – ا ب حـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة فيه ا ب = ء حـ اثبت ان ا ء // ب حـ

٢ – ا ب حـ ء شبه منحرف مرسوم داخل دائرة فيه ا ء // ب حـ اثبت ان ا ب = حـ ء ، ا حـ = ب ء

٣ – ا ب ، حـ ء ، هـ و ثلاثة أوتار متوازية في دائرة برهن على ان Δ ا حـ هـ ينطبق على Δ ب ء و

٤ – ا ، ب ، حـ ثلاث نقط على محيط دائرة نصفت $\angle$ ب ا حـ بمستقيم قطع المحيط في ء ثم رسم ء هـ // ب ا فقطع المحيط في هـ اثبت ان ا هـ = حـ ء

٥ – ا ب حـ △ متساوي الساقين مرسوم في دائرة نصفت زاويتا القاعدة بالمنصفين ب س ، حـ ص فقابلا المحيط في س ، ص اثبت ان
ب ص = ص ا = ا س = س حـ

٦ – ا ب وتر في دائرة ، حـ منتصف القوس الأصغر ا ب أخذت نقطة ء على القوس الآخر ووصل ء ا ثم مد على استقامته الى هـ بحيث كان ا هـ = ب ء
اثبت أن ∠ حـ هـ ا = ∠ حـ ا ب

٧ – دائرتان متساويتان ومتقاطعتان في ا ، ب رسم المستقيم حـ ب ء فقطع احدى الدائرتين في حـ والاخرى في ء برهن ان △ ا ء حـ متساوي الساقين

٨ – ا ب حـ △ مثلث مرسوم داخل دائرة نصفت ∠ ا بمستقيم قابل المحيط في ء ثم اسقط ء هـ ، ء و عمودين على ا ب ، ا حـ او امتدادهما فقابلاهما في هـ ، و على الترتيب اثبت ان هـ ب = حـ و

٩ – ا ب حـ زاوية محيطية نصفت بمستقيم قابل محيط الدائرة في ء ثم رسم من ء مستقيم // ا ب ويقابل محيط الدائرة في هـ برهن على ان :
ء هـ = ب حـ

١٠ – س ص ع مثلث متساوي الاضلاع مرسوم داخل دائرة فرضت نقطة م على القوس س ص ، نقطة ن على القوس ص ع بحيث كان القوس س م = القوس ص ن اثبت أن :
الوتر س م + الوتر م ص = الوتر س ن

١١ – ا ب حـ مثلث حاد الزوايا مرسوم داخل دائرة انزل العمودان ا ء ، ب هـ على ب حـ ، ا حـ على الترتيب اثبت أن القطر المرسوم من نقطة حـ ⊥ ء هـ

١٢ – ا ب حـ △ حاد الزوايا انزل العمودان ب ء ، حـ هـ على ا حـ ، ا ب ونصف ب حـ في م . اثبت أن ∠ هـ م ء = ١٨٠° – ٢ ∠ ا .

تمارين عامة متنوعة (٢٥)

١ – ا ب حـ △ متساوي الساقين مرسوم داخل دائرة نصفت الزاويتان

ب ، حـ المجاورتان للقاعدة بمستقيمين فتقابلا في هـ وقطعا محيط الدائرة في ء ، س برهن ان : ا ء هـ س متوازي اضلاع

٢ - ا ب حـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة مركزها م فإذا فرض ان ∠ ا = ٦٠° فأثبت أن ∠ م ب ء + ∠ م ء ب = ∠ حـ ب ء + ∠ حـ ء ب

٣ - ا ب ، ا حـ وتران في دائرة انزل العمود ب ء على ا حـ فقابل هو او امتداده محيط الدائرة في س ثم انزل العمود حـ هـ على ا ب فقابل هو او امتداده المحيط في ص برهن ان ء هـ // س ص

٤ - ا ب قطر في دائرة مركزها م اخذت نقطة حـ على المحيط ثم نصف القوس الاصغر ا حـ في ء . اثبت ان ء م // حـ ب

٥ - ا ب ، حـ ء وتران متساويان وغير متقاطعين في دائرة مركزها م مدا من جهة ب ، ء فتقاطعا في هـ . اثبت أن الشكل ا م ء هـ رباعي دائري.

٦ - م دائرة م ا ، م ب نصفا قطرين متعامدين فيها اخذت نقطة حـ على القوس الاصغر ا ب ثم اخذت نقطة ء على القوس الاكبر ا ب . احسب قيمة كل من ∠ ا حـ ب ، ∠ ا ء ب

٧ - ا ب قطر في دائرة مركزها م ، م ء نصف قطر عمودي على القطر ا ب فاذا وصل من أي نقطة مثل حـ على القوس الاصغر ء ب الى ء ثم مد ء حـ ليلاقي امتداد ا ب في هـ ومن هـ اقيم العمود هـ و على ا هـ ليلاقي امتداد ا حـ في و برهن أن هـ و يساوي هـ ب

٨ - دائرتان متقاطعتان في ا ، ب مركز احداهما م . أخذت نقطة س على محيط الدائرة م ثم وصل س ا ، س ب فقطعاهما أو امتدادهما محيط الدائرة الاخرى في ء ، هـ . اثبت أن س م عمودي على ء هـ

٩ - ا ب حـ ء مربع ، ل منتصف ب حـ ، م منتصف حـ ء فاذا تقاطع ا م ، ء ل في و . اثبت أن :

١ - الشكل و ل حـ م رباعي دائري

٢ - الشكل ب م و ل رباعي دائري

١٠ - ا ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة فاذا أنزل العمود ا ء على ب حـ . ورسم القطر ا هـ . فأثبت أن زوايا المثلث ا ب ء = زوايا Δ ا حـ هـ

١١ - تقاطع محيطادائرتين في ا ، ب رسم القاطع حـ هـ ء س ليقطع احدالمحيطين في حـ ، ء والآخر في هـ ، س ثم مد ب ء ليقطع ا س في م . ومد ب هـ ليقطع ا حـ في د . برهن على انه يمر بالنقط ا ، م ، ب ، د محيط دائرة

١٢ - ب حـ قطر دائرة فرضت النقطتان ء ، هـ على المحيط وفي جهة واحدة من القطر ب حـ فاذا تقاطع ب ء ، حـ هـ أوامتدادهما في س وتقاطع ب هـ ، حـ ء أو امتدادهما في ا . اثبت أن الشكل س ء ا هـ رباعي دائري

١٣ - ا ب ، حـ ء وتران متوازيان في دائرة مركزهـا م نصف حـ ء في هـ وصل ب هـ ومد حتى قطع المحيط في س . اثبت أن الشكل ا م هـ س رباعي دائري

١٤ - ا ب قطر دائرة مركزها م رسم الوتر س ص عمودي على ا ب ونصفت ∠ س ص م بالمستقيم ص حـ الذي قطـع المحيط في حـ . برهن ان : حـ منتصف القوس ا س ب

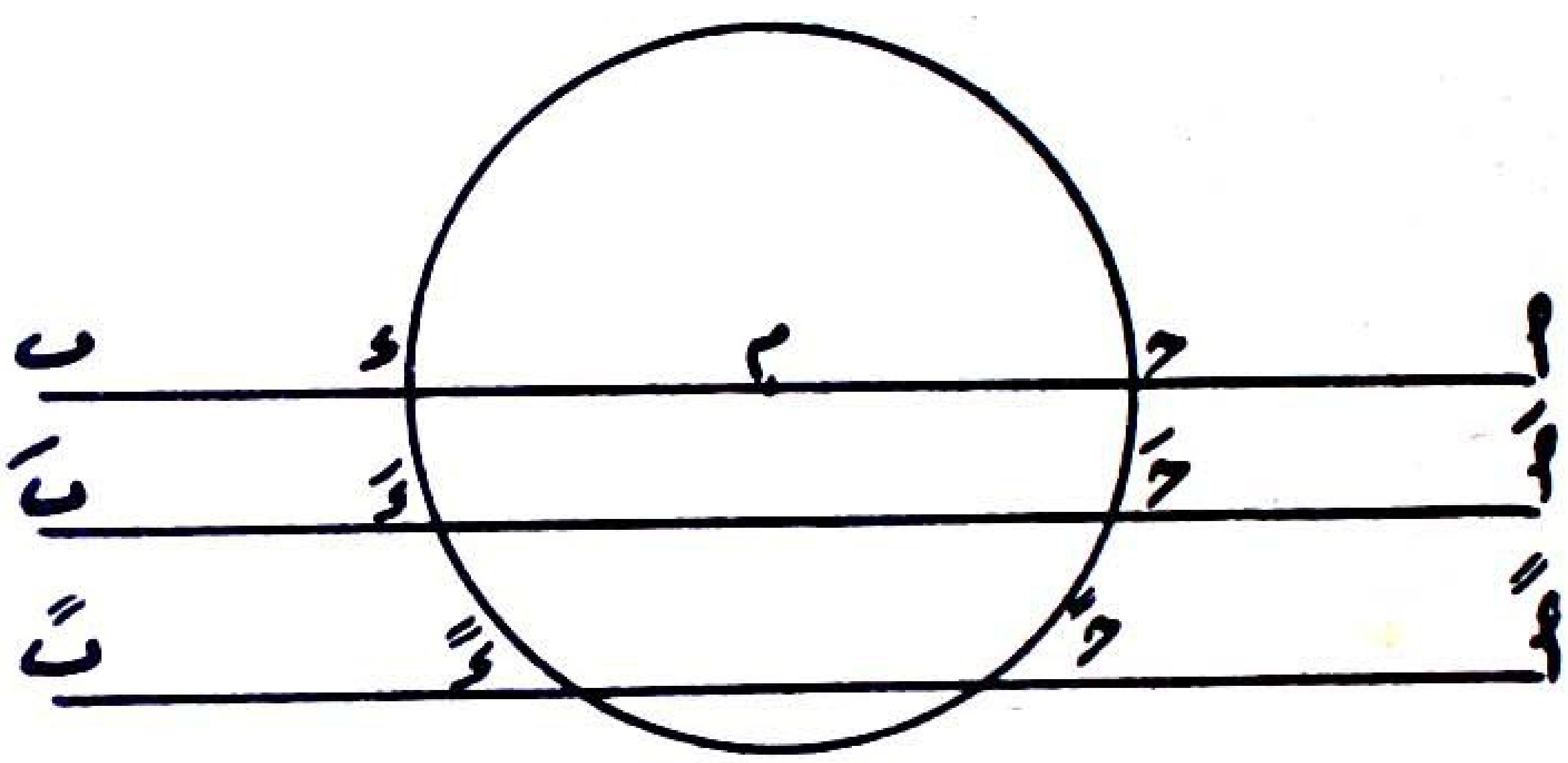
١٥ - ا ب قطر في دائرة مركزها م مد الى حـ ورسم حـ ء هـ قاطعاً للدائرة في ء ، هـ ثم وصل هـ ب ومد على استقامته حتى لاقى العمود المقام من حـ على ا حـ في و .

اثبت ان ∠ هـ حـ ا = ∠ هـ و ا . ثم صل ء م واثبت ان

∠ ء م ب = ٢ ∠ حـ ا و

الباب الخامس

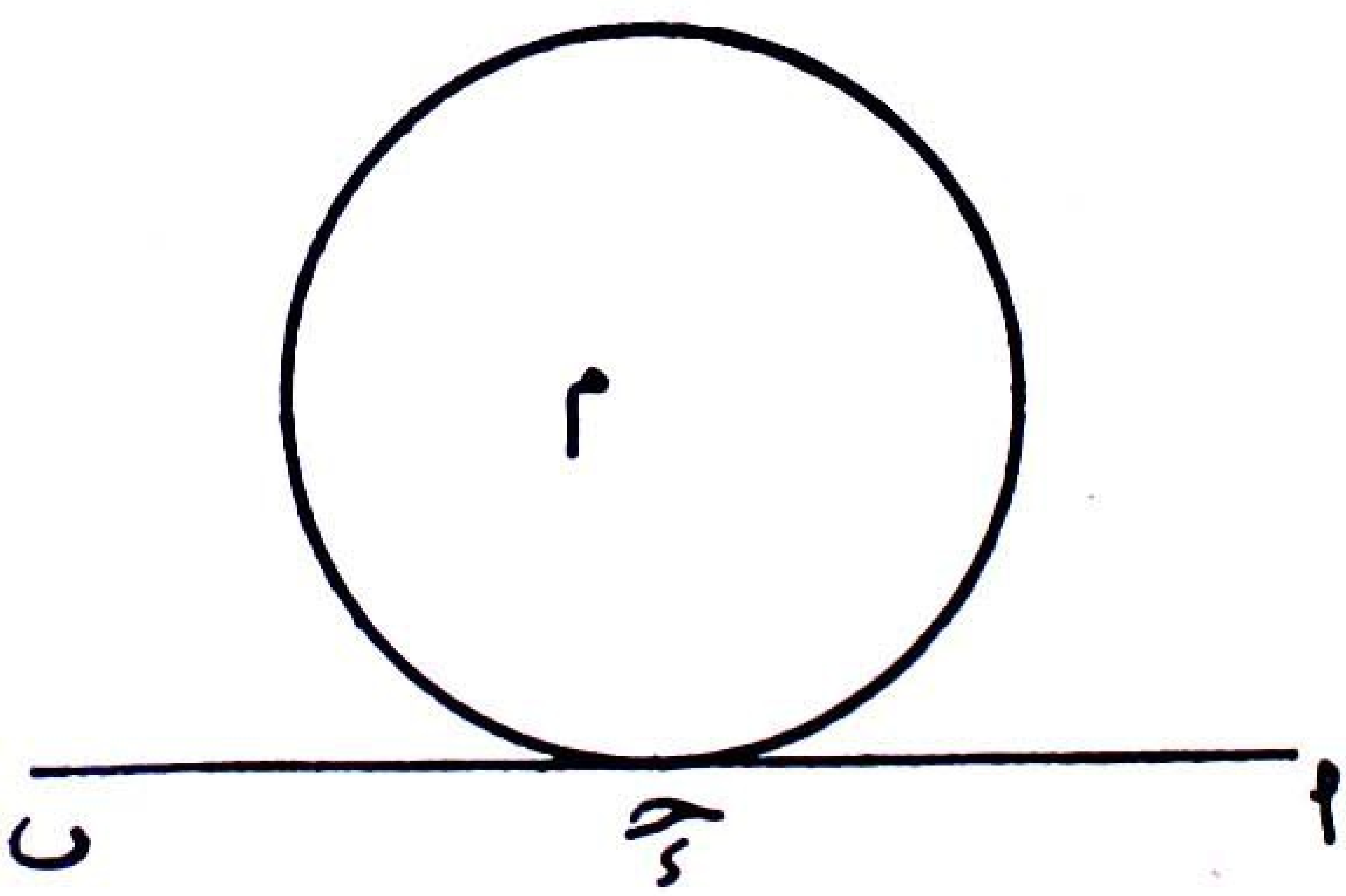
التماس



الشكل (١٤٦)

تدريب :

ارسم دائرة مركزها م وارسم فيها القاطع ا حـ ء ب الذي يقطع الدائرة في حـ ، ء كما يمر بمركز الدائرة م



الشكل (١٤٧)

طبق حافة المسطرة على المستقيم ا ب ، وحول المسطرة الى أعلى أو الى أسفل بحيث تظل حافتها موازية للقاطع ا ب ثم ارسم القاطع ا حـ'ء'ب' فتجد ان البعد حـ' ء' أصغر من حـ ء (قطر الدائرة)

حرك المسطرة مرة اخرى في نفس الاتجاه الاول مع حفظ التوازي بالنسبة للقطر حـ ء ارسم قاطعاً آخر للدائرة تجد ان البعد حـ ء يقل بالتدريج .

استمر بتحريك المسطرة محافظاً على الشرط السابق وارسم عدة قواطع للدائرة تجد انه في وضع من أوضاعها تنطبق نقطتا حـ ، ء

في هذا الوضع نسمي المستقيم ا ب مماساً للدائرة م كما في الشكل (١٤٧) .

نلاحظ ان الجزء حـ ء من القاطع يقع داخل الدائرة وان باقي القاطع خارجها . وكلما اقتربت حـ من ء صغر الجزء الواقع داخل الدائرة حتى اذا انطبقت النقطتان على بعضهما كان القاطع خارج الدائرة ونقطتا حـ، ء منطبقتين على المحيط .

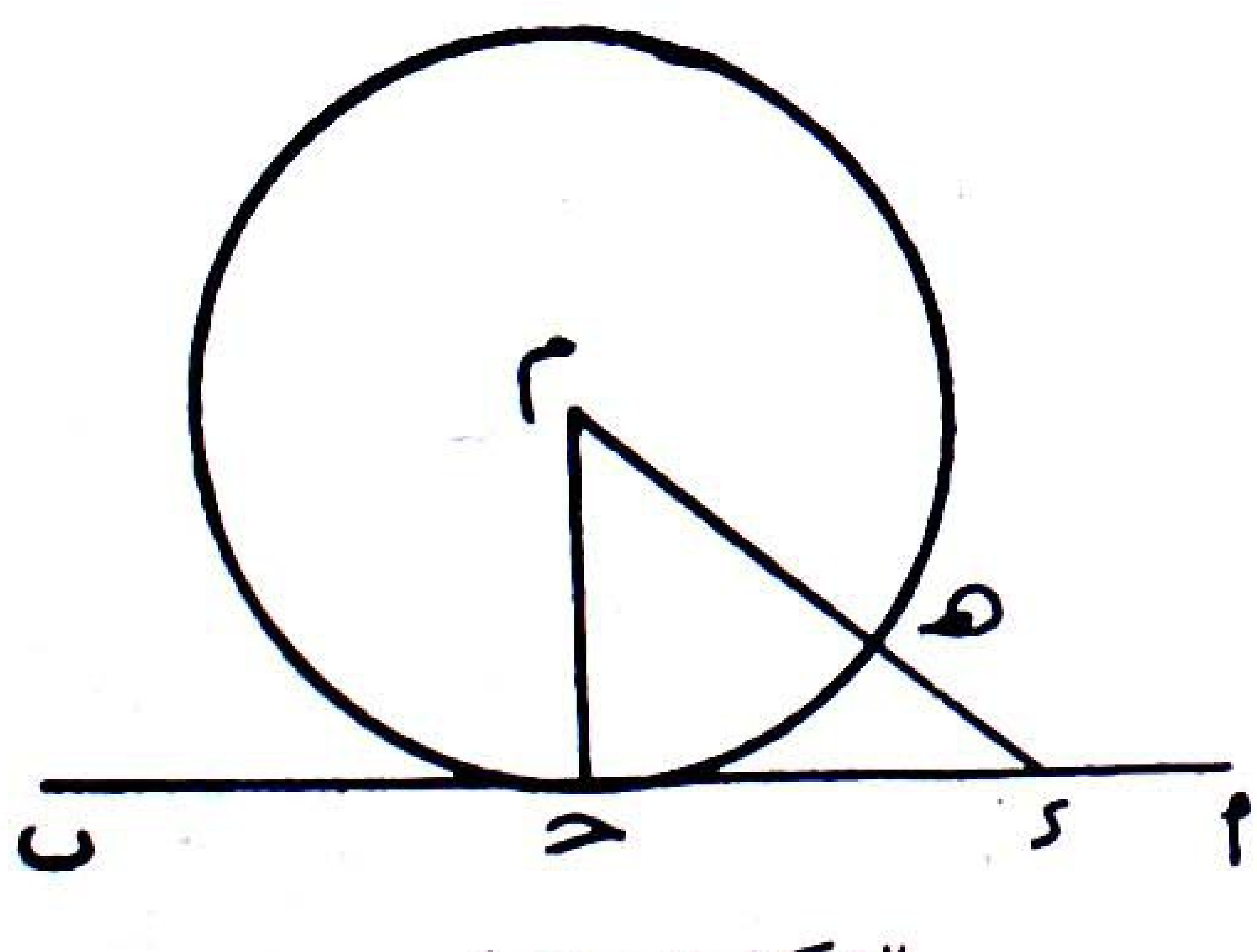
ولا توجد أي نقطة أخرى من القاطع داخل الدائرة أو على محيطها وعلى ذلك نسمي القاطع مماساً للدائرة .

وعليه فان مماس الدائرة يقابلها في نقطة واحدة على محيطها تسمى هذه النقطة **نقطة التماس** . ويقع المماس بتمامه خلا نقطة التماس خارج الدائرة .

وواضح ان اي مستقيم يصل بين م وأي نقطة على المماس (خلاف نقطة التماس) يقطع محيط الدائرة في نقطة وعليه فانه يكون اكبر من نصف قطر الدائرة ويكون المستقيم الواصل من مركز الدائرة الى نقطة التماس اقصر مستقيم أي أن :

م ء يكون اكبر من م حـ .

مما سبق نستنتج ان :



الشكل (١٤٨)

١″ ـ **قاطع الدائرة** :

هو مستقيم يقطع محيط الدائرة في نقطتين

٢″ ـ **مماس الدائرة** :

هو مستقيم يشترك مع محيط الدائرة في نقطة واحدة .

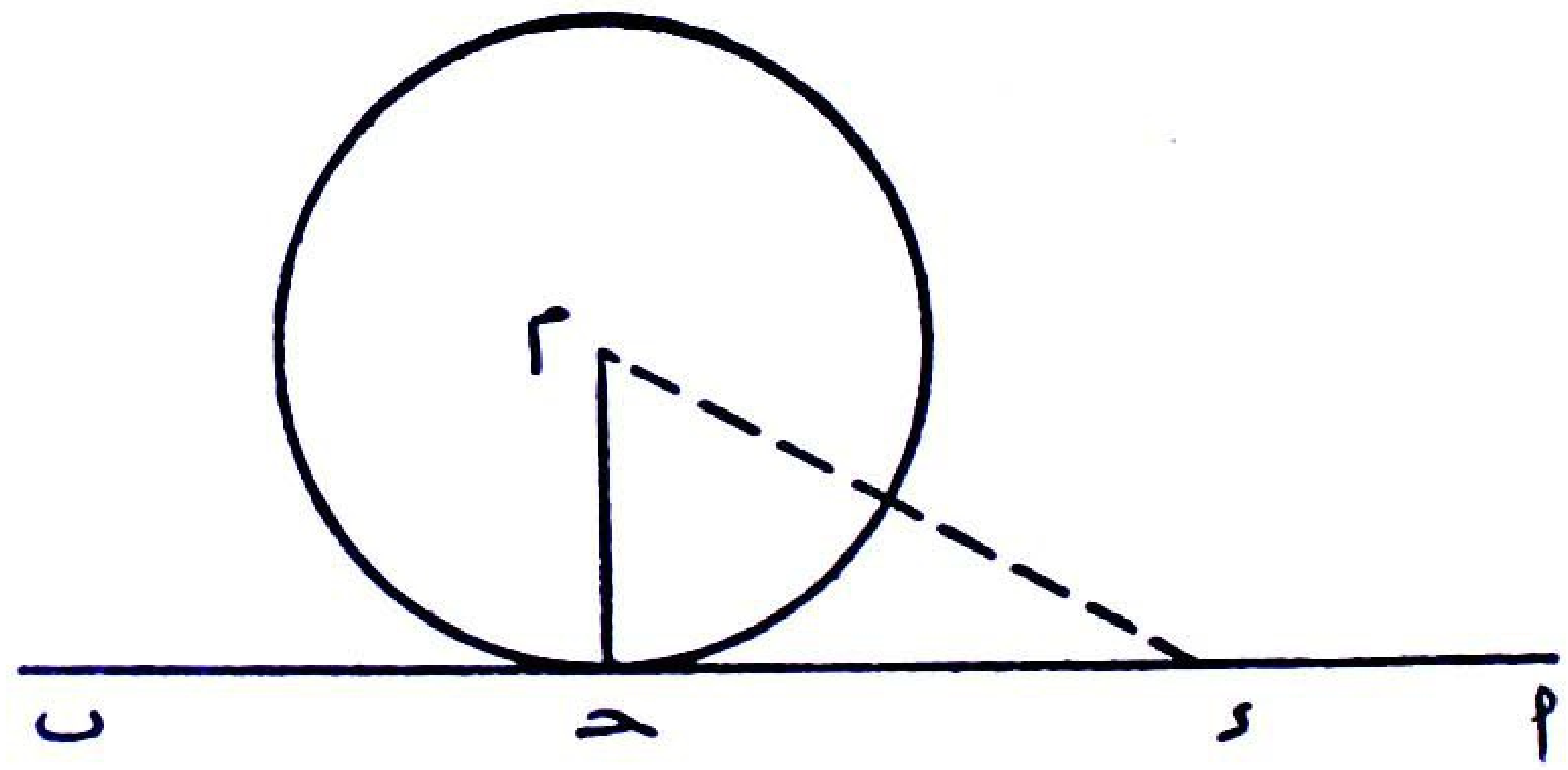
٣‴ ـ **نقطة التماس** :

هي النقطة التي يشترك فيها المماس مع المحيط (وهما نقطتان منطبقتان على بعضهما كما سبق ان وضحنا)

٤″ ـ جميع نقط مماس الدائرة تقع خارجها ما عدا نقطة التماس فانها تقع على محيط الدائرة .

نظرية (١٥)

مماس الدائرة يكون عمودا على نصف القطر المار بنقطة التماس



الشكل (١٤٩)

المعطيات : ا ب مستقيم يمس الدائرة في نقطة حـ وصل م حـ الشكل (١٤٩)

المطلوب : اثبات ان م حـ عمودي على ا ب

العمل : نأخذ نقطة مثل ى على ا ب ونصل م ى

البرهان : حيث ان ا ب يمس الدائرة في نقطة حـ

∴ كل نقطة من نقط ا ب خلاف نقطة حـ تقع خارج الدائرة أي أن نقطة ء تقع خارج الدائرة

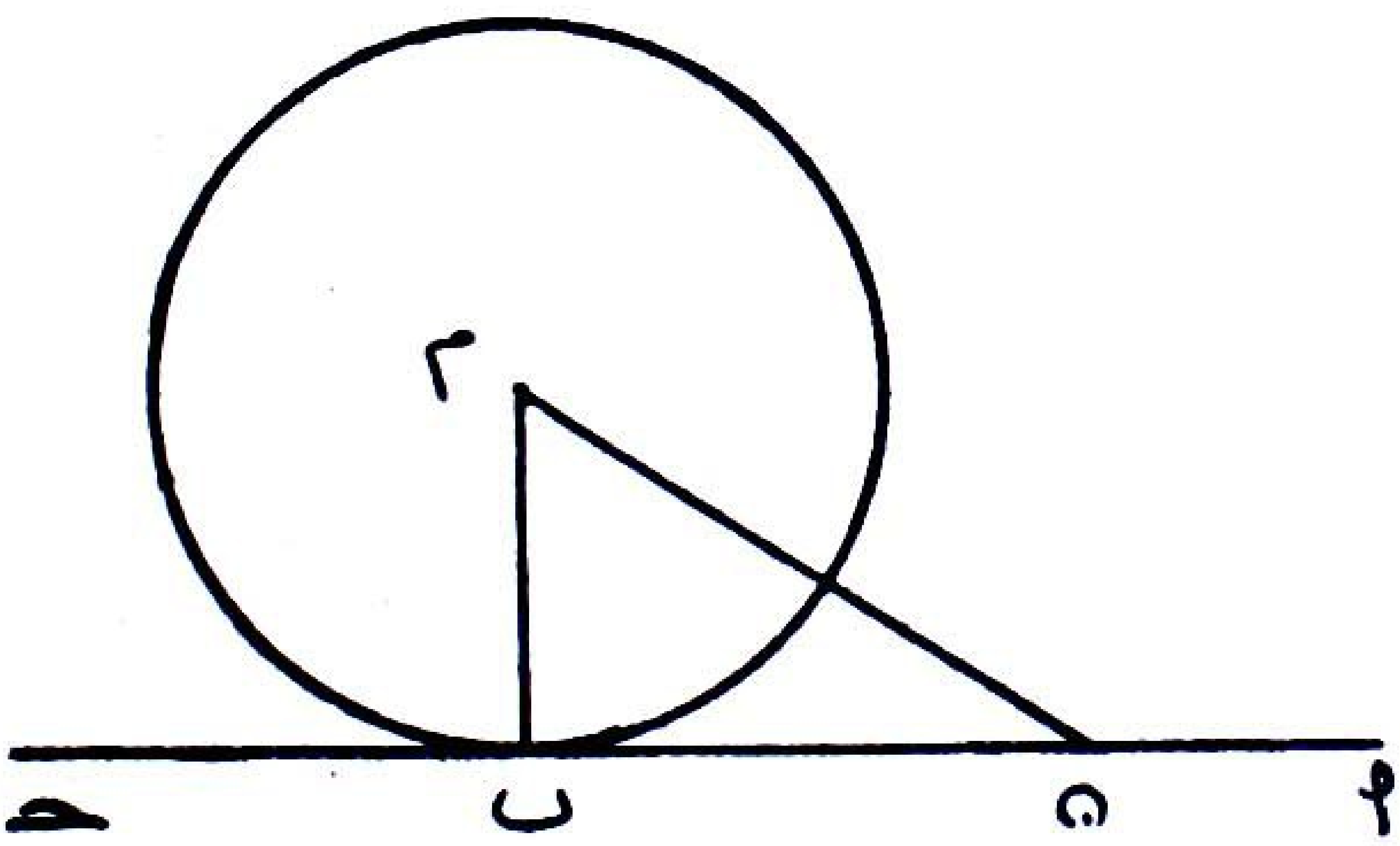
∴ م ء اكبر من نصف قطر الدائرة م حـ وبالمثل يمكن اثبات ان م حـ اقصر من اي مستقيم يرسم من م (المركز) الى ا ب

∴ م حـ اقصر المستقيمات التي يمكن رسمها من م الى ا ب

∴ م حـ عمودي على ا ب وهو المطلوب

نتائج :

نتيجة (١) : كل مستقيم يرسم عمودياً على نصف قطر الدائرة من نهايته يكون مماساً لها



الشكل (١٥٠)

المعطيات : م ب نصف قطر في الدائرة م ، ا ب حـ ⊥ م ب من نقطة ب الشكل (١٥٠)

المطلوب : اثبات ان ا ب حـ مماس للدائرة في ب

العمــل : نفرض نقطة اخرى مثل ه على ا ب ثم نصل م ه

البرهـان: △ م ب ه قائم الزاوية في ب

∴ م ه > م ب

∴ د تقع خارج الدائرة

وبالمثل يمكن اثبات ان اي نقطة اخرى على ا ب حـ تقع خارج الدائرة

∴ ا ب حـ لا يشترك مع محيط الدائرة الا في نقطة واحدة هي ب

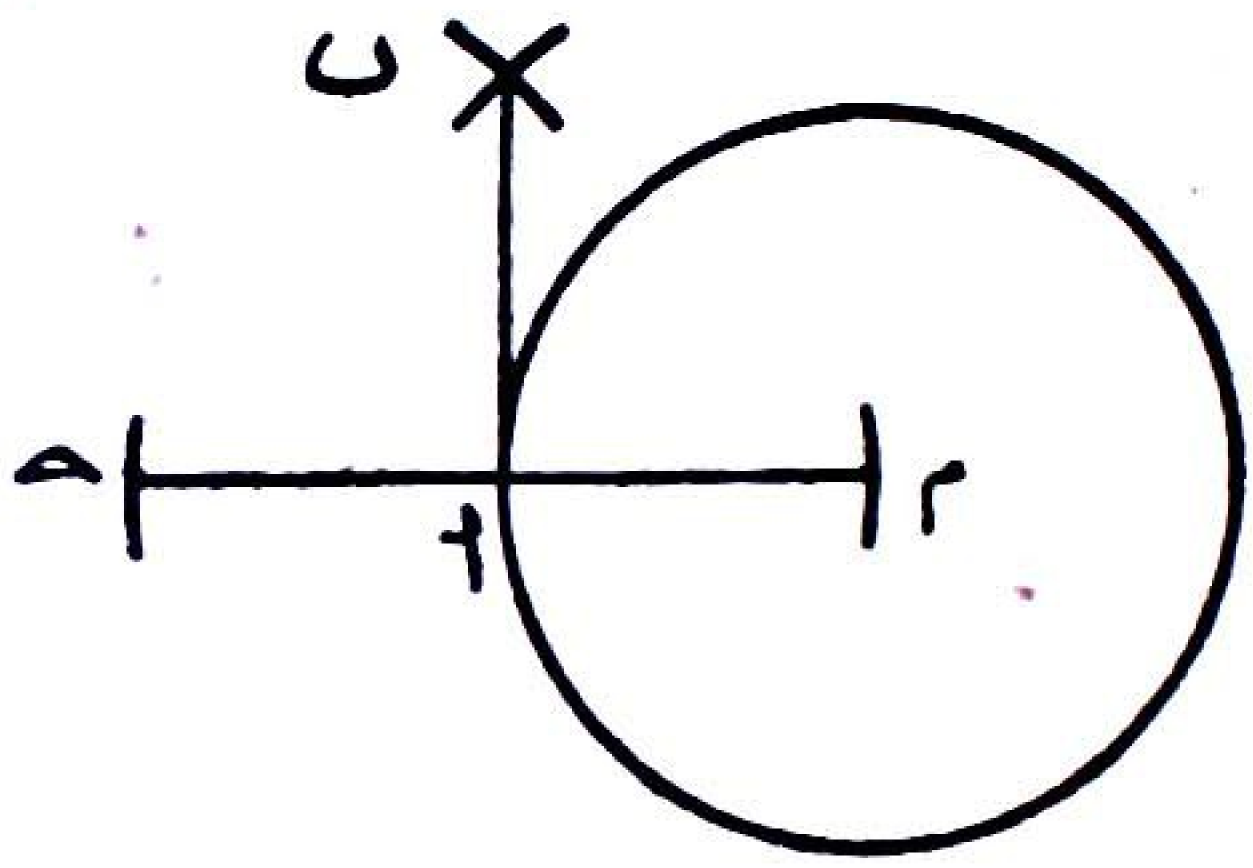
∴ ا ب حـ يمس الدائرة في ب

وهو المطلوب

نتيجة (٢) :

« لا يمكن ان يرسم سوى مماس واحد لدائرة من نقطة مفروضة على محيطها »

وذلك لأنه لا يمكن ان يقام سوى عمود واحد على نصف القطر من نقطة التماس .



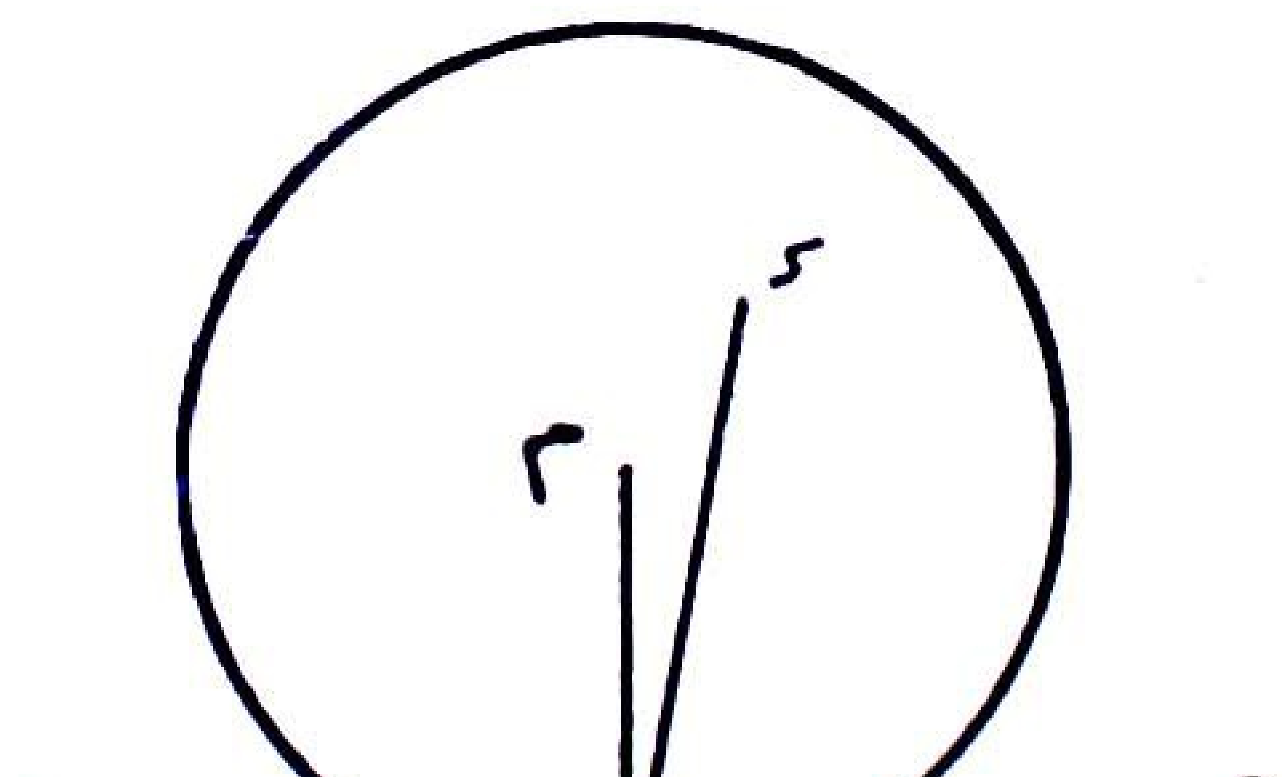
الشكل (١٥١)

نتيجة (٣) :

« العمود المقام على المماس من نقطة التماس يمر بالمركز »

المعطيات : ا ب مماس للدائرة في نقطة حـ ،

حـ ى ⊥ المماس ا ب



الشكل (١٥٢)

المطلوب : اثبات ان حـ ء يمر بالمركز م

البرهان : ∵ حـ ء ⊥ ا ب ∴ ∠ ء حـ ا = ق

ولكن نصف القطر م حـ ⊥ على المماس ا حـ ب (نظرية)

∴ ∠ م حـ ا = ق

∴ ∠ ء حـ ا = ∠ م حـ ا

∴ حـ ء ينطبق على حـ م

اي ان العمود حـ ء المقام على ا ب من نقطة التماس ينطبق على نصف القطر المار بنقطة التماس أي أن حـ ء يمر بالمركز .

وهو المطلوب

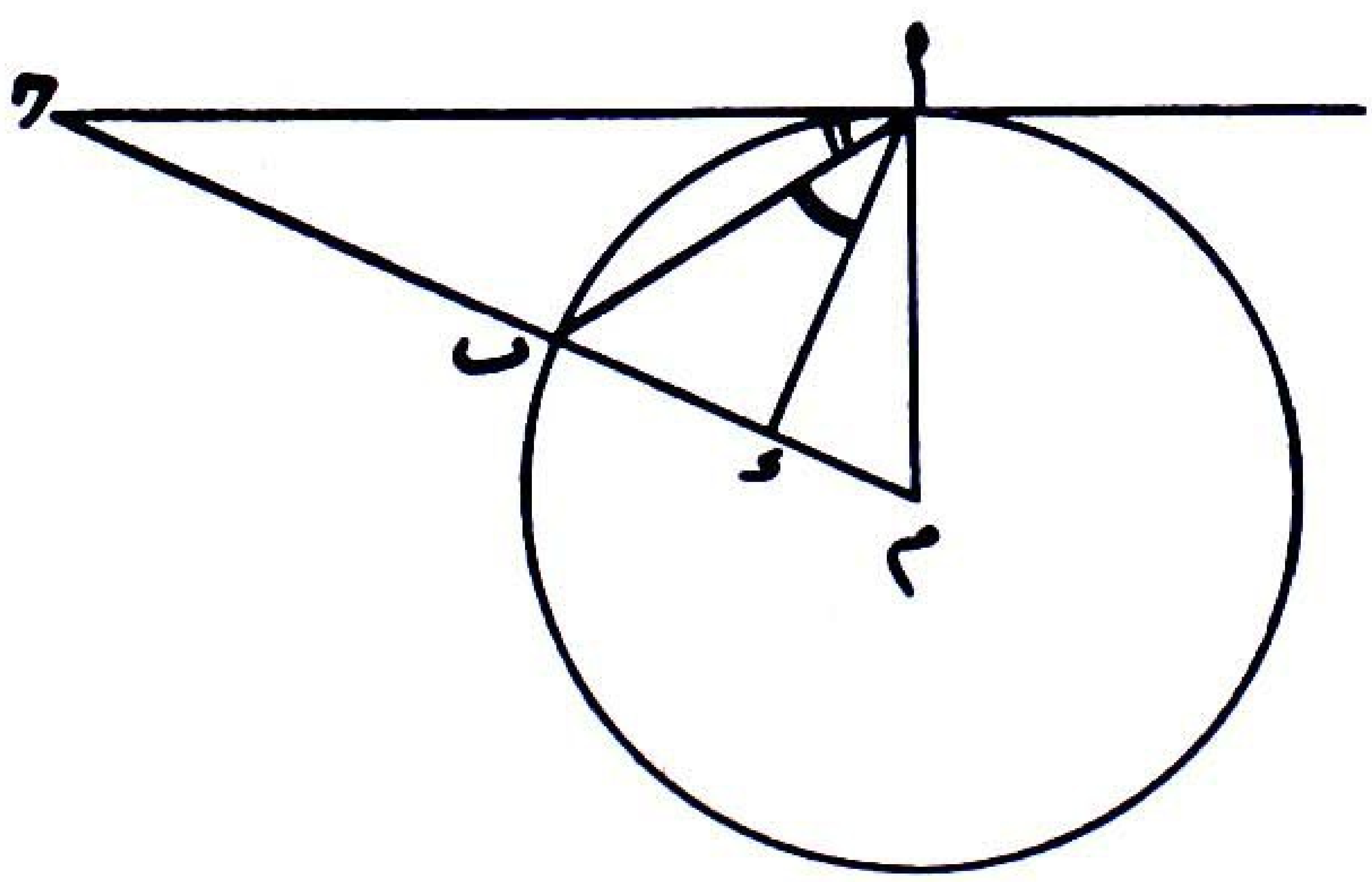
نتيجة (٤) :

« العمود النازل من المركز على المماس يمر بنقطة التماس »

تمرين محلول (١) :

م ا ، م ب نصفا قطرين في دائرة مركزها م ويحصران بينهما زاوية حادة رسم المماس للدائرة في ا فلاقى امتداد م ب في حـ ثم وصل ا ب - ورسم ا ء بحيث يصنع مع ا ب الزاوية ب ا ء = ∠ حـ ا ب ولاقى م حـ في ء

برهن ان ا ء ⊥ م حـ



الشكل (١٥٣)

المعطيات : م ا ، م ب نصفا قطرين في دائرة ، ا حـ مماس لها في ا . وصل ا ب ثم رسم ا ى بحيث يصنع مع ا ب زاوية ى ا ب = زاوية ب ا حـ . الشكل (١٥٣)

المطلوب : اثبات ان ا ى ⊥ م حـ

البرهان : ∵ م ا نصف قطر الدائرة ، ا حـ مماس لها

∴ ∠ م ا حـ = ق نظرية

∴ ∠ م ا ى + ∠ ى ا ب + ∠ ب ا حـ = ٩٠° .... (١)

ولكن ∠ م ا ى + ∠ ى ا ب = ∠ م ا ب = ∠ م ب ا

∴ ∠ م ا ب + ∠ ب ا حـ = ٩٠°

∴ ∠ م ب ا + ∠ ب ا حـ = ٩٠°

∴ ∠ م ب ا + ∠ ى ا ب = ٩٠° (لأن ∠ ى ا ب = ∠ ب ا حـ)

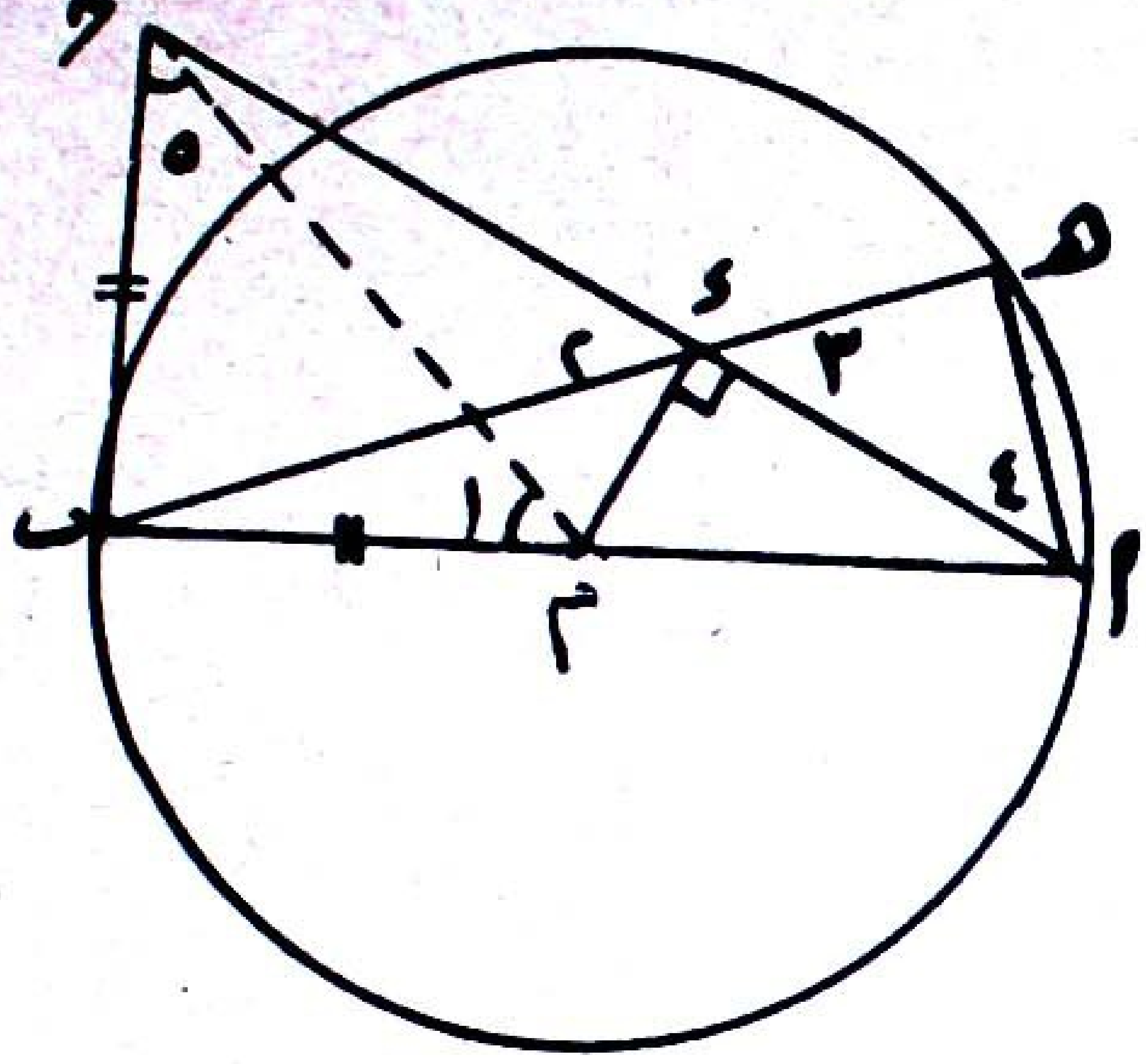
∴ ∠ ا ى ب = ٩٠°

∴ ا ى ⊥ م حـ

وهو المطلوب

تمرين محلول (٢) :

ا ب قطر دائرة مركزها م رسم من ب مماس للدائرة واخذ على المماس البعد ب حـ = ب م ثم وصل ا حـ وانزل عليه العمود م ى ووصل ب ى ثم مد على استقامته فقطع محيط الدائرة في هـ . برهن ان △ هـ ا ى متساوي الساقين .



المعطيات : ا ب قطر دائرة
مركزها م ، ب ح مماس
= ب م
م ء ⊥ ا ح ، ب ء ه وتر
المطلوب : اثبات ان △ ه ا ء
متساوي الساقين

الشكل (١٥٤)

البرهان : ∵ م ب نصف قطر ، ب ح مماس

∴ ∠ م ب ح = ق

، ∵ ب م = ب ح

∴ ∠ ١ = ∠ ٥ = ٤٥°

، ∵ م ء ⊥ ا ح ، م ب ⊥ ب ح

∴ ∠ م ء ح + ∠ م ب ح = ٢ ق

∴ الشكل م ء ح ب رباعي دائري

∴ ∠ ١ = ∠ ٢ = ∠ ٣ = ٤٥°

، ∵ ا ب قطر الدائرة ∴ ∠ ا ه ء = ق ولكن ∠ ٣ = ٤٥°

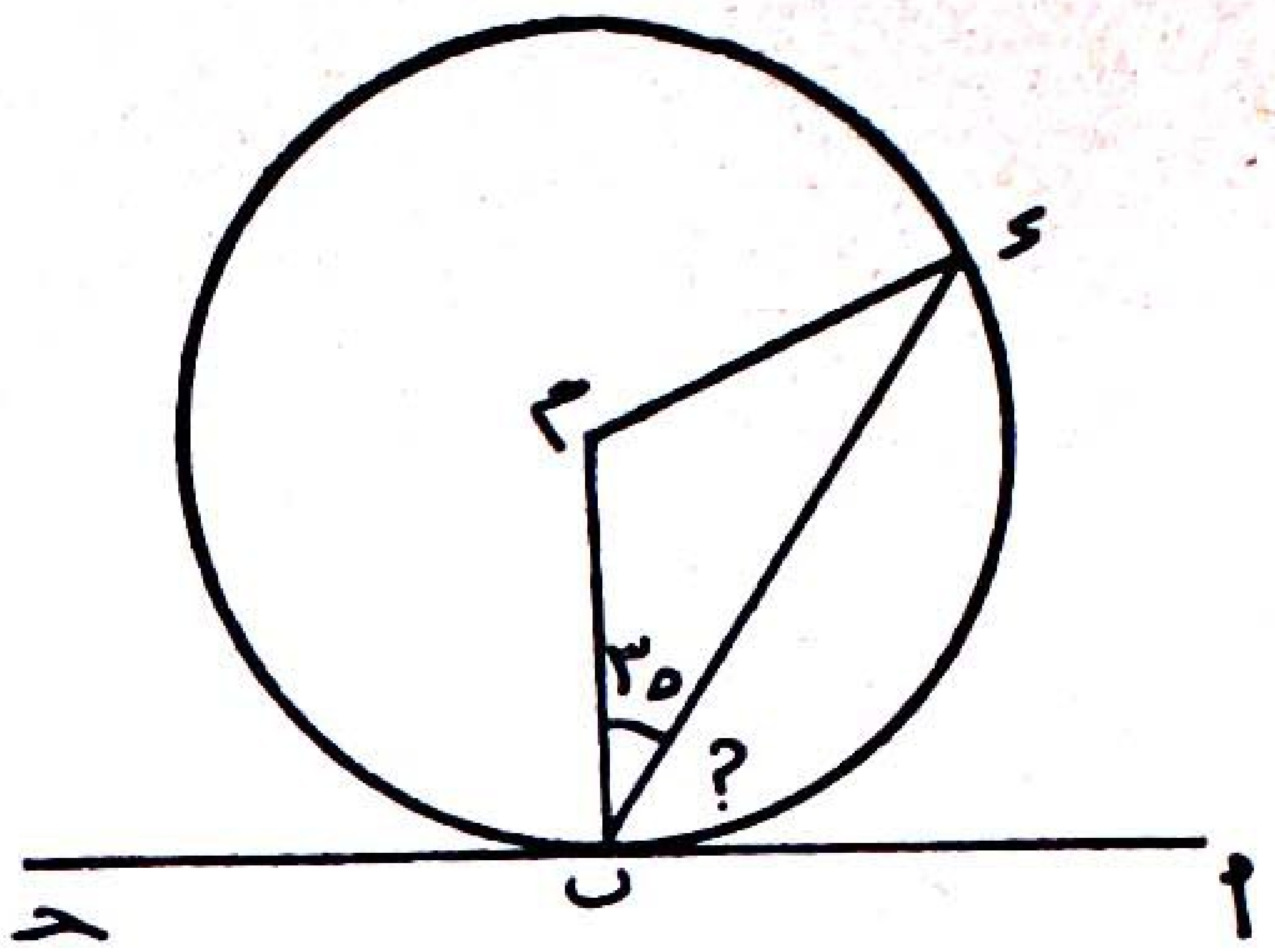
∴ ∠ ٤ = ٤٥° ∴ ∠ ٣ = ∠ ٤

∴ △ ه ا ء متساوي الساقين

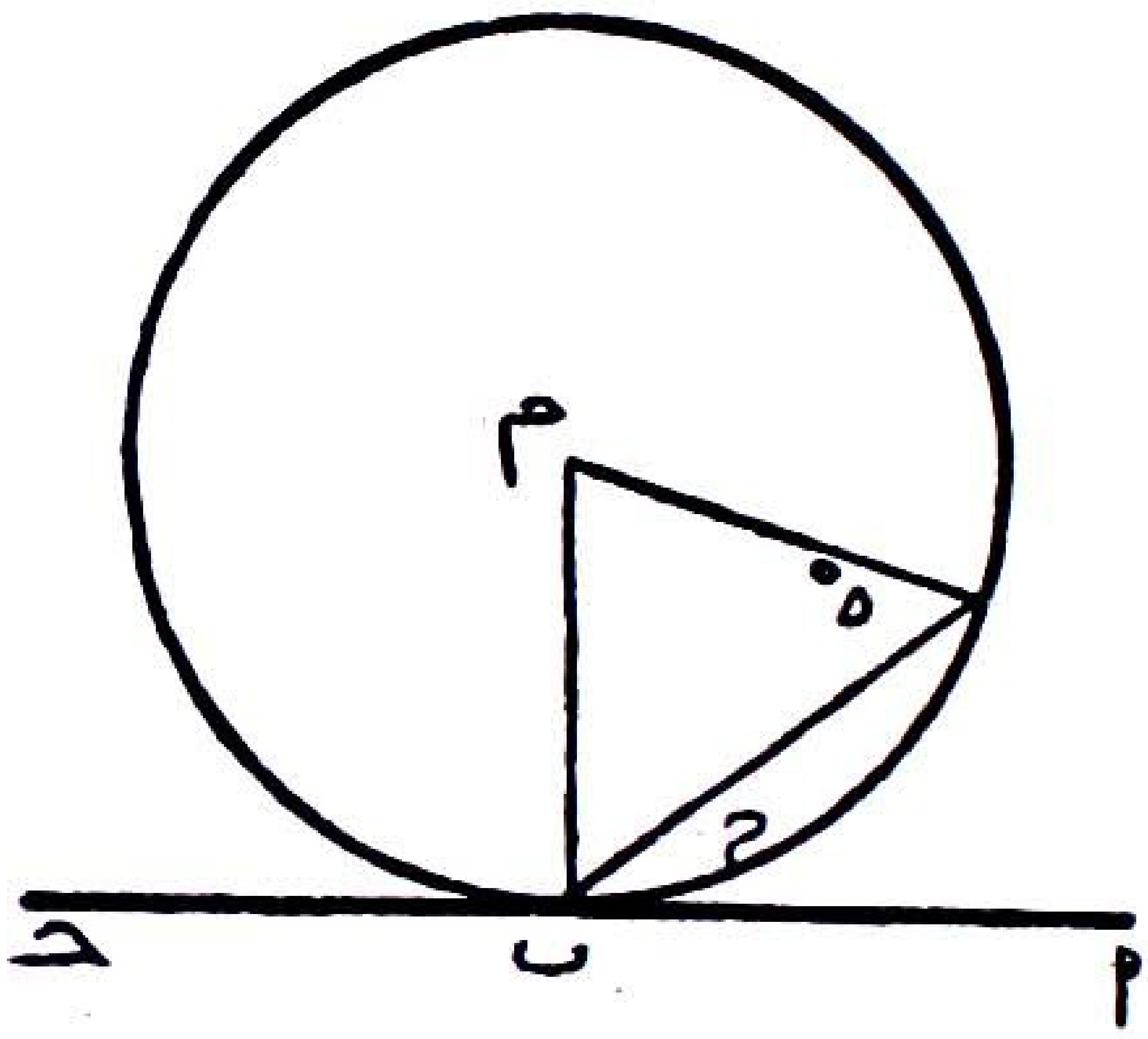
وهو المطلوب

تمرين (٢٦)

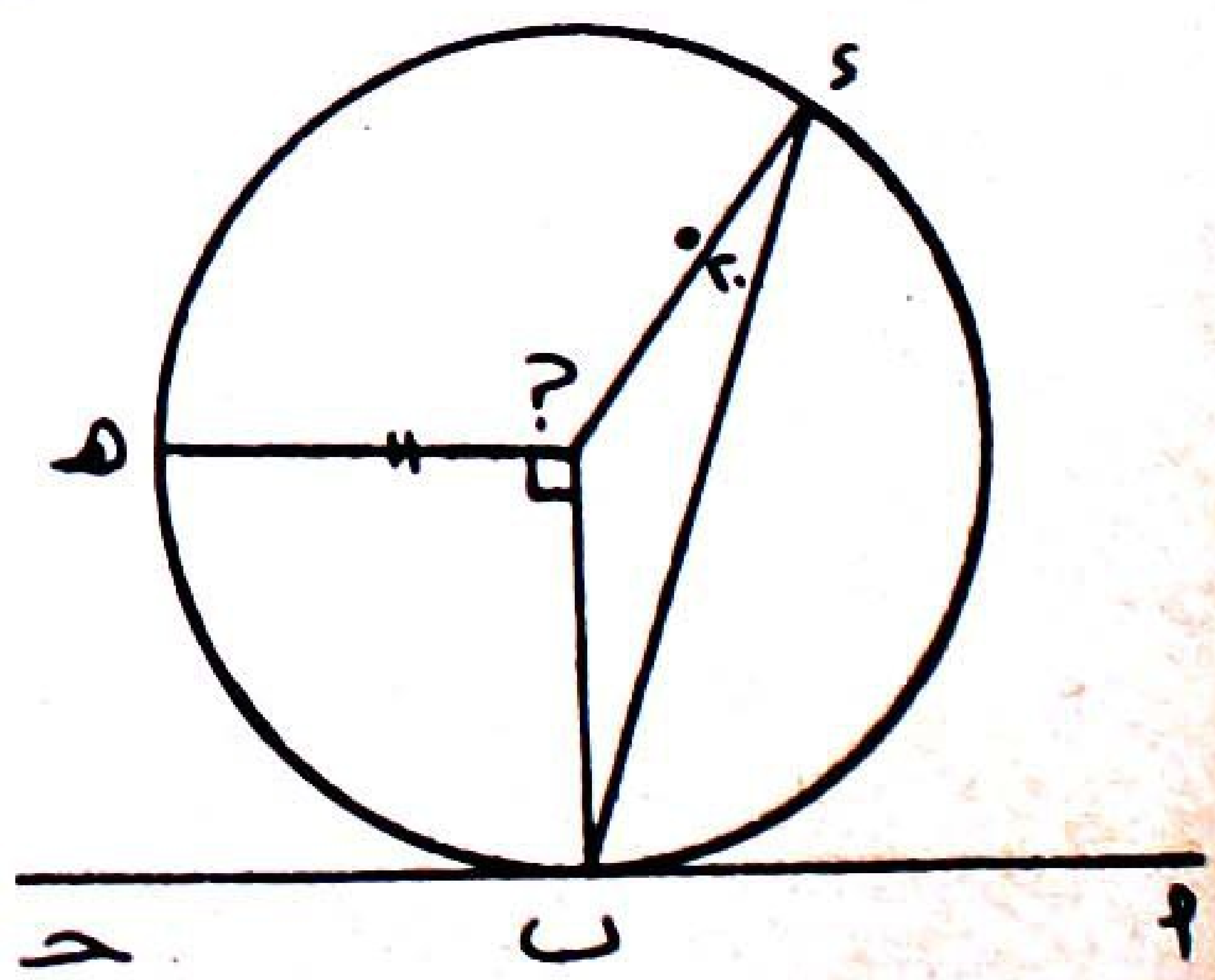
١ – اكتب المجهول في كل من الاشكال الآتية :



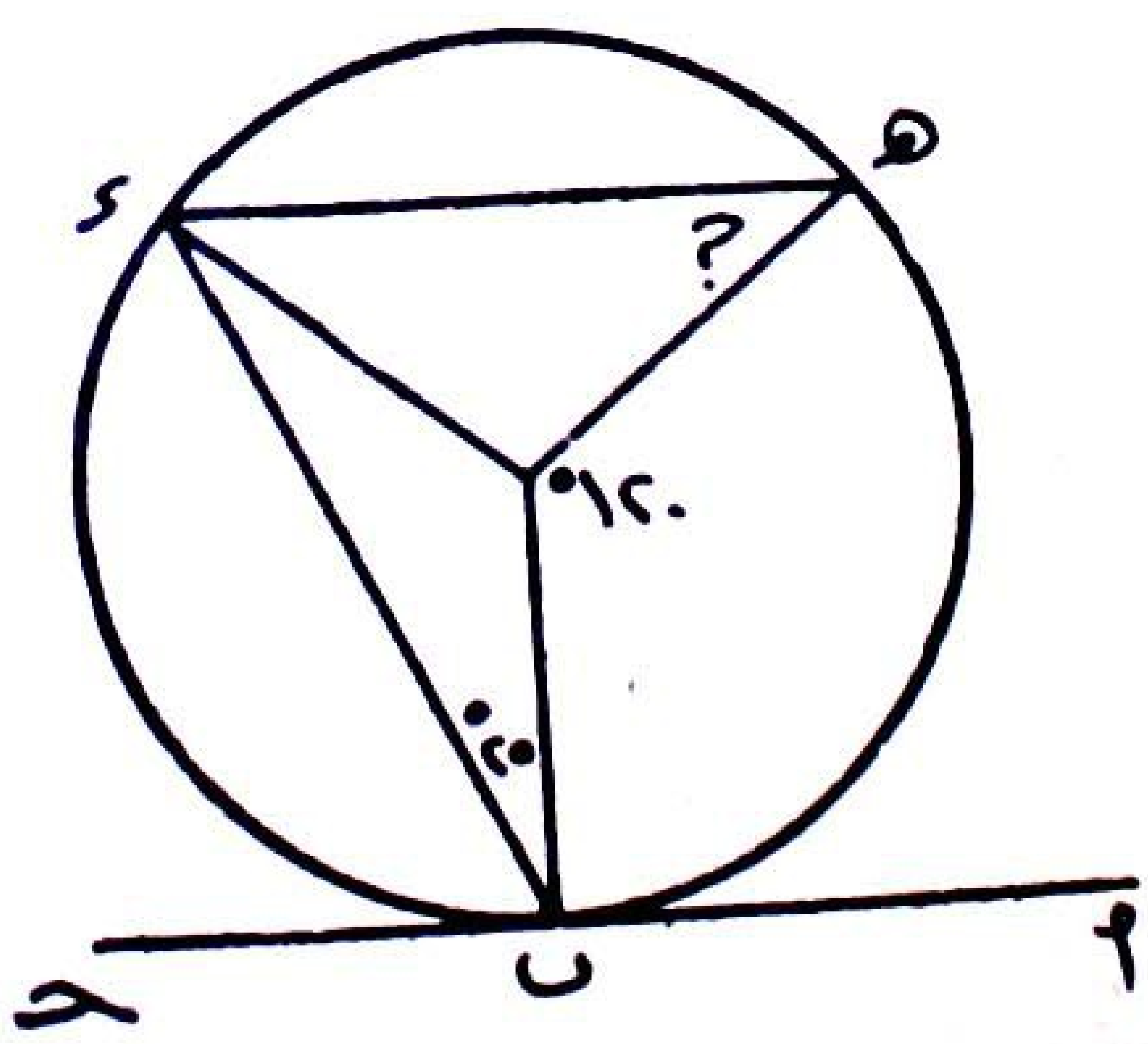
الشكل (١٥٥)



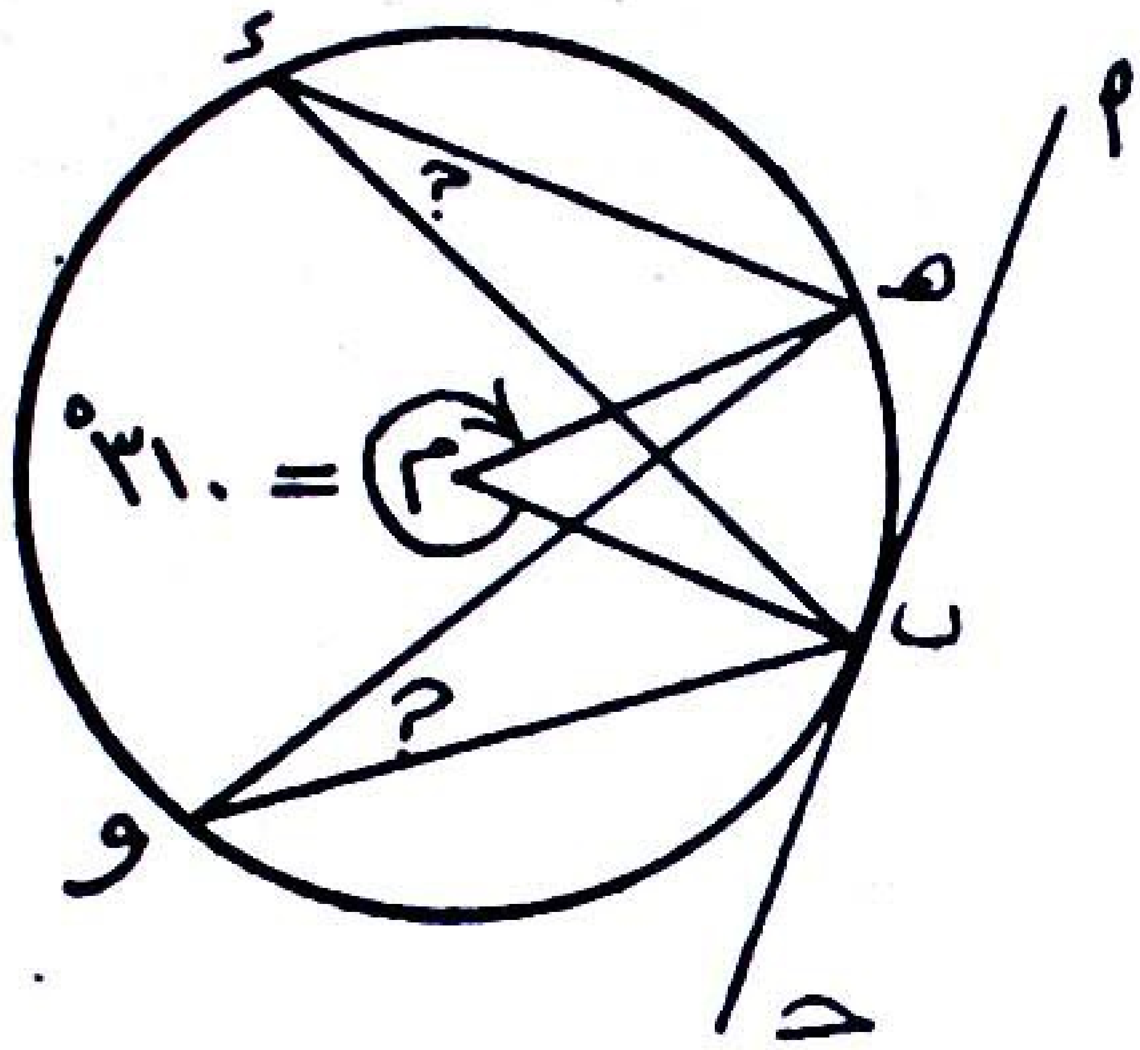
الشكل (١٥٦)



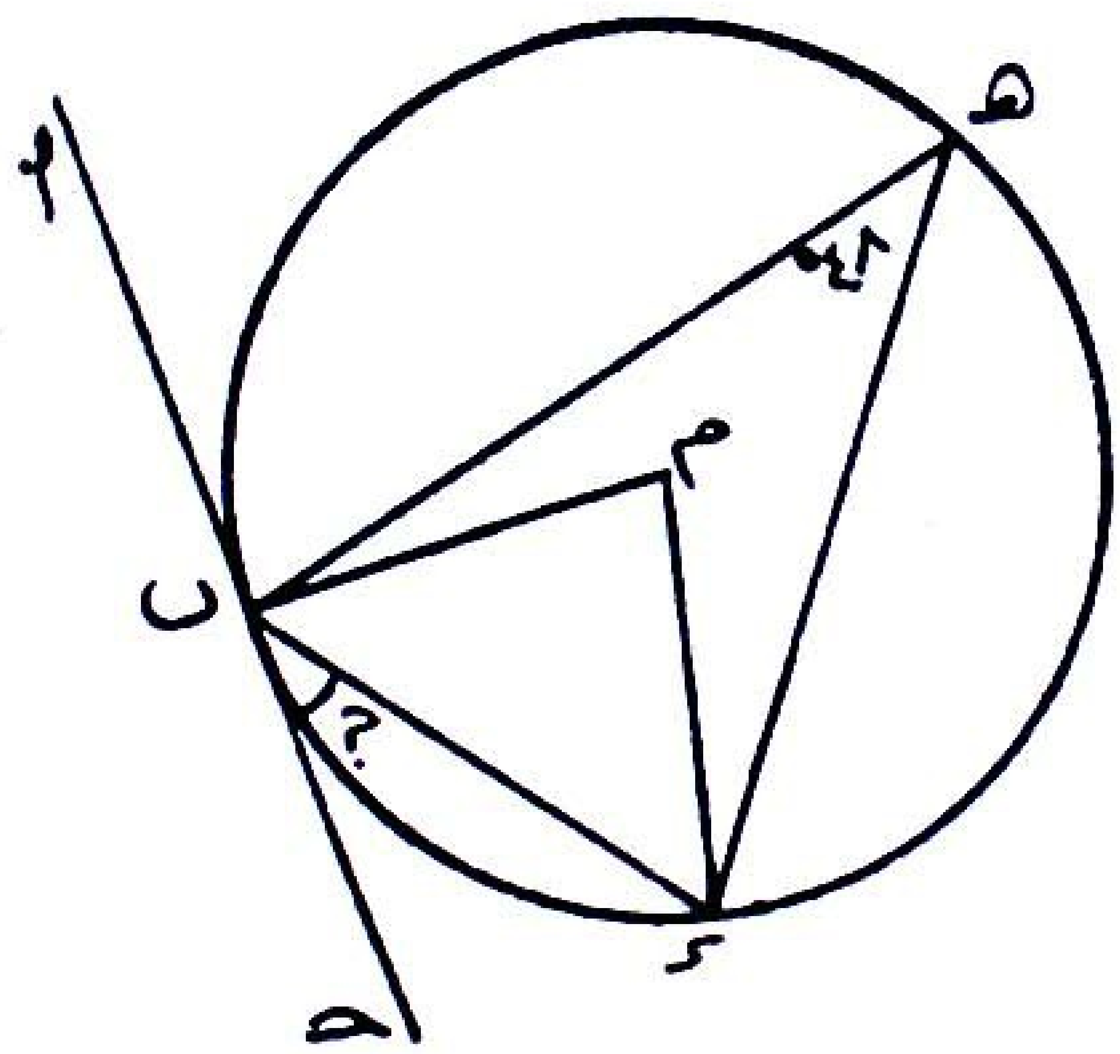
الشكل (١٥٧)



الشكل (١٥٨)



الشكل (١٥٩)



الشكل (١٦٠)

٢ – ا ب حـ مماس للدائرة م رسم الوتر ء هـ // ا ب حـ ويقطع م ب في و
برهن ان و منتصف ء هـ

٣ – ا ب وتر في دائرة رسم ا س ، ب س مماسان للدائرة في ا ، ب .
اثبت ان ا س = ب س

٤ – دائرتان متحدتا المركز رسم المماس ا ب حـ يمس الدائرة الصغرى في ب ويقطع الدائرة الكبرى في ا ، حـ . اثبت ان ا ب = ب حـ

٥ – ا ب حـ △ قائم الزاوية في ا رسمت دائرة مركزها ا فمست حـ ب في ى برهن أن ∠ حـ ا ى = ∠ ب

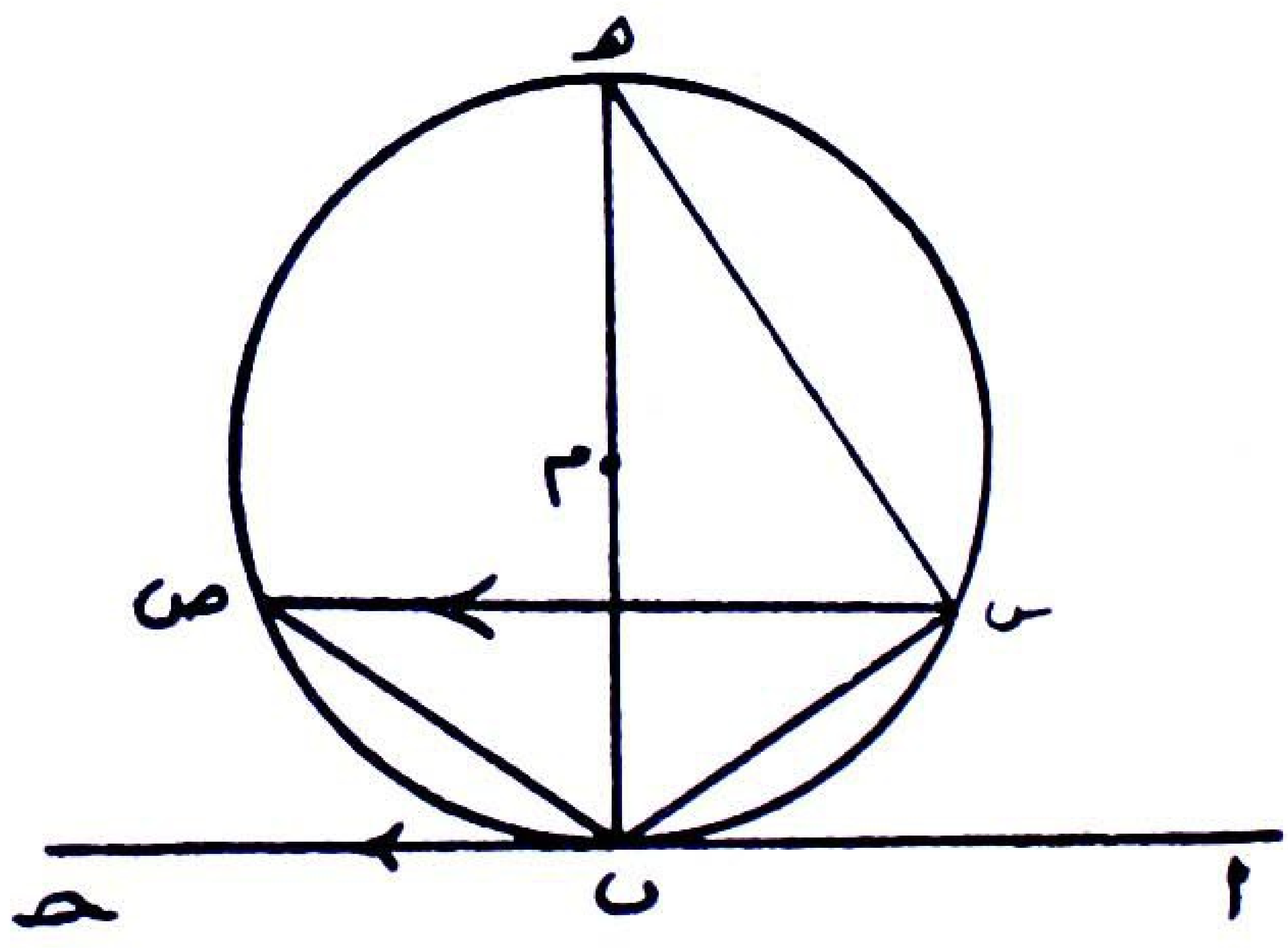
٦ – ا ب قطر في دائرة فرضت نقطة مثل حـ على المحيط وصل ا حـ ، ب حـ ثم مدا على استقامتيهما حتى لاقيا مماسي الدائرة في ب ، ا في نقطتي هـ ، ى على الترتيب اثبت ان ∠ هـ تتمم ∠ ى

٧ – ا ب قطر دائرة مركزهـا م رسم من ب مماس للدائرة ومن ا رسم مستقيمان قطعا الدائرة في هـ ، و ثم قطعا المماس في حـ ، ى على الترتيب اثبت ان الشكل حـ هـ و ى رباعي دائري

٨ – م ا ، م ب نصفا قطرين متعامدين في الدائرة م . رسم من ا ، ب مماسا الدائرة فتلاقيا في حـ . برهن ان الشكل م ا حـ ب مربع

٩ – ا ب مماس للدائرة رسم الوتر ى هـ يوازي المماس برهن ان ب منتصف القوس ى ب هـ

١٠ – ا ب ، ا حـ مماسان للدائرة م من نقطة ا الواقعة خارج الدائرة .
برهن ان ∠ ب ا م = ∠ حـ ا م
، المماس ا ب = المماس ا حـ



الشكل (١٦١)

١١ – في (الشكل ١٦١) ا ب حـ مماس للدائرة م

ب هـ قطر فيها ، س ص وتر يوازي ا ب

فإذا كانت

(أ) ∠ س ب ا = ٣٨° فما قيمة كل من ∠ س ب هـ ، ∠ س هـ ب

(ب) ∠ ب ص س = ٤٢° فما قيمة زاوية س ب ا

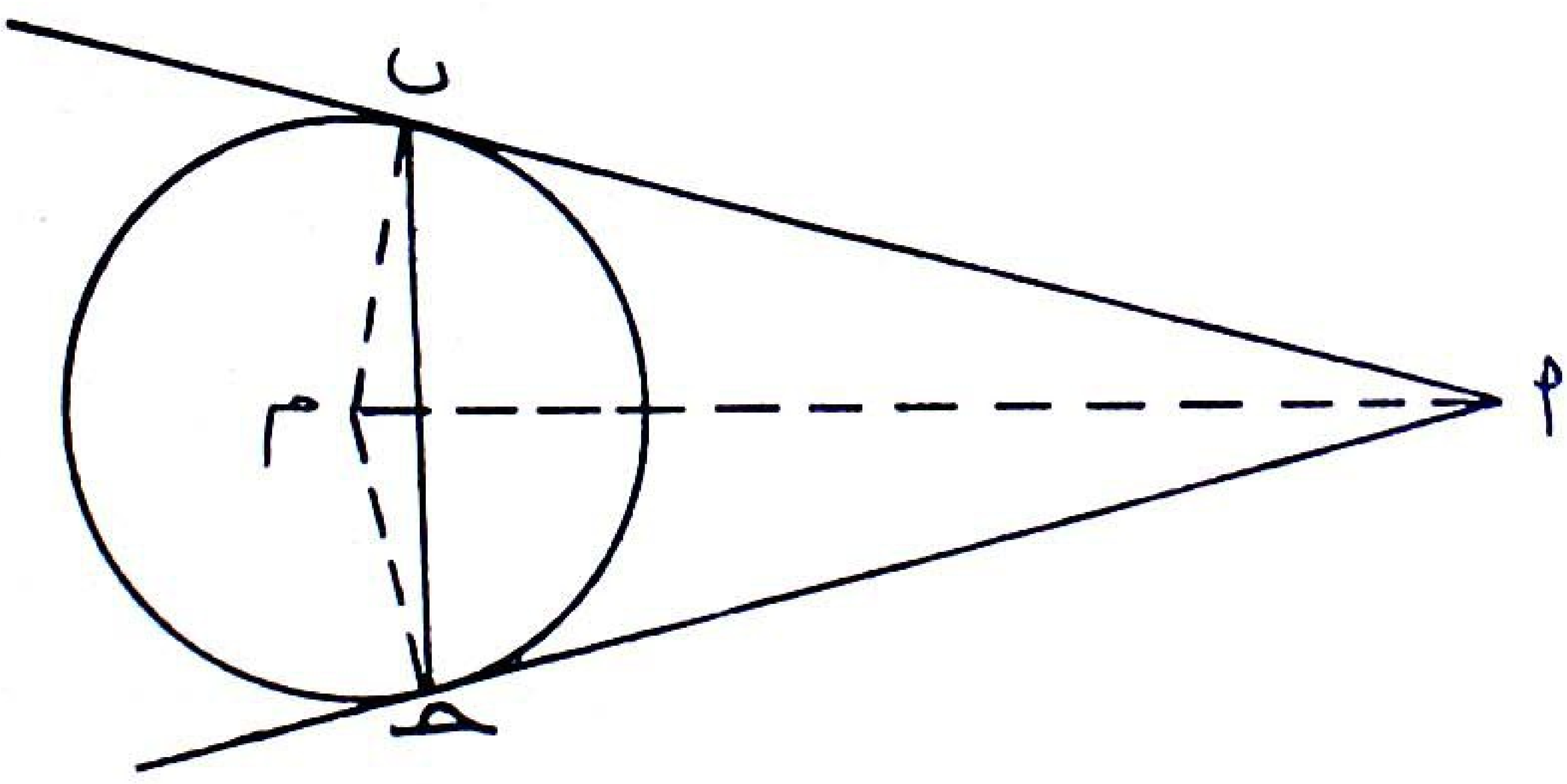
(حـ) ∠ س ب حـ = ١٥٥° فما قيمة زاوية س م ب

١٢ – ا نقطة خارج دائرة م – رسم المماس ا ء – والقاطع ا ب حـ يقطع المحيط في ب ، حـ ثم نصف ب حـ في نقطة هـ – ورسم الوتر ء و مارا بنقطة هـ ثم رسم مماس الدائرة في نقطة و لاقى امتداد ا حـ في س

اثبت ان :– △ م ا س متساوي الساقين

نظرية (١٦)

المماسان المرسومان من نقطة خارج دائرة متساويان



الشكل (١٦٢)

المعطيات : دائرة مركزها م ، ا نقطة خارجها رسم منها المماسان ا ب ، ا حـ يمسان الدائرة في ب ، حـ الشكل (١٦٢)

المطلوب : اثبات ان ا ب = ا حـ

العمل : نصل م ا ، م ب ، م حـ

البرهان : ∵ ا ب ، ا حـ مماسان للدائرة في ب ، حـ

∴ كل من زاويتي ا ب م ، ا حـ م = ق (نظرية)

في $\triangle\triangle$ ا ب م ، ا حـ م

فيهما { م ب = م حـ نصفا قطرين في دائرة واحدة
م ا مشترك
$\angle$ ا ب م = $\angle$ ا حـ م = ق }

∴ ينطبق $\triangle\triangle$ كل على الآخر تمام الانطباق (نظرية)

وينتج من التطابق أن

ا ب = ا حـ

وهو المطلوب

نتائج :

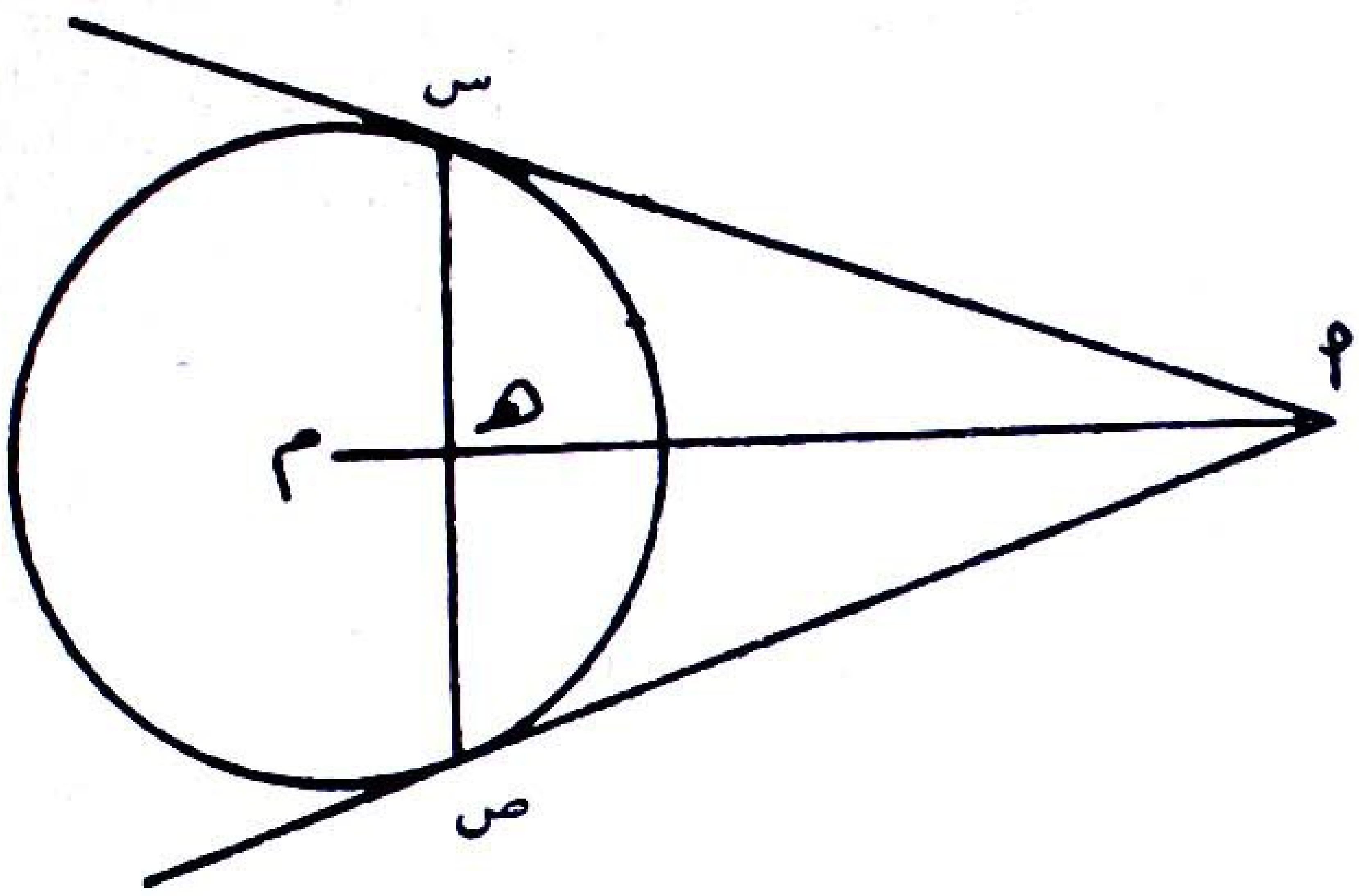
نتيجة (١) : اذا فرضت نقطة خارج دائرة ورسم منها مماسان لها فانها يقابلان زاويتين مركزيتين متساويتين .

من الشكل السابق نجد ان $\angle$ ب م ا = $\angle$ حـ م ا

نتيجة (٢) : المستقيم الواصل من النقطة التي رسم منها المماسان الى مركز الدائرة ينصف الزاوية المحصورة بين المماسين .

ملاحظة : في الشكل (١٦٣)

المستقيم س ص الواصل بين نقطتي التماس يسمى « وتر التماس »



الشكل (١٦٣)

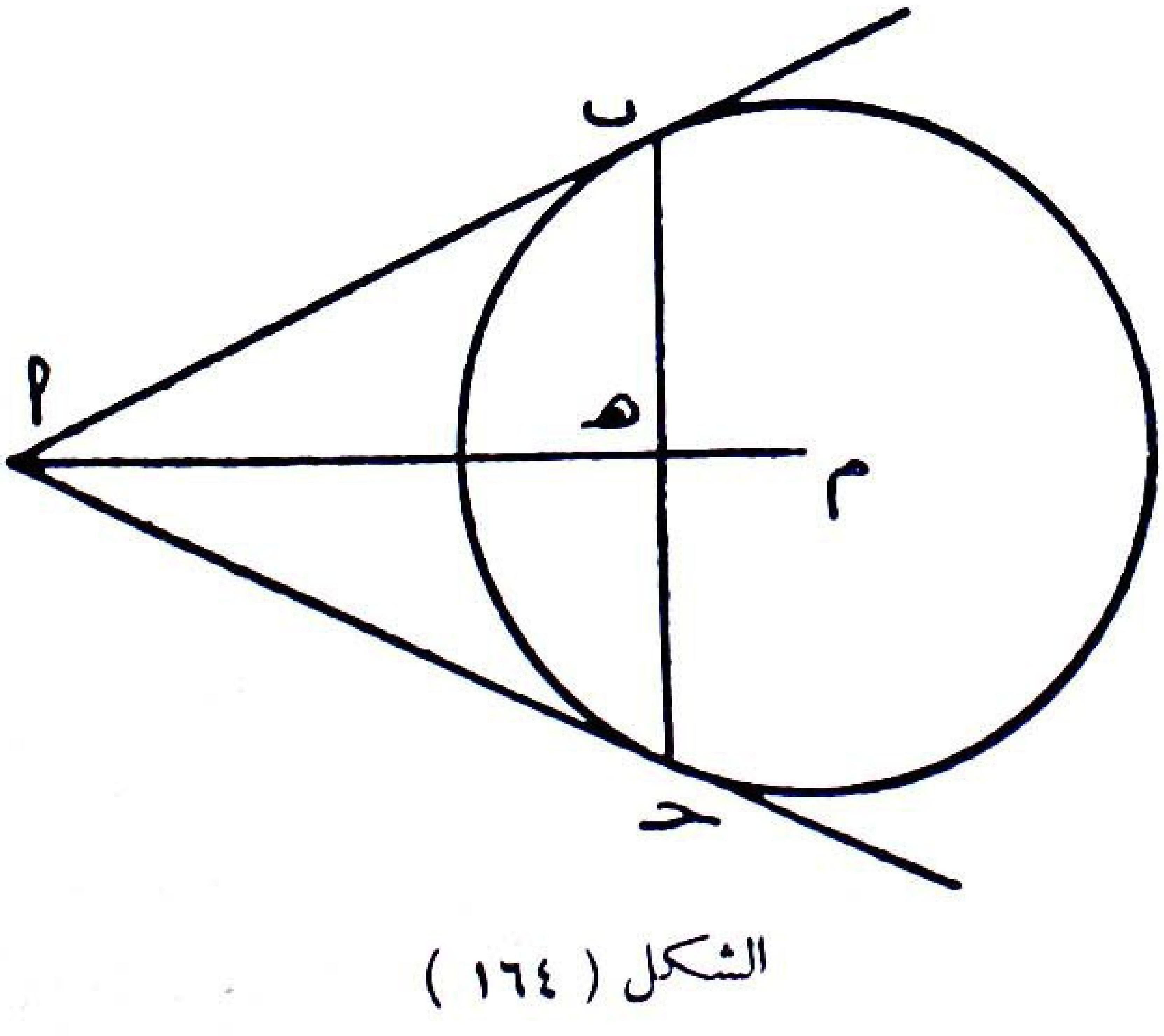
نتيجة (٣):

المستقيم الواصل من النقطة التي رسم منهـــا المماسان الى مركز الدائرة ينصف وتر التماس ويكون عموداً عليه .

البرهان: في الشكل (١٦٤):

Δ ا ب حـ فيه ا ب = ا حـ ، ا هـ ينصف ∠ ا (نتيجة ٢)

∴ ا هـ ينصف ب هـ ويكون عمودا عليه



الشكل (١٦٤)

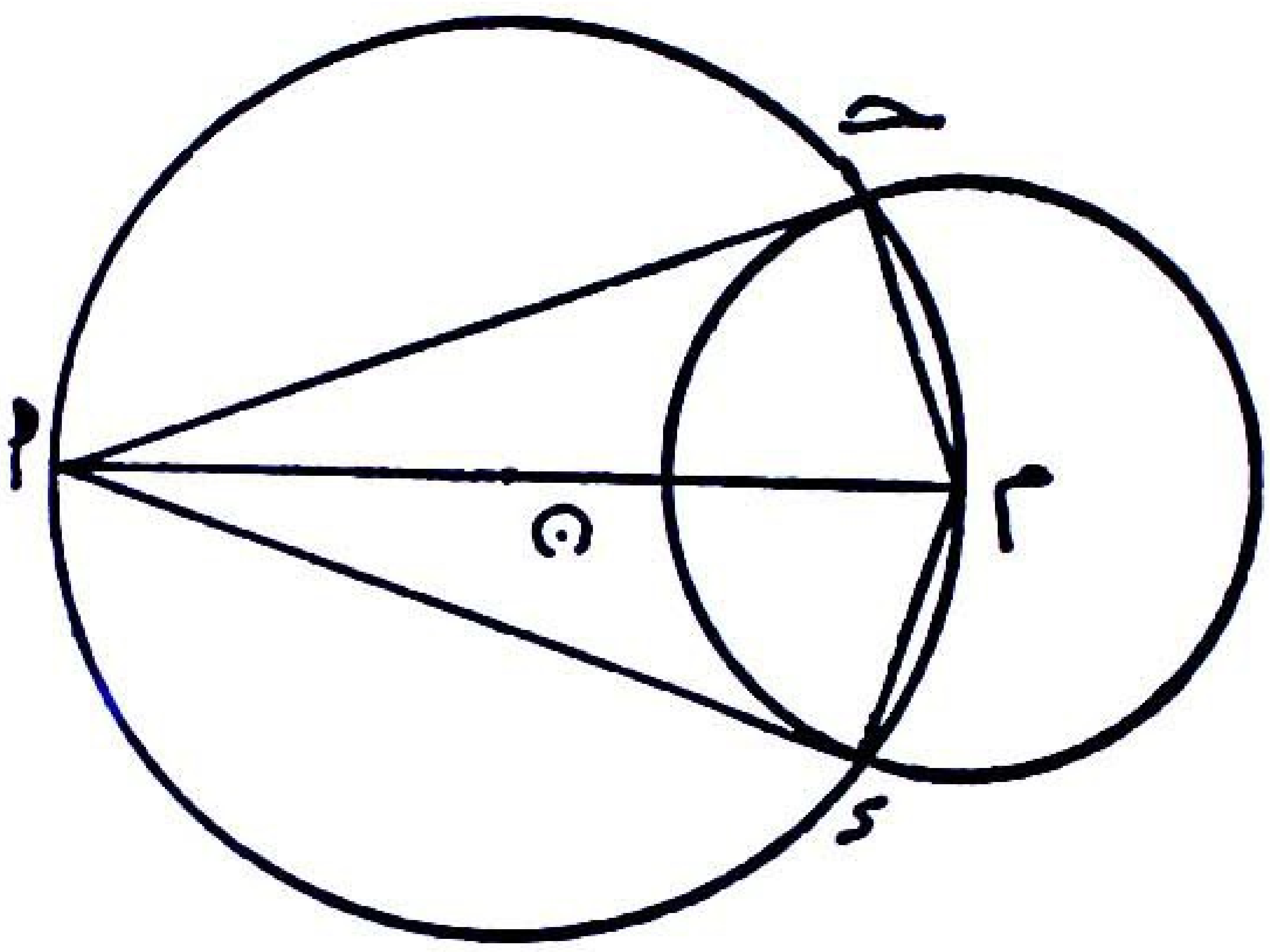
ملاحظة :

الشكل ا ب م حـ فيه ∠ ب = ٩٠° ، ∠ حـ = ٩٠°

(انظر الشكل المرسوم للنظرية)

∴ الشكل ا ب م حـ رباعي دائري

عملية (٢)



الشكل (١٦٥)

المطلوب : رسم مماس لدائرة من نقطة خارجها

المعطيات : ا نقطة خارج دائرة مركزها م

المطلوب : رسم مماس للدائرة م من نقطة ا

العمل : نصل م ا ثم نرسم دائرة قطرها م ا فتقطع الدائرة م في نقطتين حـ ، ء ثم نصل ا حـ ، ا ء فيكون كل منهما مماساً للدائرة م

البرهان : نصل م حـ فتكون ∠ ا حـ م مرسومة في نصف دائرة قطرها ا م

∴ ∠ ا حـ م = ق ∴ ا حـ ⊥ نصف القطر م حـ

∴ ا حـ مماس للدائرة في حـ

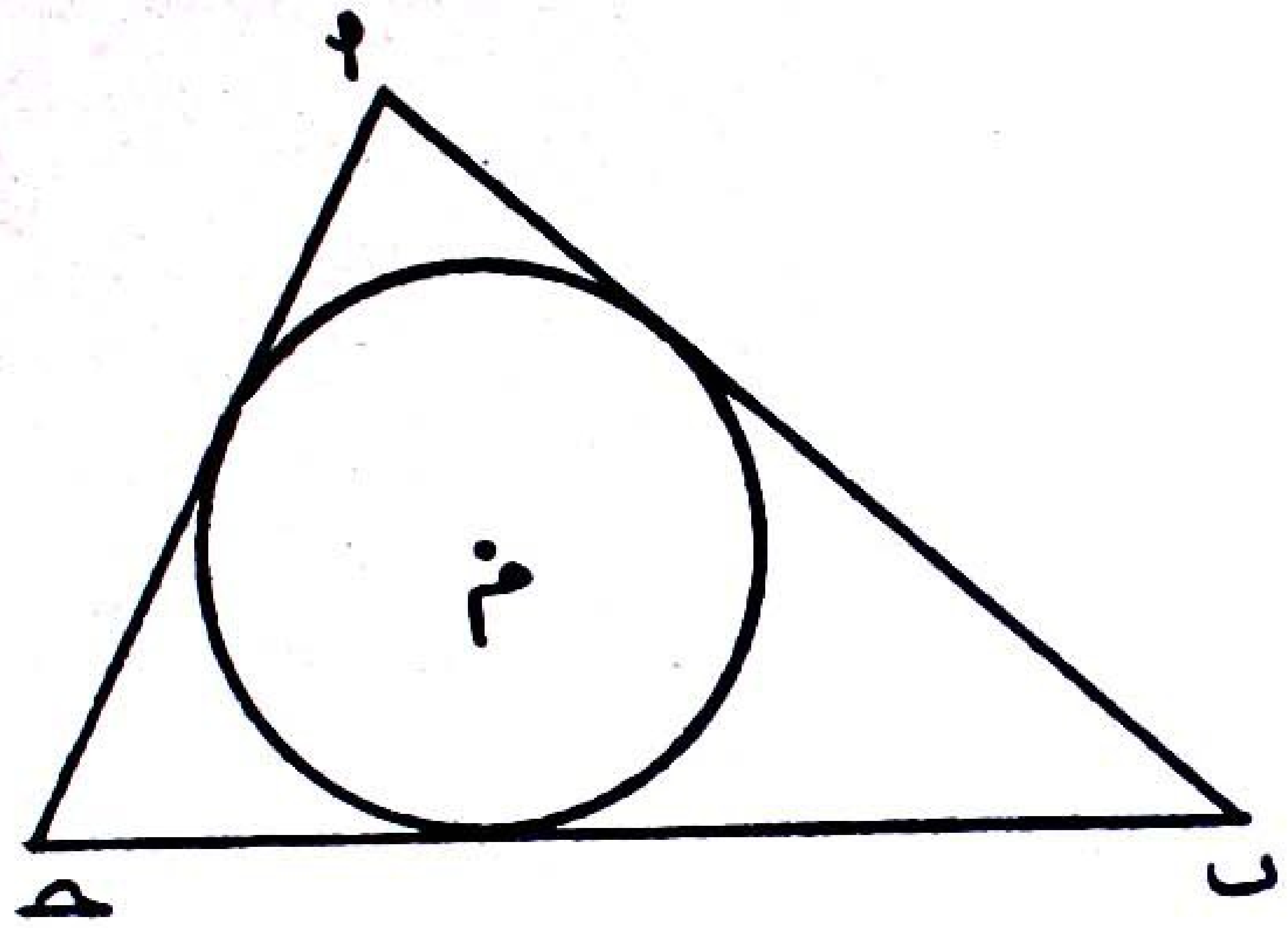
وبالمثل لو وصلنا م ء يمكن اثبات ان ا ء مماس للدائرة في ء

وهو المطلوب

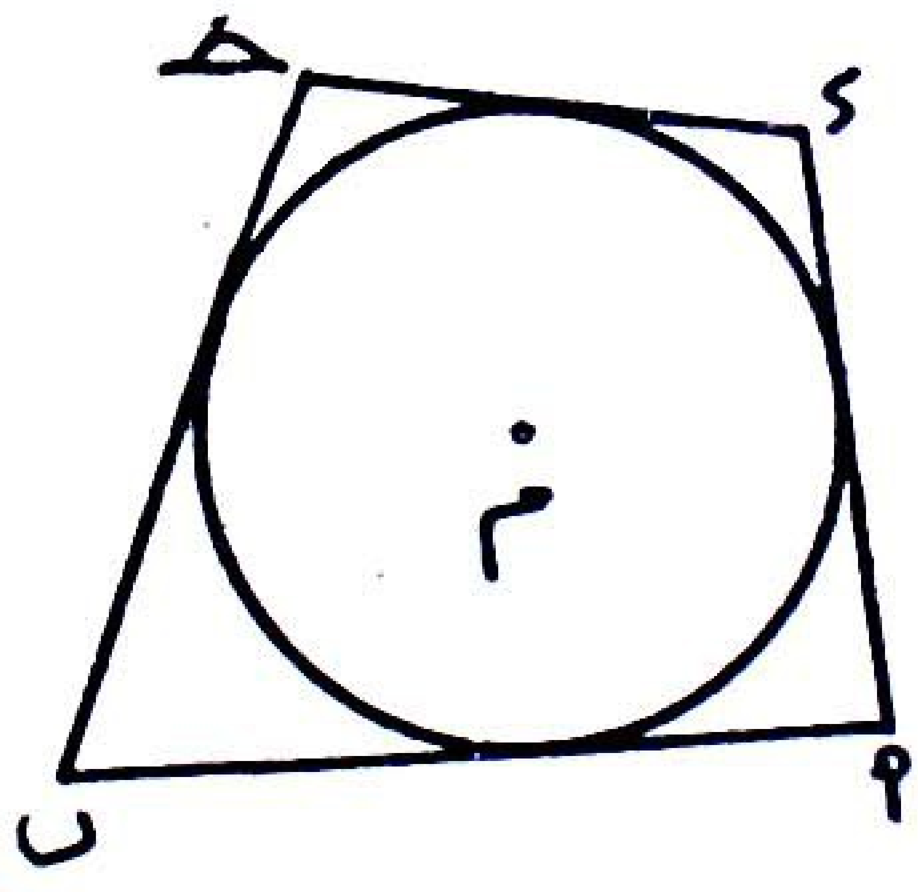
ملاحظة :

ينتج من هذه العملية انه يمكن رسم مماسين لدائرة من نقطة خارجة عنها

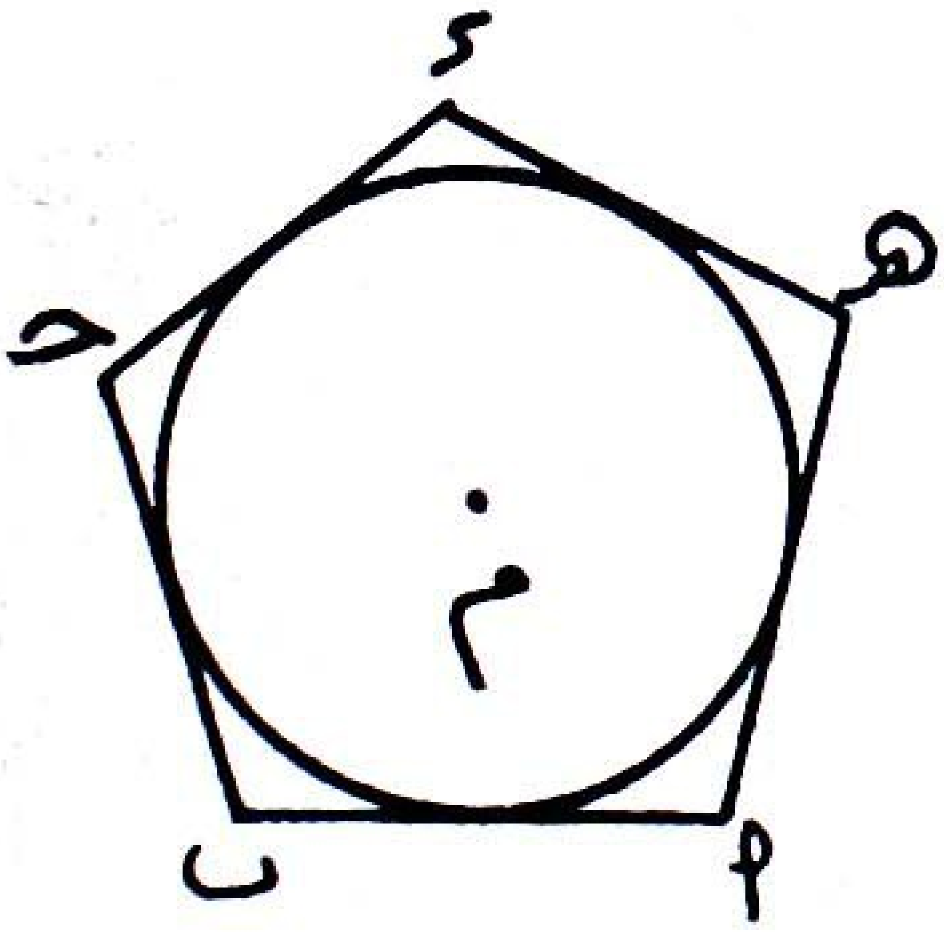
الاشكال المرسومة خارج دائرة



الشكل (١٦٦)



الشكل (١٦٧)



الشكل (١٦٨)

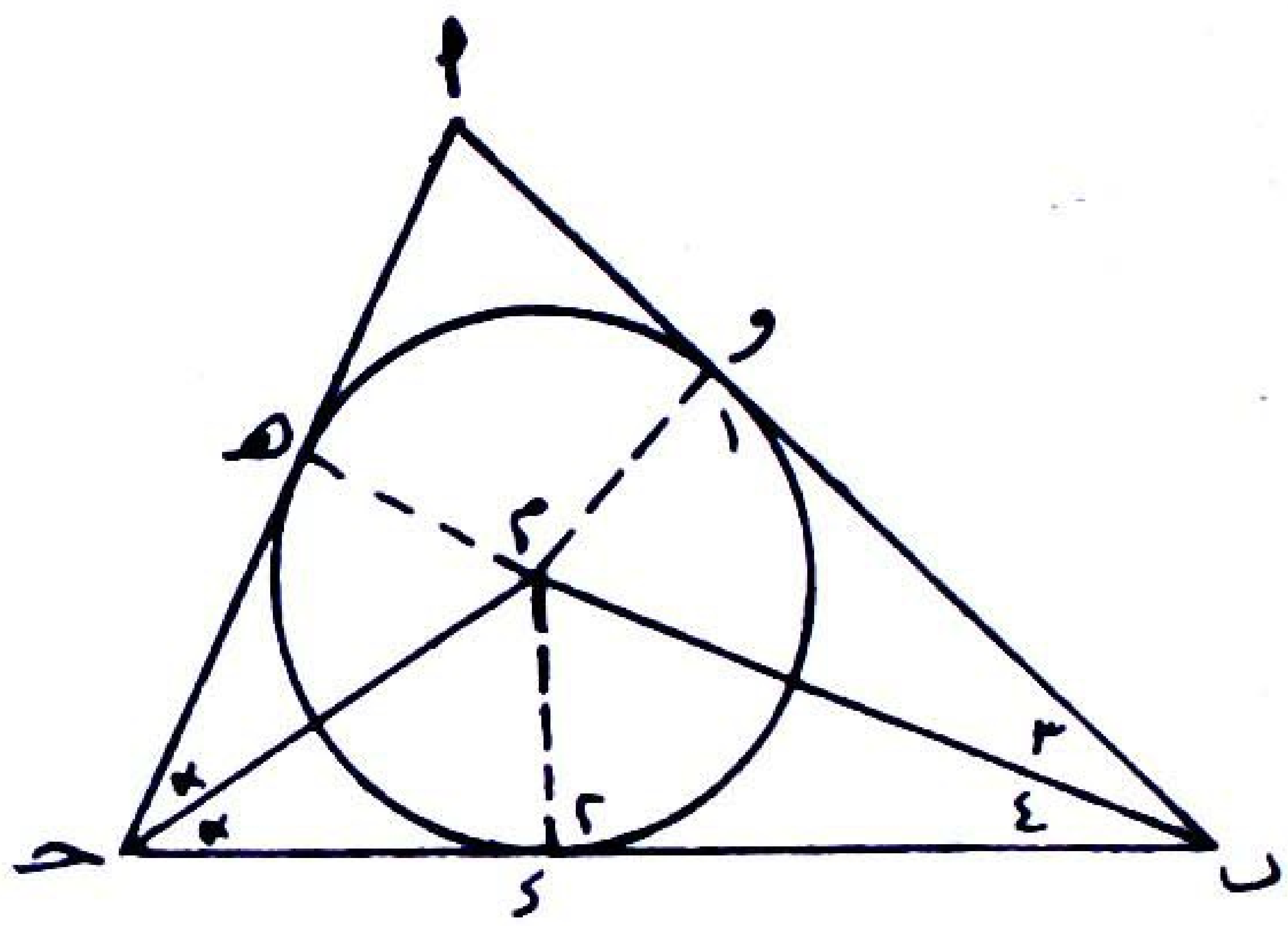
يقال ان الشكل مرسوم خارج دائرة اذا كانت اضلاعه تمس محيط الدائرة وفي هذه الحالة يقال ان الدائرة مرسومة داخل مثلث الشكل (١٦٦) أو داخل شكل رباعي الشكل (١٦٧) أو داخل شكل خماسي الشكل (١٦٨) وهكذا كما يقال ان أي شكل من هذه الاشكال مرسوم خارج دائرة

عملية (٣)

المطلوب : رسم دائرة داخل مثلث معلوم

المعطيات : ا ب حـ △ معلوم الشكل (١٦٩)

المطلوب : رسم دائرة داخل المثلث



الشكل (١٦٩)

العمل : ننصف زاويتي ب ، حـ بمنصفين يتلاقيان في م فتكون م هي مركز الدائرة ولبرهنة ذلك ننزل م ء ، م هـ ، م و أعمـــدة على ب حـ ، حـ ا ، ا ب على الترتيب

البرهان : ∵ ∠ ١ + ∠ ٢ = ٢ ق ∴ الشكل و ب ء م رباعي دائري ،

∵ ∠ ٣ = ∠ ٤ بالتنصيف

∴ م و = م هـ لأنهما وترين لزاويتين محيطيتين متساويتين وبالمثـل يمكن اثبات ان الوتر م هـ = الوتر م ء

∴ م و = م ء = م هـ

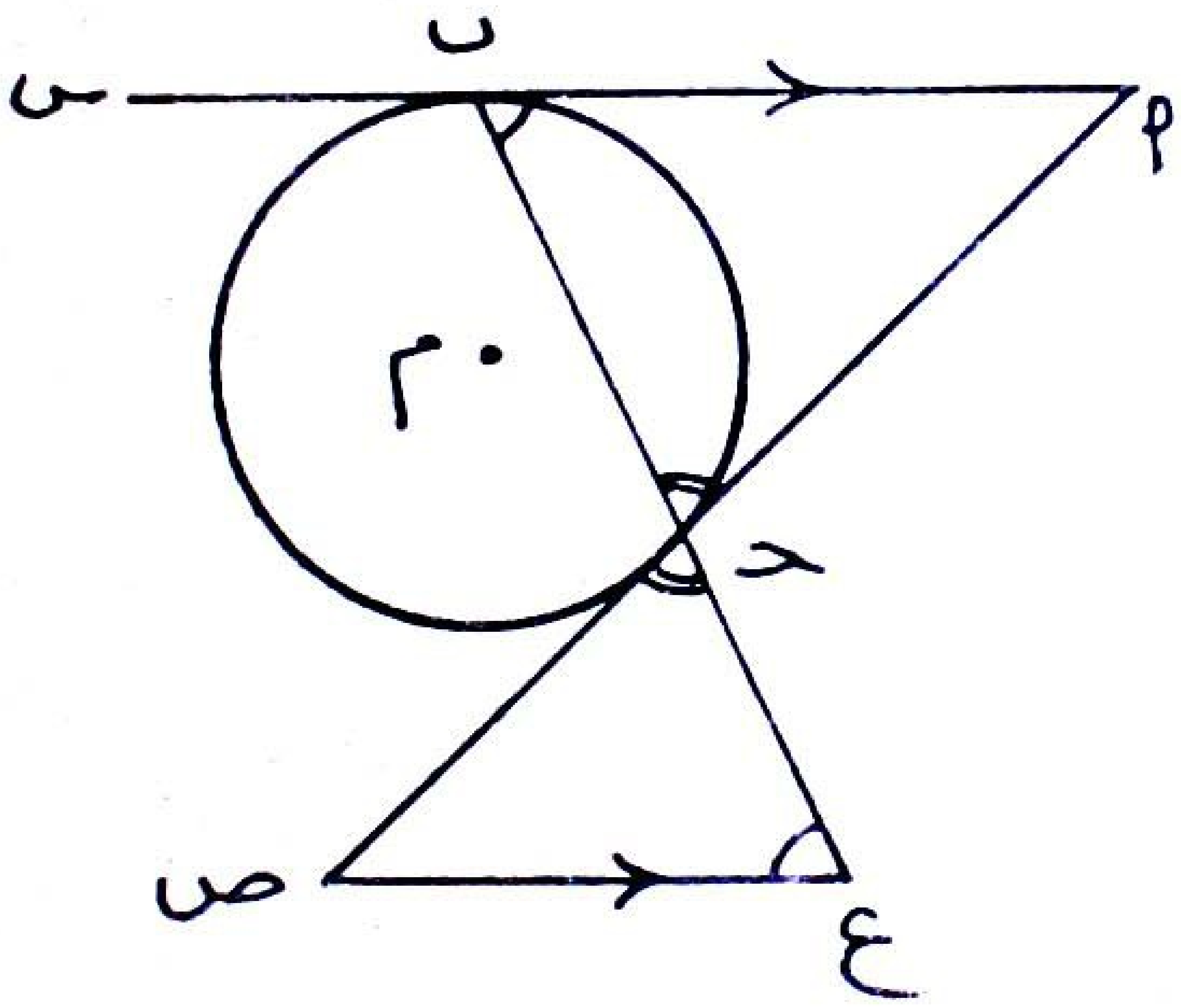
∴ الدائرة التي مركزها م ونصف قطرها م ء تمر بالنقط ء ، هـ ، و ولكن أضلاع المثلث أعمدة على أنصاف الاقطار من نهايتها

∴ أضلاع المثلث تمس الدائرة من الخــارج أي أن الدائرة م تمس أضلاع المثلث من الداخل

وهو المطلوب

تمرين محلول :

ا س ، ا ص يمسان الدائرة م في ب ، حـ رسم ص ع // س ا ويقابل امتداد وتر التماس (ب حـ) في ع اثبت ان ص حـ = ص ع



الشكل (١٧٠)

المعطيات : اس يمس الدائرة م في ب ، اص يمس الدائرة في ص ، ص ع // س ا ويقابل امتداد ب حـ في ع

المطلوب : اثبات أن ص حـ = ص ع

البرهان : ∵ ا س ، ا ص مماسان للدائرة في ب ، حـ

∴ ا ب = ا حـ (نظرية)

∴ ∠ ا ب حـ = ∠ ا حـ ب نظرية

∵ ص ع // س ا ، ب حـ ع قاطع

∴ ∠ ا ب ع = ∠ ص ع ب   بالتبادل

، ∠ ا ح ب = ∠ ع ح ص   بالتقابل بالرأس

، ∠ ا ب ح = ∠ ا ح ب   برهاناً

∴ ∠ ع ح ص = ∠ ص ع ح

∴ ص ع = ص ح   وهو المطلوب

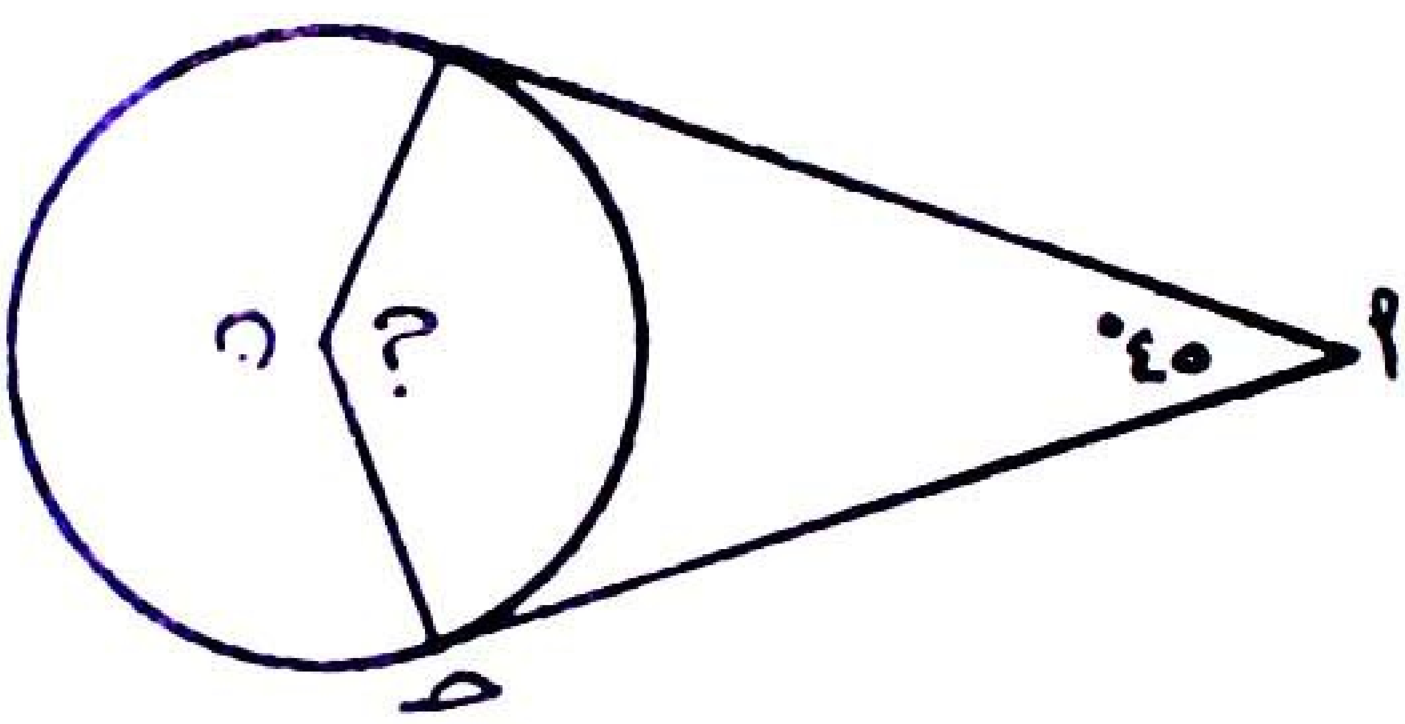
تمرين (٢٧)

١ ـ اذا رسمت دائرة داخل الشكل الرباعي ا ب ح ى اثبت ان :

ا ب + ح ى = ب ح + ا ى

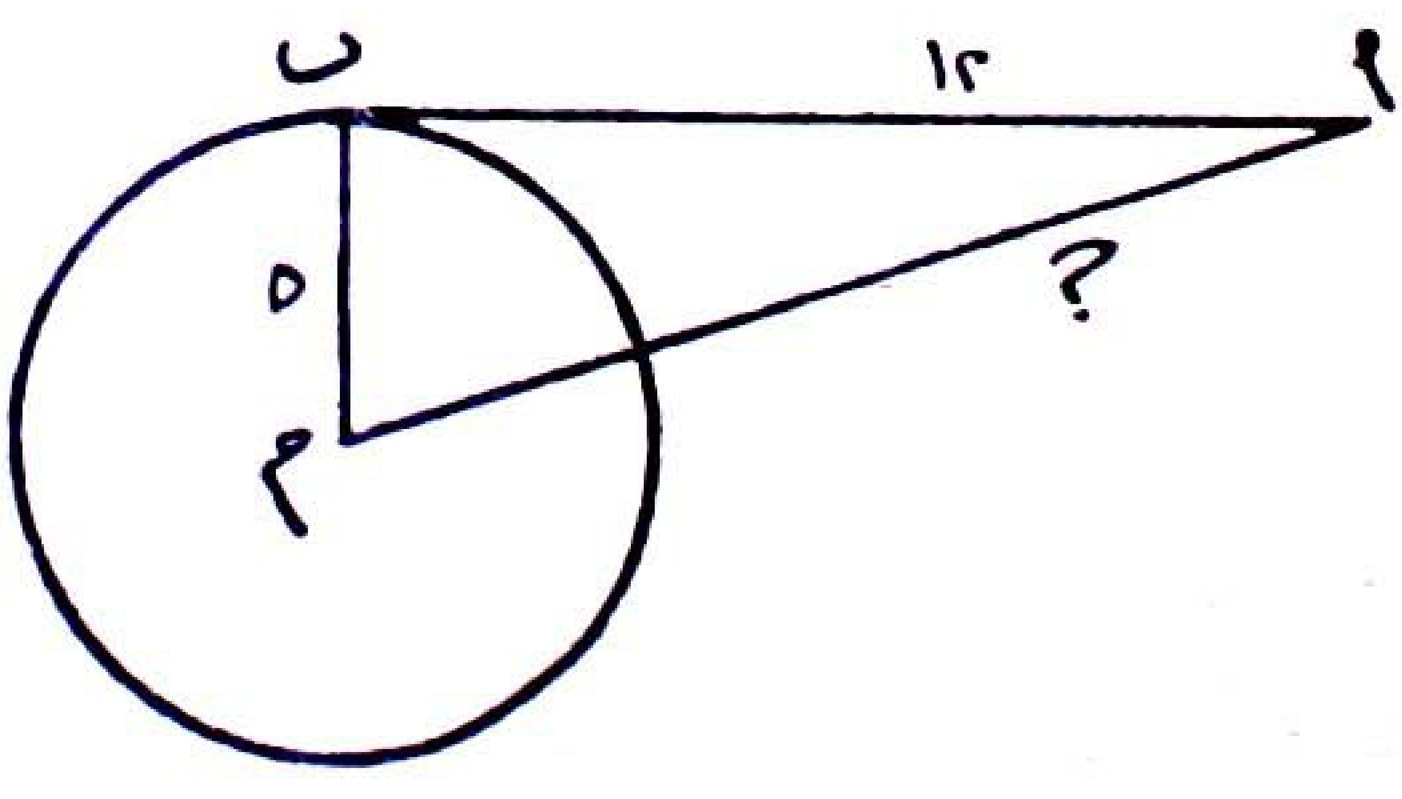
٢ ـ اذا رسمت دائرة داخل الشكل الرباعي ا ب ح ى وكان ا ح يمر بمركز الدائرة فاثبت أن ا ب = ا ى ، ب ح = ى ح

٣ ـ دائرتان متحدتان في المركز رسمت عدة أوتار في الدائرة الكبرى وتمس الدائرة الصغرى . برهن أن جميع هذه الاوتار متساوية .



الشكل (١٧١)

٤ ـ في الشكل (١٧١) ب ا ، ا ح مماسان للدائرة د . فإذا كانت ∠ ب ا ح = ٤٥° فاوجد قيمة ∠ ب د ح



الشكل (١٧٢)

٥ – ﺍ ﺏ ﺣ ﺀ شكل رباعي مرسوم خارج دائرة والمطلوب اثبات أن

اب + ﺀﺣ = ﺍﺀ + ﺏﺣ ، واذا فرض ان م مركز الدائرة فاثبت أن

∠ ﺍ م ﺏ + ∠ ﺀ م ﺣ = ٢ ق

٦ – أوجد قيمة ﺍ م من الشكل (١٧٢)

٧ – م مركز دائرة ، ﺍ نقطة خارجها رسم من ا مستقيمان يمسان الدائرة في ﺏ ، ﺣ ثم وصل ﺏم ، ﺣم أوجد قيمة كل من ∠ ا م ﺏ ، ا م ﺣ اذا كانت ∠ ﺏ ﺍ ﺣ = ٦٠° . واذا مد ا ﺣ على استقامته بقدر نفسه الى ﺀ ثم وصل م ﺀ اثبت أن ﺏ م ، ﺀ م على استقامة واحدة .

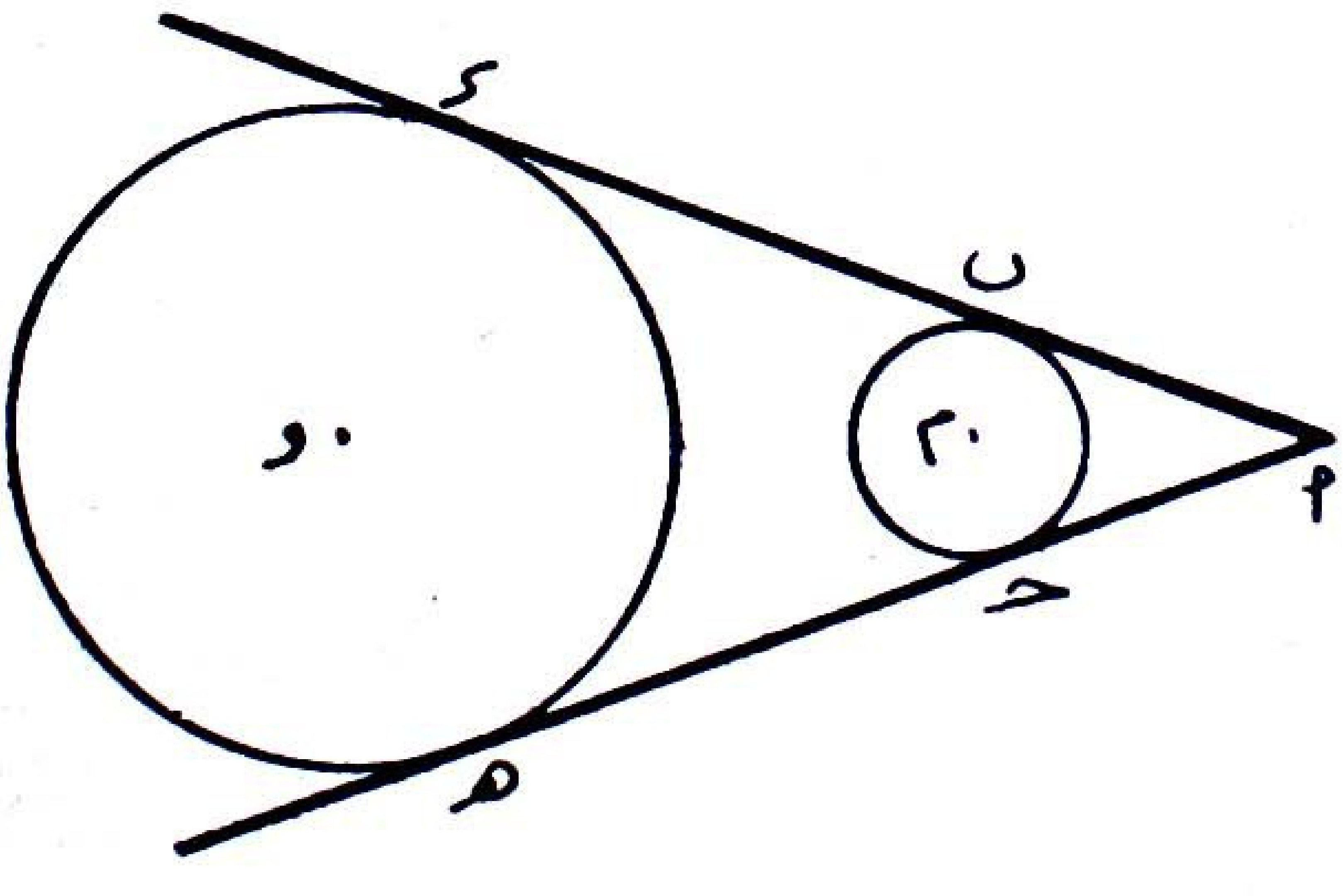
٨ – في الشكل (١٧٣)

ﺍ ﺏ ﺀ يمس الدائرتين م ، و ، ا ﺣ ﻫ يمس نفس الدائرتين . اثبت ان

١" – ﺏ ﺀ = ﺣ ﻫ

٢" – الشكل ﺏ ﺀ ﻫ ﺣ رباعي دائري

٣" – ا ، م ، و على استقامة واحدة



الشكل (١٧٣)

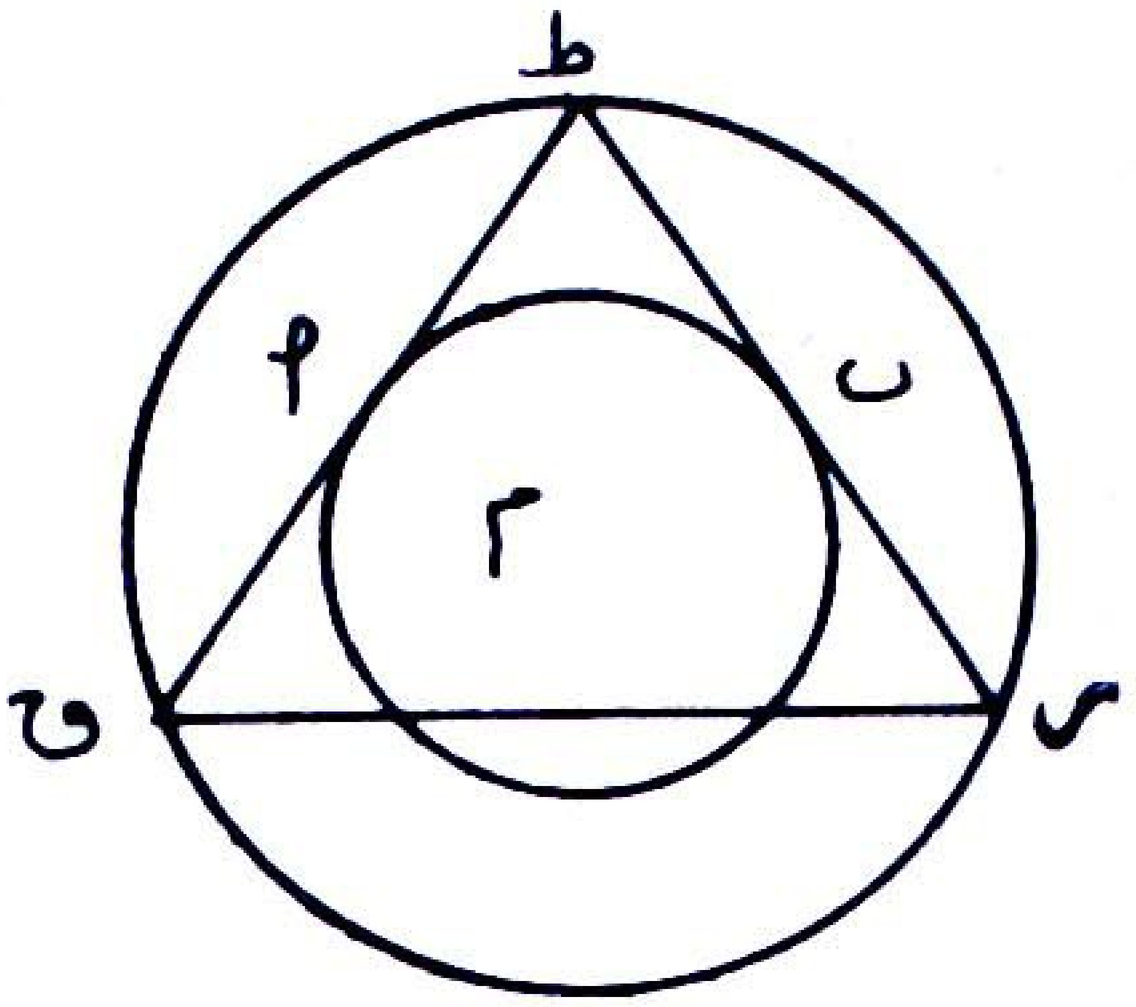
٩ – في الشكل (١٧٤)

طق ، طر وتران في الدائرة الكبرى يمسان الدائرة الصغرى والدائرتان متحدتا المركز م

اثبت ان :

(أ) طا = قا = طب = رب

(ب) امتداد طم ⊥ رق



الشكل (١٧٤)

١٠ – رسمت دائرة مركزها في رأس الزاوية القائمة ا من مثلث قائم الزاوية ابح وكانت ماسة لوتره بح في نقطة ه . ثم رسم من نقطتي ب ، ح مماسان يمسان محيط الدائرة في و ، ع على الترتيب .

اثبت أن ب و // ح ع

١١ – ا ب قطر في دائرة مركزها م رسم من ا ، ب مماسان للدائرة يقابلان مماسا ثالثا للدائرة في ء في نقطتي س ، ص برهن أن ∠ س م ص = ٩٠°

١٢ – ا نقطة خارج دائرة م رسم منها المماسان ا ب ، ا ح فاذا كان طول ا ب = ٢٤ سم ، نصف قطر الدائرة = ١٠ سم

ثم وصل ا م فقطع القوس الأصغر ب ح في نقطة ه فأوجد طول ا ه .

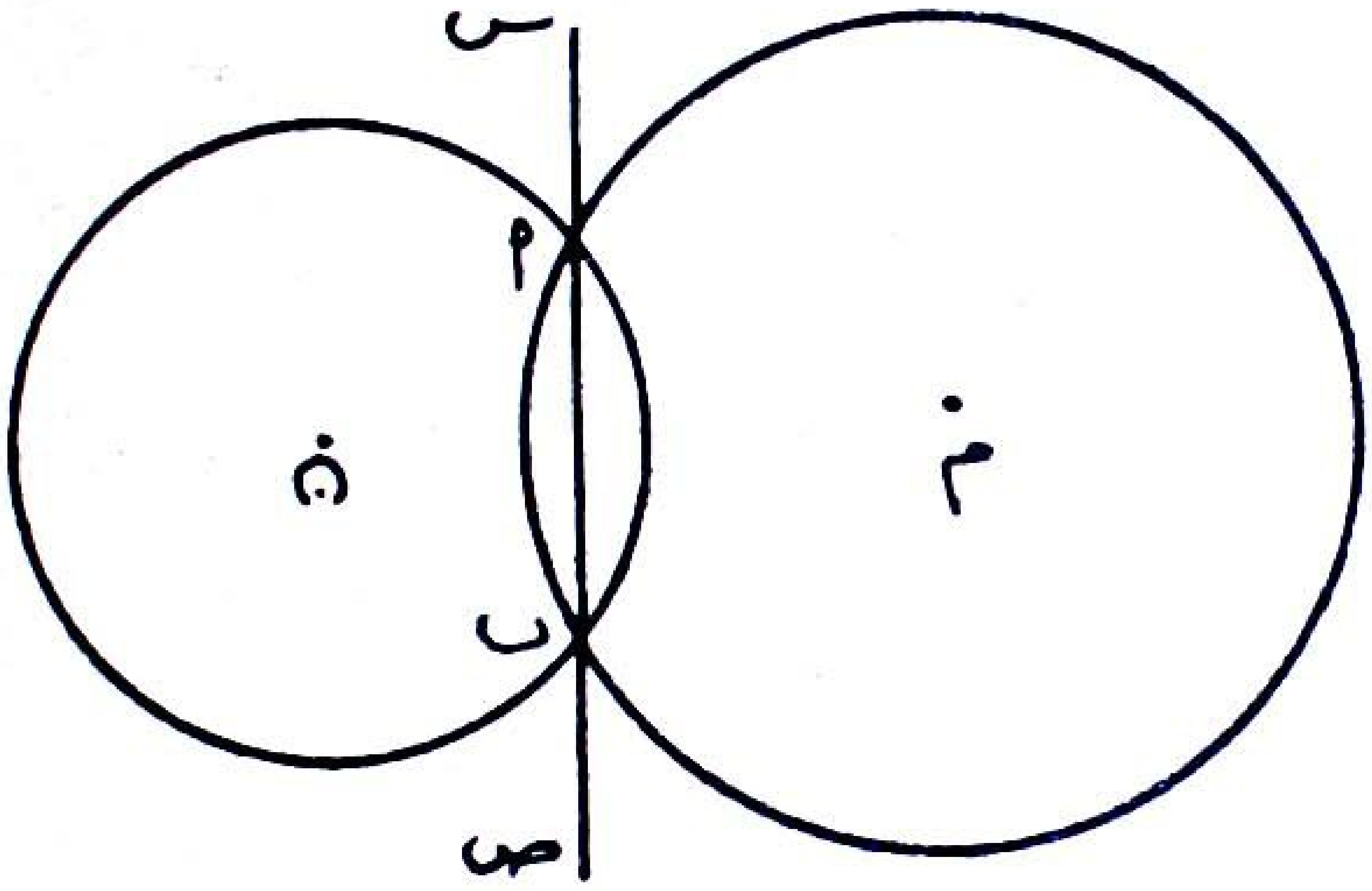
١٣ – دائرتان متقاطعتان ، ا احدى نقطتي تقاطع الدائرتين رسم ب ا ح يقطع الدائرتين في ب ، ح رسم مماسان للدائرتين في ب ، ح فتلاقيا في ء اثبت أن ∠ ب ء ح = الزاوية بين المماسين المرسومين للدائرتين في ا

١٤ – م ، ن دائرتان متقاطعتان في ح ، ء رسم مستقيم يمر بنقطة ح ويقطع محيط الدائرة م في ا و محيط الدائرة ن في ب ثم رسم من ا ، ح مماسان للدائرة م تلاقيا في ه ، من ح ، ب رسم مماسان للدائرة ن تلاقيا في و فاذا كانت ع نقطة تلاقي امتدادي اه ، ب و فأثبت ان ∠ ع = ∠ ه ح و

١٥ – دائرتان غير متقاطعتين قطعهما المستقيم ا ب ح ء قطع الدائرة الاولى في

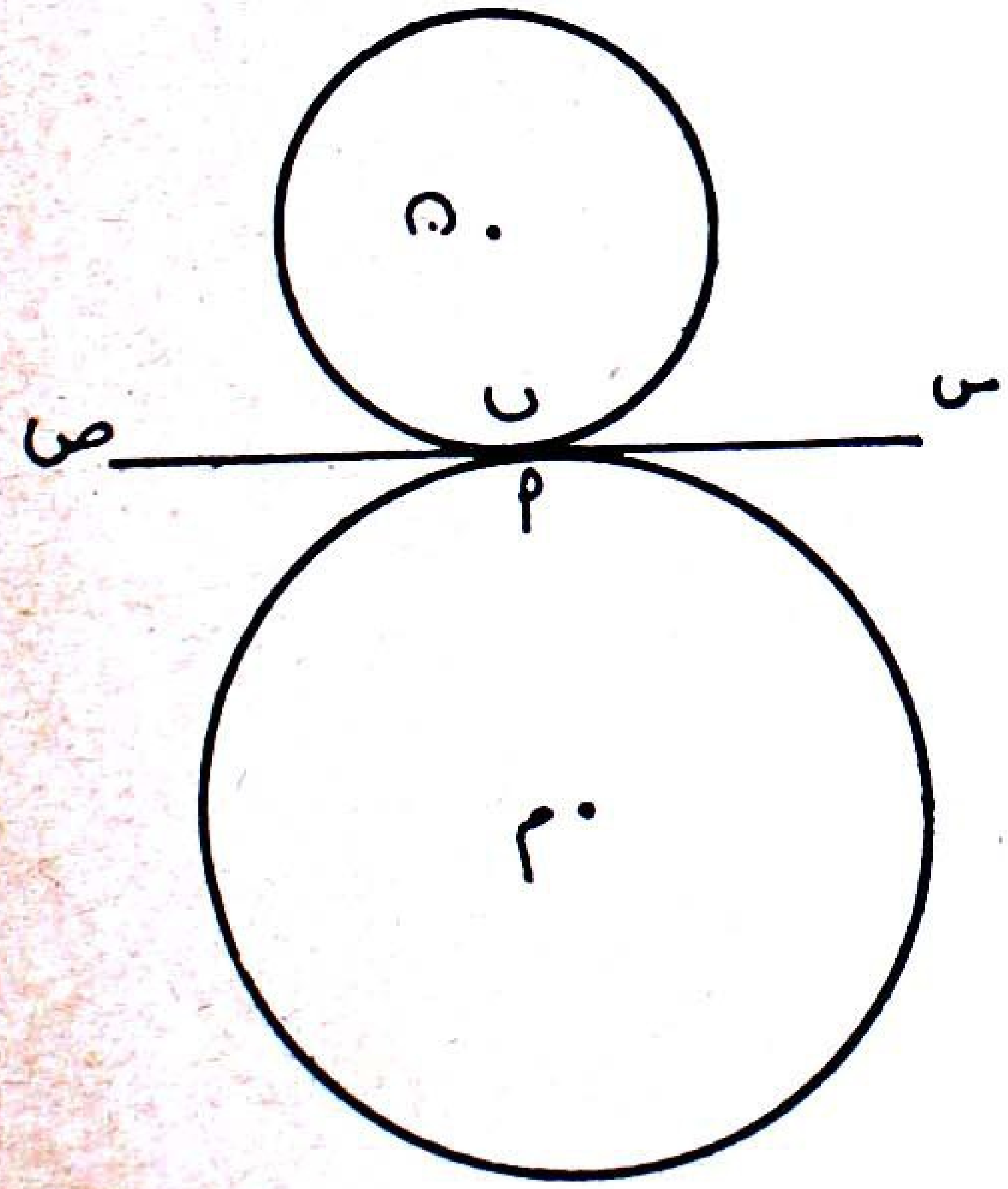
ا ، ب ثم قطع الدائرة الثانية في حـ ، ء فاذا تقاطع المماسان من ا،ب للدائرة الاولى في هـ وتقاطع المماسان من حـ ، ء للدائرة الثانيـة في و كان ا هـ // حـ و برهن ان ب هـ // ء و

تماس دائرتين



الشكل (١٧٥)

تدريب :



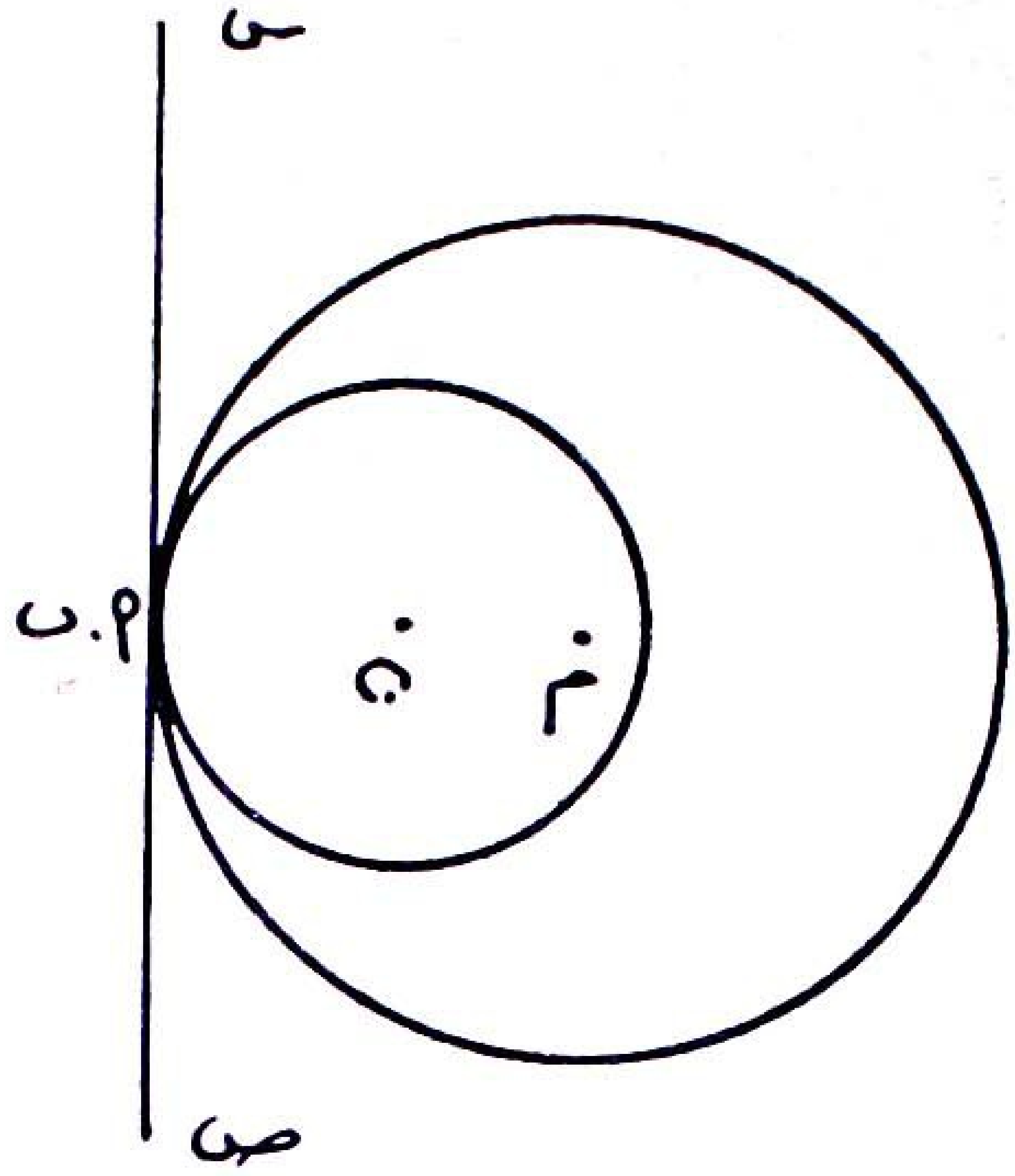
الشكل (١٧٦)

١ – خذ قرصين مستديرين م ، ن

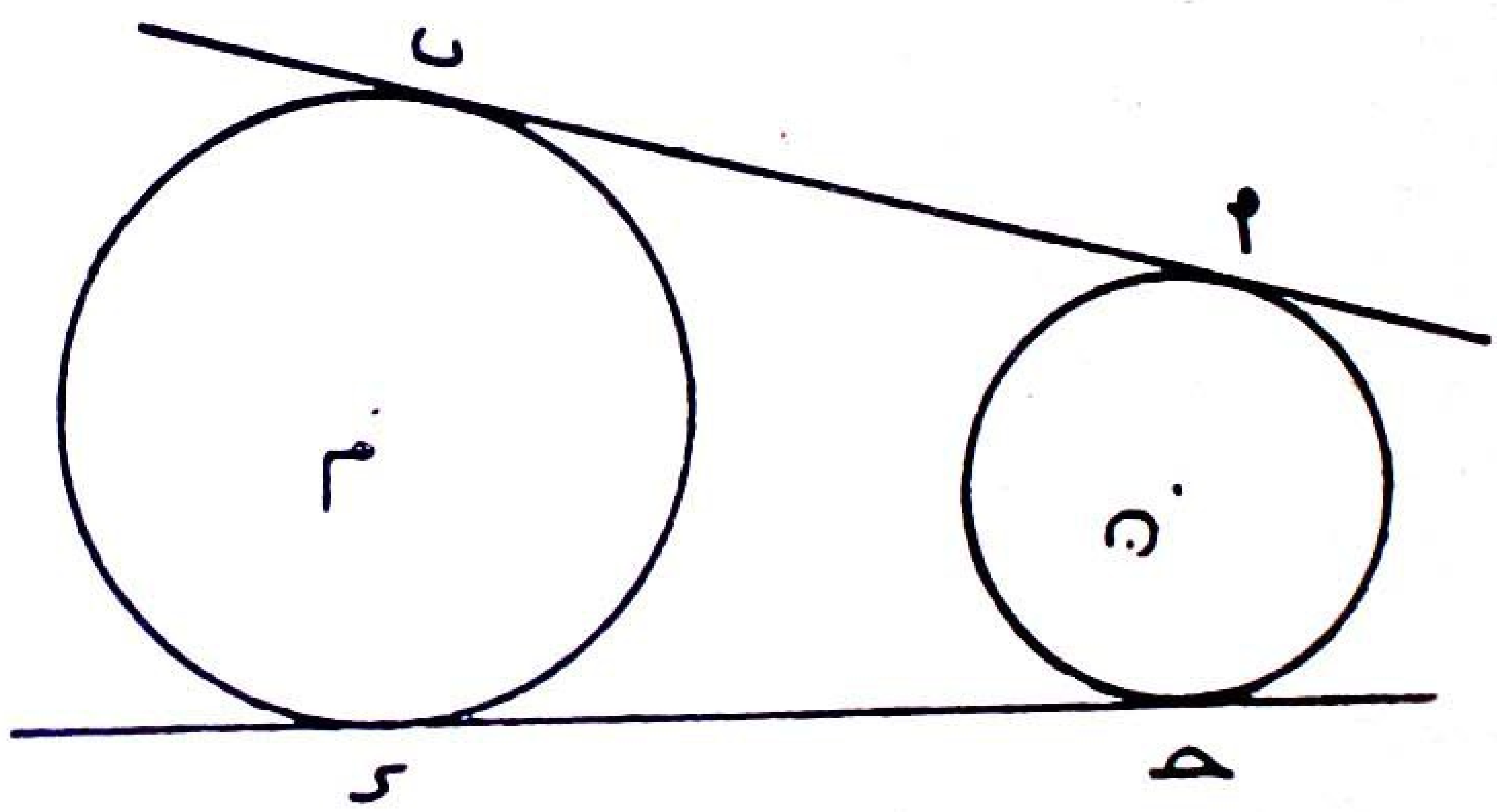
٢ – ضع احدهما وليكن م على القرص ن تشاهد ان القرص م يقطع من القرص ن جزءاً كما في الشكل (١٧٥)

٣ – حرك القرص م شرقاً او غرباً بالنسبة للقرص ن فتشاهد ان نقطتي التقـاطع تقتربان أو تبتعدان عن بعضهما

٤ ـ استمر في الحركة حتى تنطبق النقطتان ا ، ب على بعضهما وتصبحان نقطة واحدة ففي هذه الحالة يقال إن القرص م ماسا للقرص ن في نقطة ا من الخارج الشكل (١٧٦) او من الداخل الشكل (١٧٧)



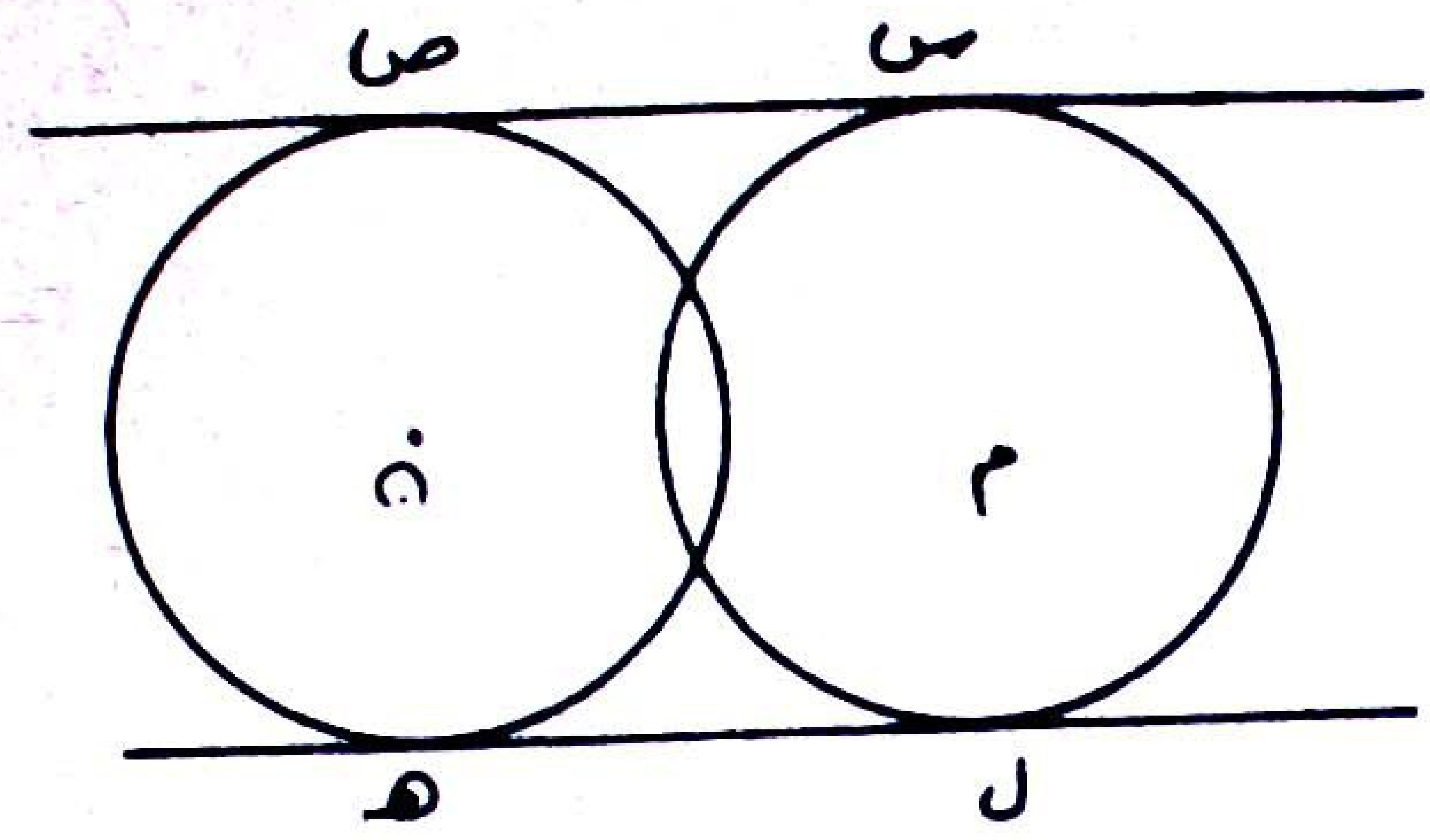
الشكل (١٧٧)



الشكل (١٧٨)

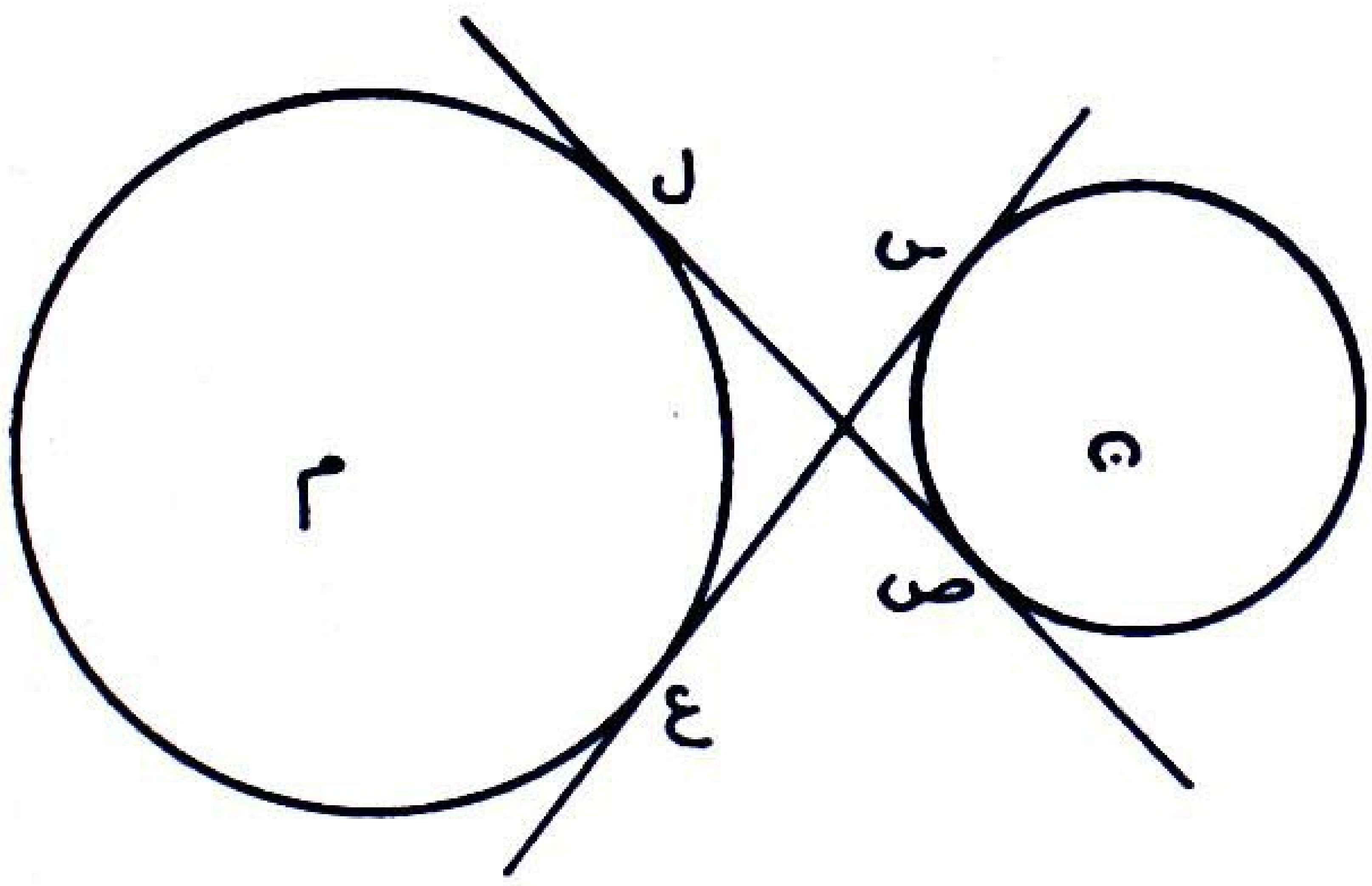
ملاحظة :

اذا مس مستقيم دائرتين يقال انه مماس مشترك للدائرتين فإذا كانت الدائرتان في جهة واحدة منه قيل انه مماس مشترك لهما من الخارج الشكل (١٧٨) الشكل (١٧٩)

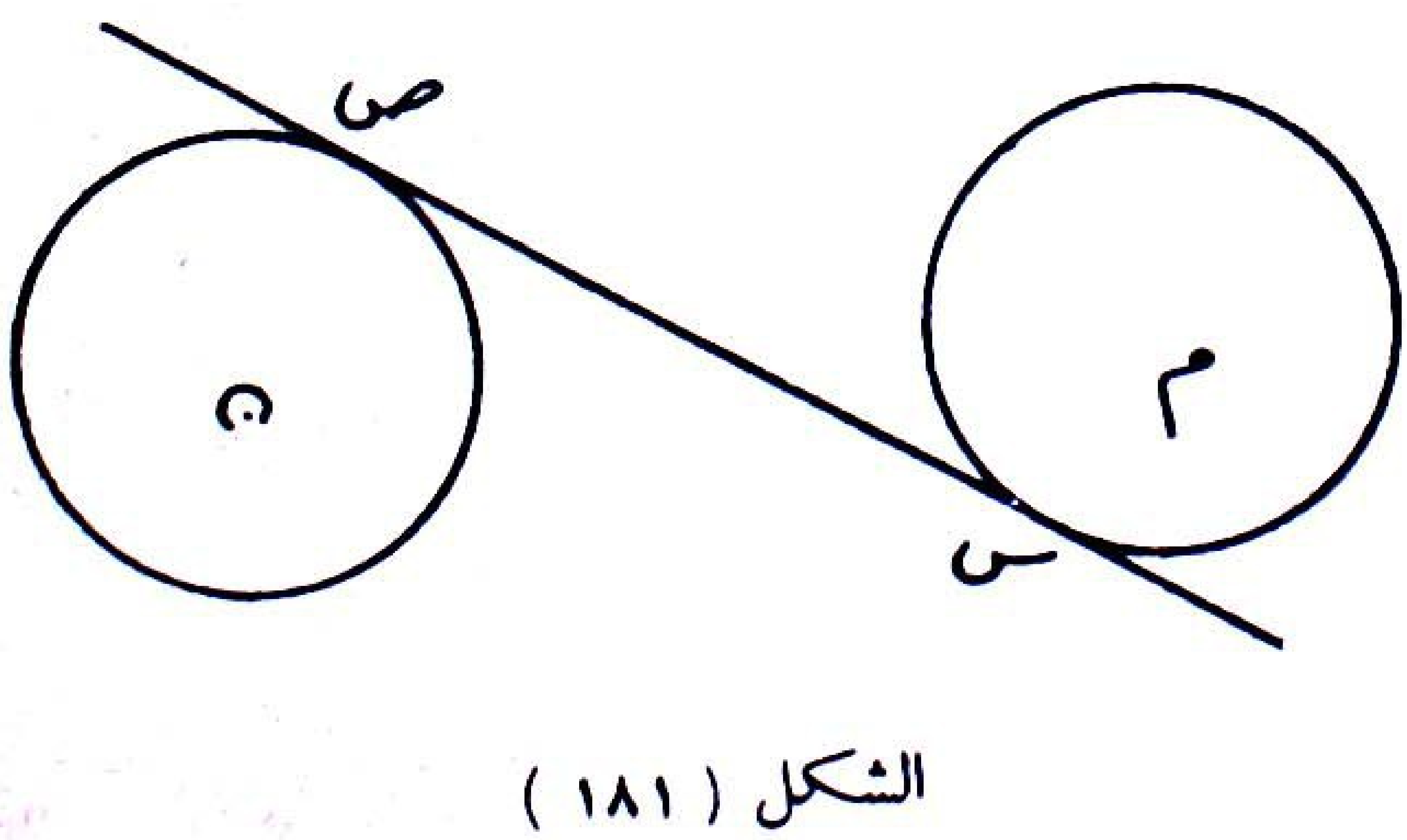


الشكل (١٧٩)

أما اذا كانت الدائرتان في جهتي المماس المشترك قيل إنه مماس مشترك لهما من الداخل كما في الشكلين (١٨٠) ، (١٨١)

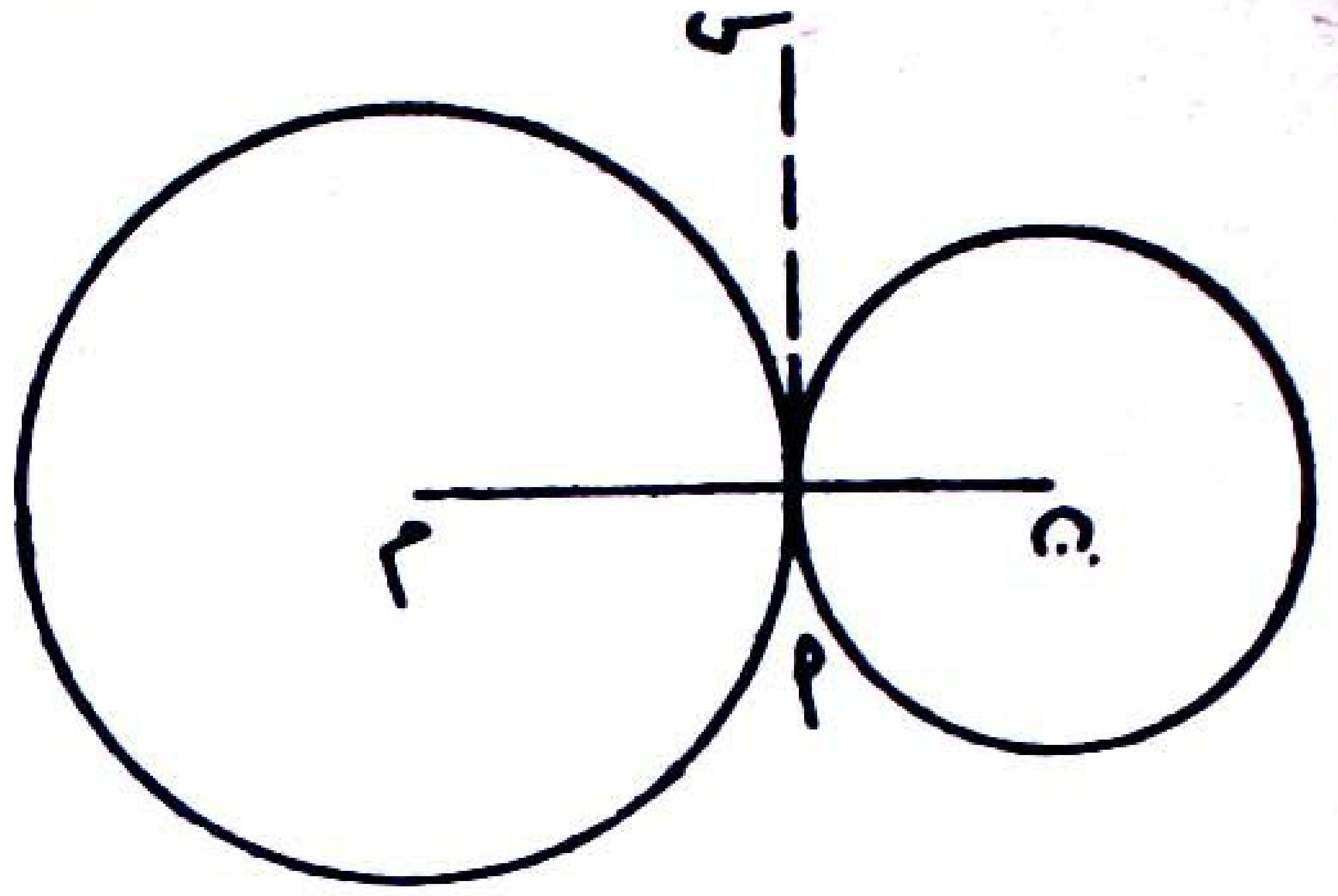


الشكل (١٨٠)



الشكل (١٨١)

نظرية (١٧)
نقطة تماس دائرتين تقع على خط المركزين

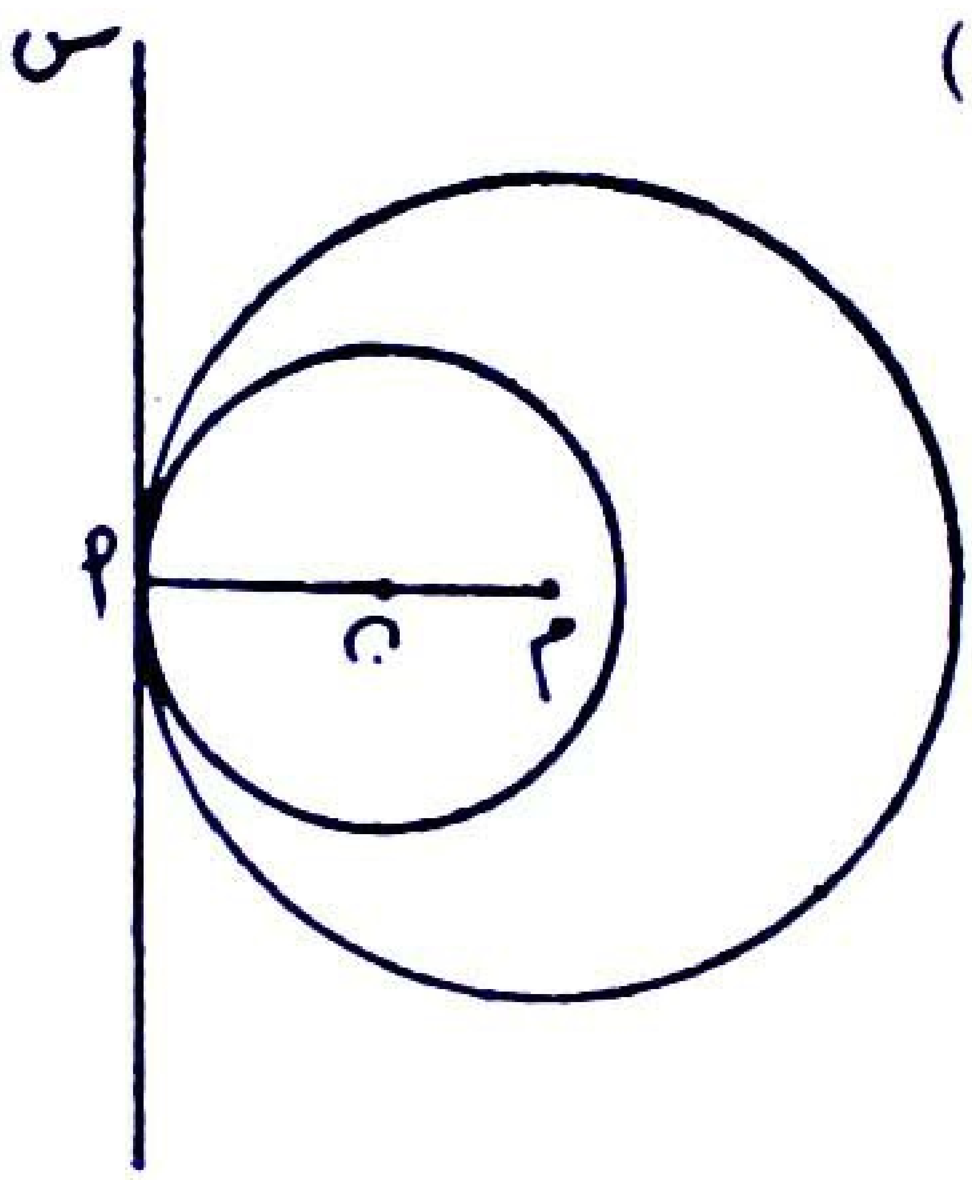


الشكل (١٨٢)

المعطيات : م ، د دائرتان متماستان في (ا)
الشكل (١٨٢) (١٨٣)

المطلوب : اثبات ان م ، ا ، د على استقامة واحدة

العمل : نصل م ا ، د ا ونرسم المماس المشترك س ا



الشكل (١٨٣)

البرهان : في الدائرة م ∵ م ا نصف قطر ، ا س مماس
∴ ∠ م ا س = ق — نظرية
وكذلك في الدائرة د تكون ∠ د ا س = ق — نظرية
في الشكل (١٨٢) ∠ م ا س + ∠ د ا س = ٢ ق
∴ م ا د مستقيم — نظرية
في الشكل (١٨٣) ∠ م ا س = ∠ د ا س
∴ م ا ينطبق على د ا — ∴ م د ا مستقيم

وهو المطلوب

نتيجة (١) :

اذاتماست دائرتان من الخارج كان البعد بين مركزيها مساويا بمجموع نصفي القطرين في الشكل (١٨٢) البعد بين المركزين م د = ا م + ا د

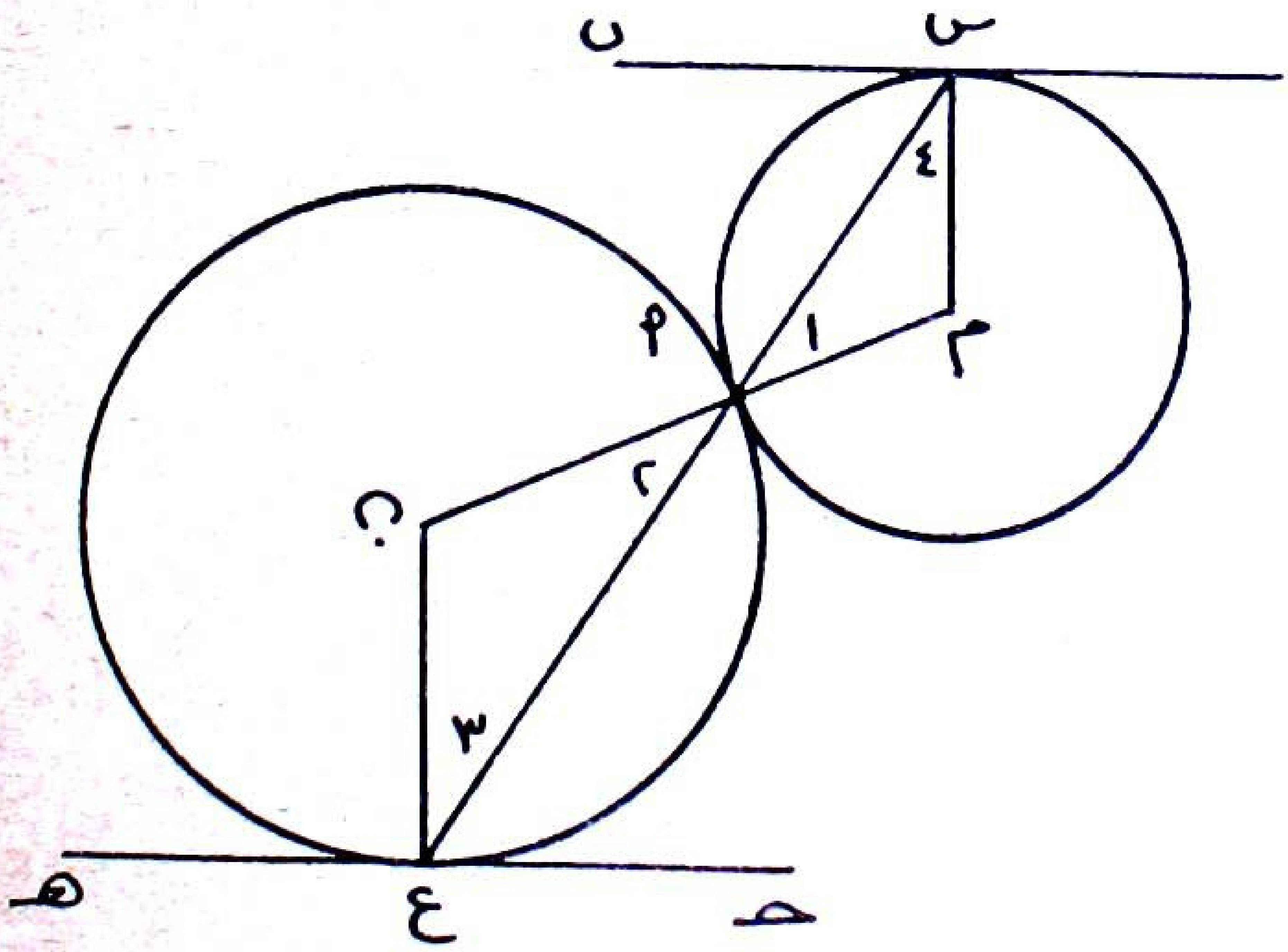
نتيجة (٢) :

اذا تماست دائرتان من الداخل كان البعد بين مركزيها يساوي الفرق بين نصفي القطرين كما في الشكل (١٨٣) البعد بين المركزين م د = ا م − ا د

تمرين محلول (١) :

م ، د دائرتان متماستان من الخارج في ا رسم المستقيم س ا ع يمر بنقطة تماس الدائرتين ا قاطعا الدائرة م في س والدائـــرة د في ع رسم ب س يمس الدائرة م في س ، حـ ع يمس الدائرة د في ع اثبت ان ب س // حـ ع

المعطيات : م ، د دائرتان متماستان من الخارج في ا ، س ا ع قاطع للدائرتين ماراً بنقطة التماس ا ، س ب مماس للدائرة م في س ، ع حـ مماس للدائرة د في ع الشكل (١٨٤)



الشكل (١٨٤)

المطلوب : اثبات ان ب س // حـ ع

العمل : نصل م س ، د ع ، م ا د ونمد حـ ع الى هـ

البرهان : ∵ ا نقطة تماس الدائرتين م ، د

∴ م ا د خط المركزين على استقامة واحدة

∵ م س نصف قطر الدائرة م ، س ب مماس للدائرة م في س

∴ ∠ م س ب = ق نظرية

وبالمثل د ع نصف قطر للدائرة د ، ع حـ مماس للدائرة د في ع

∴ د ع ⊥ ع حـ نظرية

∠ ١ = ∠ ٢ بالتقابل بالرأس ....(١)

ولكن ∠ ١ = ∠ ٤ لأن م س = م ا ....(٢)

، ∠ ٢ = ∠ ٣ لأن د ا = د ع ....(٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج ان ∠ ٤ = ∠ ٣

ولكن ∠ ب س م + ∠ هـ ع د = ٢ ق

∴ ∠ ب س م − ∠ ٤ + ∠ هـ ع د + ∠ ٣ = ٢ ق

∴ ∠ ب س ع + ∠ هـ ع س = ٢ ق

∴ ب س // هـ ع

∴ ب س // حـ ع (لأن ع هـ امتداد حـ ع)

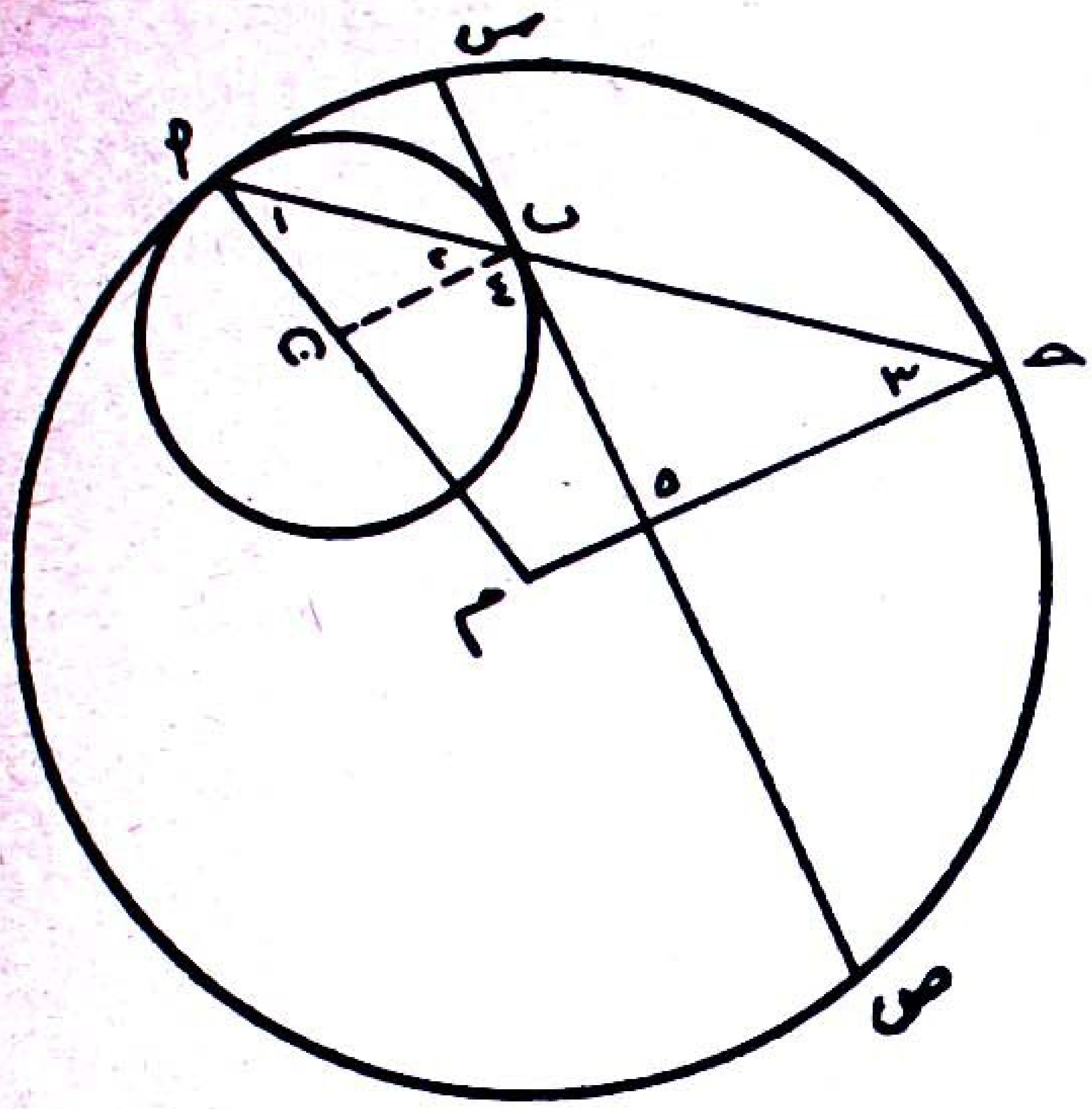
وهو المطلوب

تمرين : اثبت المطلوب في التمرين السابق باثبات تساوي زاويتين متبادلتين .

تمرين محلول (٢) :

م ، د دائرتان متماستان من الداخل في ا . رسم ا ب وتر في الدائرة الصغرى د ، ومد فقطع الكبرى في حـ ثم رسم من ب مماس للدائرة د فقطع الكبرى في س ، ص .

اثبت ان حـ م ⊥ س ص



المعطيات: م ، ن دائرتان متماستان من الداخل في ا

ا ب ح وتر في الدائرة الكبرى ويقطع الصغرى في ب .

س ب ص وتر في الكبرى ويمس الصغرى في ب

الشكل (١٨٥)

الشكل (١٨٥)

المطلوب : اثبات ان ح م ⊥ س ص

العمل : نصل م ن ا ، ن ب

البرهان : م ن ا مستقيم (نظرية)

△ ن ب ا فيه ن ب = ن ا

∴ ∠ ١ = ∠ ٢

، △ م ح ا فيه م ح = م ا

∴ ∠ ١ = ∠ ٣

∴ ∠ ٢ = ∠ ٣

∴ ح م ∥ ب ن

∴ ∠ ٥ = ∠ ٤ بالتبادل

ولكن ∠ ٤ = ق نظرية

∴ ∠ ٥ = ق

∴ ح م عمودي على س ص

وهو المطلوب

تمارين (٢٨)

١ – دائرتان مركزاهما م ، د نصف قطر الاولى ١٠ سم ونصف قطر الثانية ٥ سم . اوجد البعد بين مركزيهما اذا كانتا :

اولا : متماستان من الخارج ، **ثانيا** : متماستان من الداخل

٢ – اي الدوائر الآتية متماستان وايهما لاتتماسان ولماذا ؟

أ – دائرتان البعد بين مركزيهما ٢,٥ سم ونصف قطر الاولى ٣,٤سم ونصف قطر الثانية ١,٨ سم

ب – دائرتان البعد بين مركزيهما ٧ سم ونصف قطر الاولى ٢ سم ونصف قطر الثانية ٣,٢ سم

حـ – دائرتان البعد بين مركزيهما ٢,٢ سم ونصف قطر الاولى ٧ سم ونصف قطر الثانية ٤,٨ سم

٣ – دائرتان م ، د متماستان في ا رسم المستقيم س ا ص يقطع الدائرتين في س ، ص ويمر بالنقطة ا برهن ان م س // د ص

٤ – م ، د دائرتان متساويتان متماستان من الخارج في ا رسم المستقيم س ا ص يمر بنقطة التماس ويقطع الدائرة الاولى في س والثانية في ص برهن ان ا س = ا ص

٥ – ثلاث دوائر متماسة من الخارج مثنى مثنى مراكزها هي ا ، ب ، حـ وكان ا ب = ٥ سم ، ب حـ = ٤,٥ سم ، ا حـ = ٤,٤ سم . اوجد انصاف اقطار الدوائر الثلاث

٦ – م ، د دائرتان متماستان من الخارج في ا رسم س ص يمس الدائرة م في س والدائرة د في ص ويقطع المماس المشترك في ع برهن ان س ع=ص ع

$\angle$ س ا ص = 90°

٧ – م ، د دائرتان متماستان من الخارج في ا فرضت نقطة س خارجة عنهما

رسم س ب م حـ يقطع الدائرة م في ب ، حـ ، س ء د هـ يقطع الدائرة د في ء ، هـ ثم رسم هـ ا ص مارا بنقطة التماس ا ويقطع الدائرة م في ص والمطلوب اثبات ان :

أولاً : ص م // س هـ

ثانياً : $\angle$ ص ا ب = $\frac{١}{٢}$ $\angle$ حـ س هـ

٨ — م ، د دائرتان متماستان من الخارج او من الداخل في ا .
أخذت نقطة ب على محيط احدى الدائرتين ولتكن م ثم وصل ب ا فقطع هو او امتداده محيط الدائرة د في س رسم من ب مماس للدائرة م . اثبت أن س د عمودي على هذا المماس

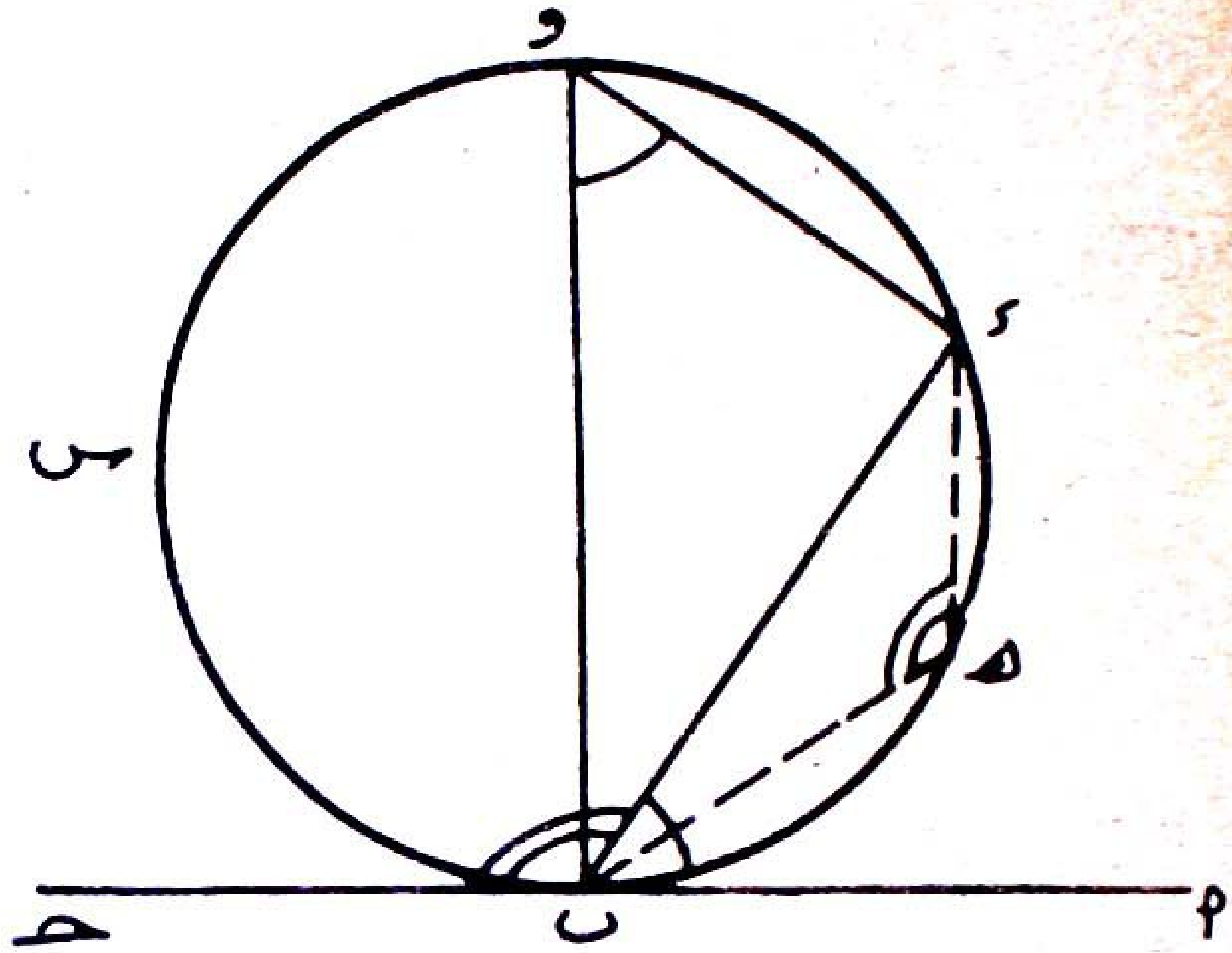
٩ — اثبت ان المماسين المشتركين لدائرتين يكونان متساويان اذا كانا من الخارج اومن الداخل .

١٠ — م ، د دائرتان متماستان من الخارج في هـ رسم القطران المتوازيان ا م ب ، حـ د ء (النقطتان ا ، حـ في جهة واحدة من المستقيم م د) برهن ان ا ، هـ ، ء على استقامة واحدة وكذلك ب هـ ، هـ حـ

١١ — م ، د دائرتان متماستان من الخارج في ا ، ب ا حـ يقطع الدائرة م في ب ، الدائرة د في حـ ثم رسم ب ء يمس الدائرة م في ب ويقابل امتداد حـ د في ء برهن ان $\angle$ ء = ق واذا قطع حـ ء الدائرة د في هـ برهن ان الشكل ا ب ء هـ رباعي دائري

نظرية (١٨)

الزاوية المحصورة بين مماس الدائرة ووتر فيها مرسوم من نقطة التماس يساوي الزاوية المحيطية المرسومة على الوتر في الجهة الاخرى منه .



الشكل(١٨٦)

اولا :

المعطيات : ا حـ مماس للدائرة في ب ، ب د وتر فيها الشكل (١٨٦)

المطلوب : اثبات ان اولا : ∠ ا ب د = اي زاوية محيطية في القطعة د س ب

ثانيا : ∠ د ب حـ = اي زاوية محيطية في القطعة د هـ ب

العمل اولا : نرسم القطر ب و من نقطة ب ثم نصل د و

البرهان : ∵ ∠ ا ب د تتمم ∠ د ب و لأن و ب ⊥ المماس ا ب

، ∠ د و ب تتمم ∠ د ب و لأن ∠ و د ب مرسومة في نصف دائرة

∴ ∠ ا ب د = ∠ د و ب

وحيث أن جميع الزوايا المرسومة في القطعة د س ب = ∠ د و ب

∴ ∠ ا ب ى = أي زاوية محيطية مرسومة في القطعة ى س ب
وهو المطلوب أولاً

العمل ثانياً : نأخذ نقطة على القوس ى ب ثم نصل ى هـ ، ب هـ

البرهان : ∵ ∠ ى ب حـ تكمل ∠ ى ب ا ، ∠ ى ب ا = ∠ ى و ب

∴ ∠ ى ب حـ تكمل ∠ ى و ب

ولكن ∠ ى هـ ب تكمل ∠ ى و ب (لأن الشكل و ى هـ ب دائري)

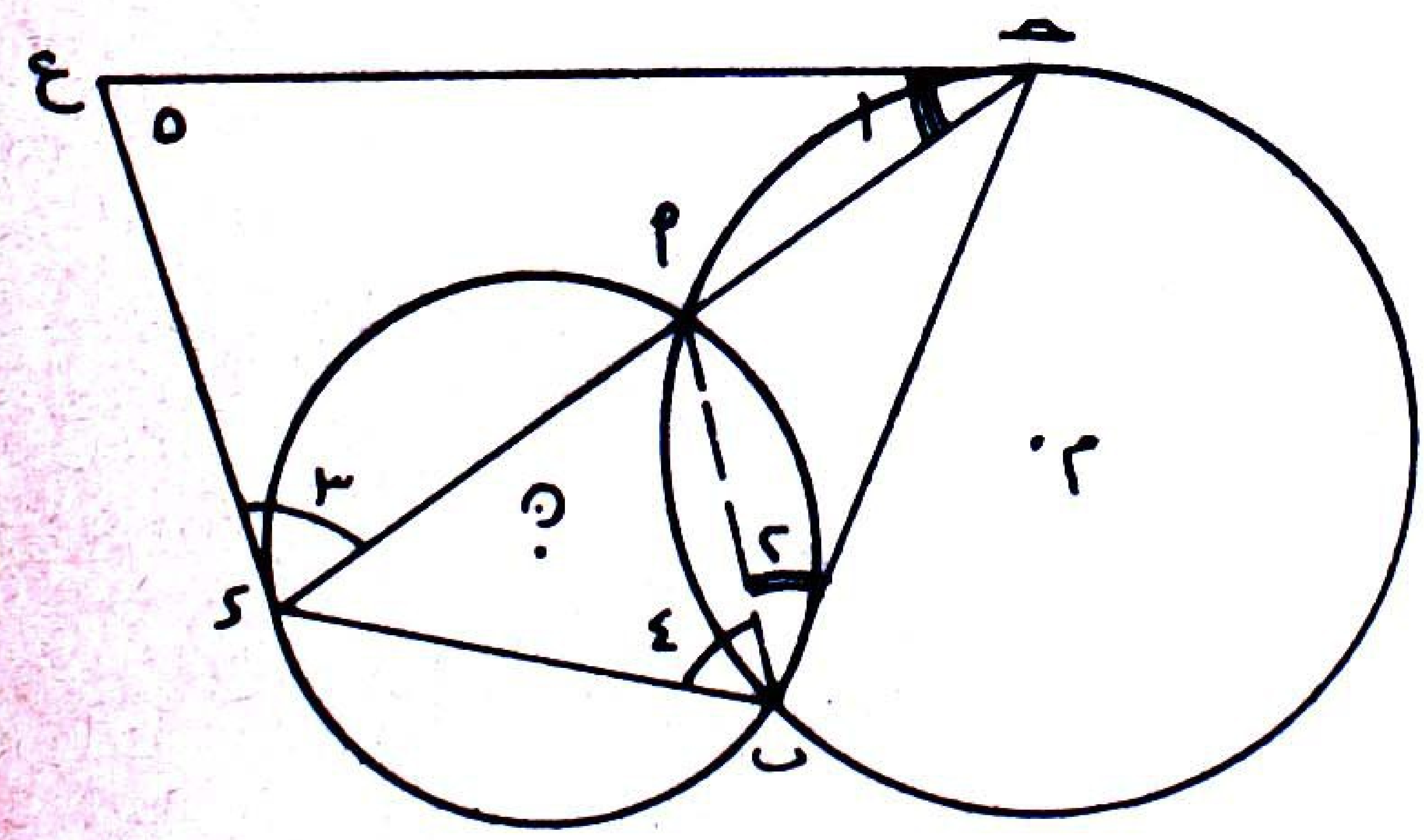
∴ ∠ ى ب حـ = ∠ ى هـ ب

أي أن زاوية ى ب حـ = أي زاوية محيطية مرسومة في القطعة ى هـ ب
وهو المطلوب ثانياً

تمرين محلول :

م ، ن دائرتان متقاطعتان في ا ، ب رسم حـ ا ى يقطع الدائرتين م ، ن في حـ ، ى على الترتيب ثم رسم المماس من حـ للدائرة م والمماس من ى للدائرة ن فتلاقى المماسان في ع

اثبت أن الشكل ع حـ ب ى رباعي دائري



الشكل (١٨٧)

المعطيات دائرتان (م ، د) متقاطعتان في ا ، ب . ح ا ء مستقيم يقطع الدائرة م في ح ، الدائرة د في ء . ح ع ، ء ع مماسان للدائرتين الشكل (١٨٧)

المطلوب : اثبات أن الشكل ع ح ب ء رباعي دائري

البرهان : نصل ا ب .

∵ ح ع مماس ، ا ح وتر في الدائرة م

∴ ∠ ١ = ∠ ٢

وبالمثل ∠ ٣ = ∠ ٤

∴ ∠ ١ + ∠ ٣ = ∠ ٢ + ∠ ٤ = ∠ ح ب ء ولكن

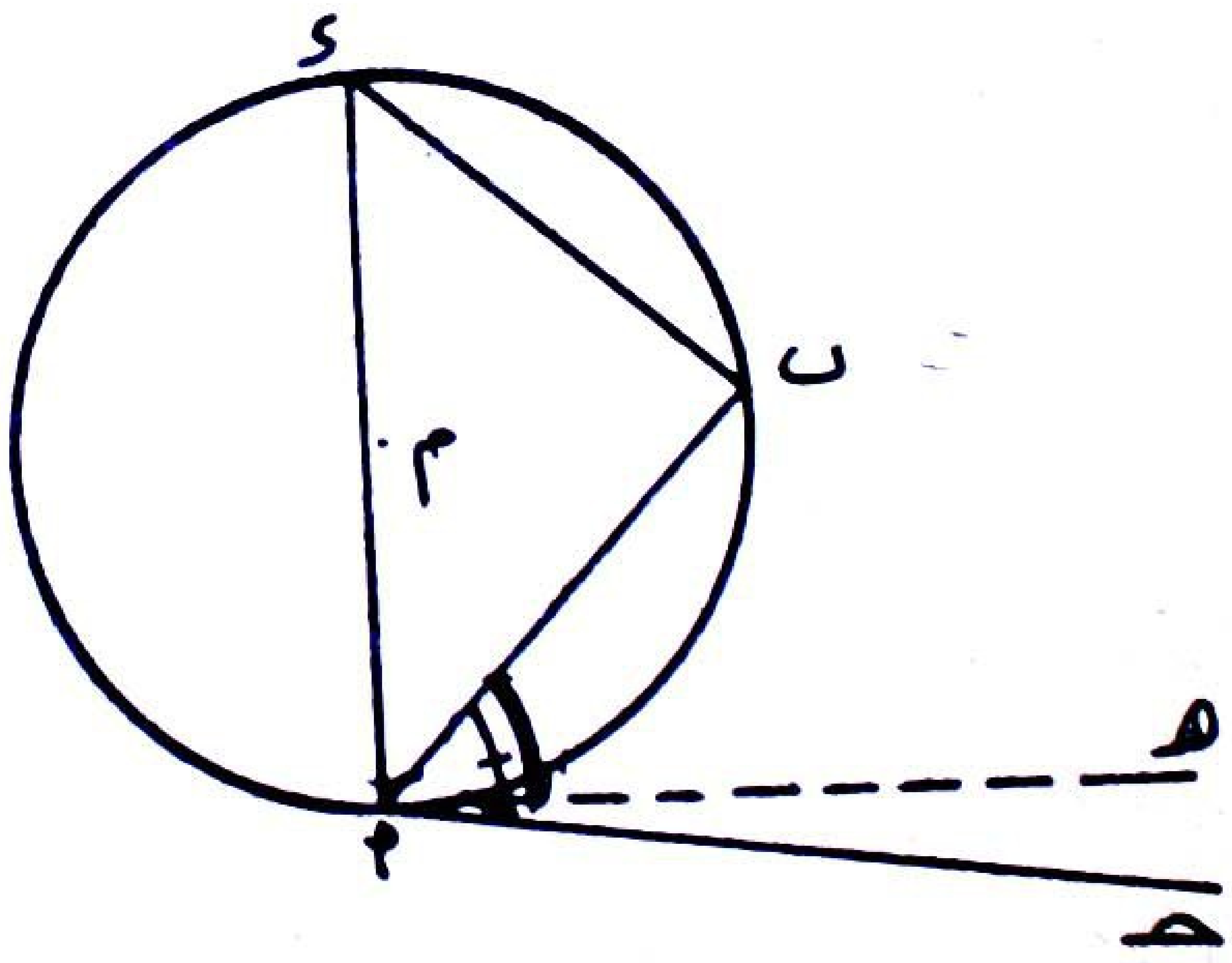
∠ ١ + ∠ ٣ + ∠ ٥ = ٢ ق

∴ ∠ ح ب ء + ∠ ٥ = ٢ ق

∴ الشكل ع ح ب ء رباعي دائري وهو المطلوب

عكس نظرية (١٨)

اذا رسم مستقيم من نهاية وتر في دائرة بحيث كانت الزاوية التي بينه وبين الوتر مساوية للزاوية المحيطية المرسومة على الوتر من الجهة الاخرى منه كان هذا المستقيم مماساً للدائرة



الشكل (١٨٨)

المعطيات : ا ب وتر في دائرة رسمت عليه الزاوية المحيطية ا ى ب ثم رسمت
∠ ب ا حـ = ∠ ب ى ا الشكل (١٨٨)

المطلوب : اثبات أن ا حـ يمس الدائرة عند ا

البرهان : ان لم يكن ا حـ مماساً للدائرة في ا نرسم ا هـ مماسا لها

∴ ∠ ب ا هـ = ∠ ى   نظرية

، لكن ∠ ب ا حـ = ∠ ى   فرضاً

∴ ∠ ب ا هـ = ∠ ب ا حـ

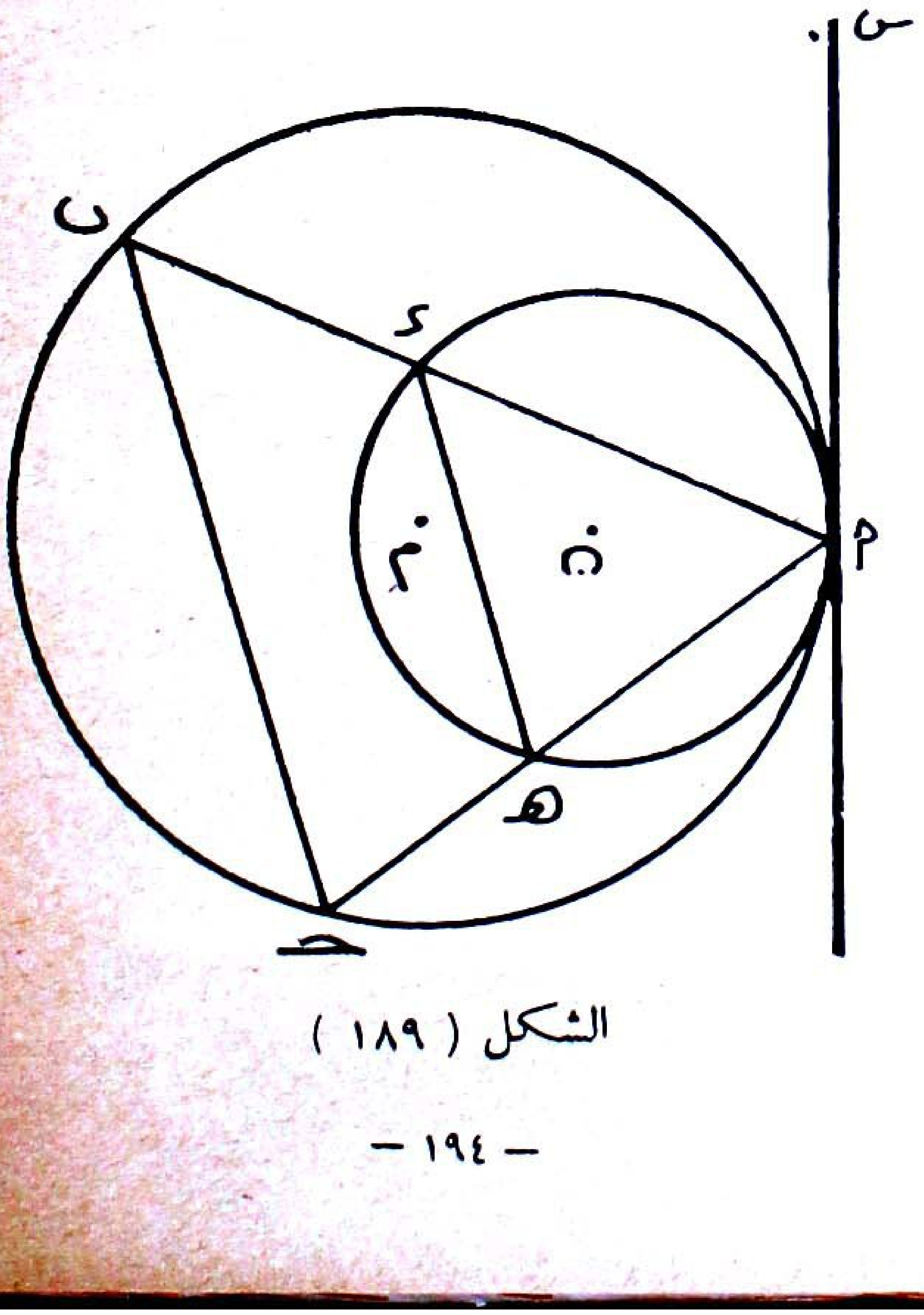
وهذا محال الا اذا انطبق ا هـ على ا حـ

∴ ا حـ مماس للدائرة في ا

وهو المطلوب

تمرين محلول (١) :

مست دائرة اخرى من الداخل في نقطة ا ثم رسم من ا وتران ا ب ، ا حـ



الشكل (١٨٩)

في الدائرة الكبرى فقطعا محيط الدائرة الصغرى في ى ، ه

برهن أن : ب حـ يوازي ى ه

المعطيات : ا نقطة تماس الدائرتين م ، د من الداخل الشكل (١٨٩)

، ا ى ب قاطع للدائرتين في ى ، ب

، ا ه حـ قاطع للدائرتين في ه ، حـ

المطلوب : اثبات ان ى ه يوازي ب حـ

العمـل : نرسم المماس المشترك س ا

البرهان: ا ب وتر في الدائرة الكبرى

، س مماس لها

∴ ∠ س ا ب = ∠ ا حـ ب نظرية

وبالمثل ∠ س ا ب = ∠ ا ه ى نظرية

∴ ∠ ا ه ى = ∠ ا حـ ب

وبمـا انهما متناظرتان بالنسبة للمستقيمين ى ه ، ب حـ ، والقاطع ا ه ب

∴ ى ه // ب حـ

وهو المطلوب

تمرين محلول (٢) :

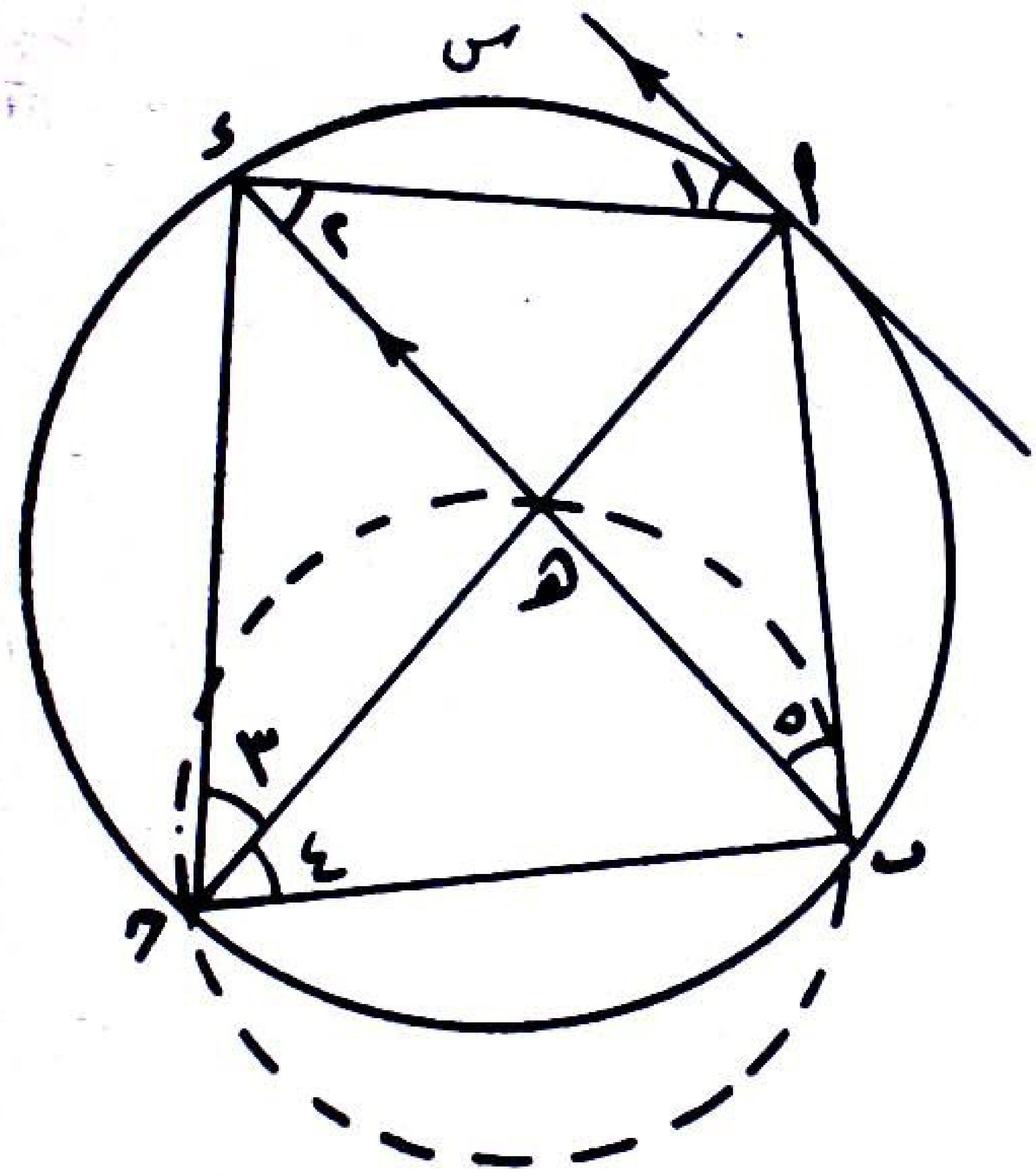
ا ب حـ ى شكل رباعي مرسوم داخل دائرة و كان المماس (ا س) للدائرة في ا يوازي ب ى فإذا تقاطع ا حـ ، ب ى في نقطة ه

اثبت ان اولا : ا حـ ينصف ∠ ب حـ ى

ثانيا : ا ب يمس الدائرة حـ ب ه

المعطيات : ا ب حـ ى شكل رباعي دائري ا س مماس يوازي ب ى
الشكل (١٩٠)

المطلوب . اثبات ان ∠ ٣ = ∠ ٤ ،
ا ب مماس للدائرة ب هـ حـ



الشكل (١٩٠)

البرهان : ∵ ∠ ١ = ∠ ٣ = ∠ ٥ نظرية (١)

، ∵ ا س ∥ ب ى

∴ ∠ ١ = ∠ ٢ . . . (٢)

، ∵ الشكل ا ب حـ ى رباعي دائري

∴ ∠ ٢ = ∠ ٤ . . . (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج ان

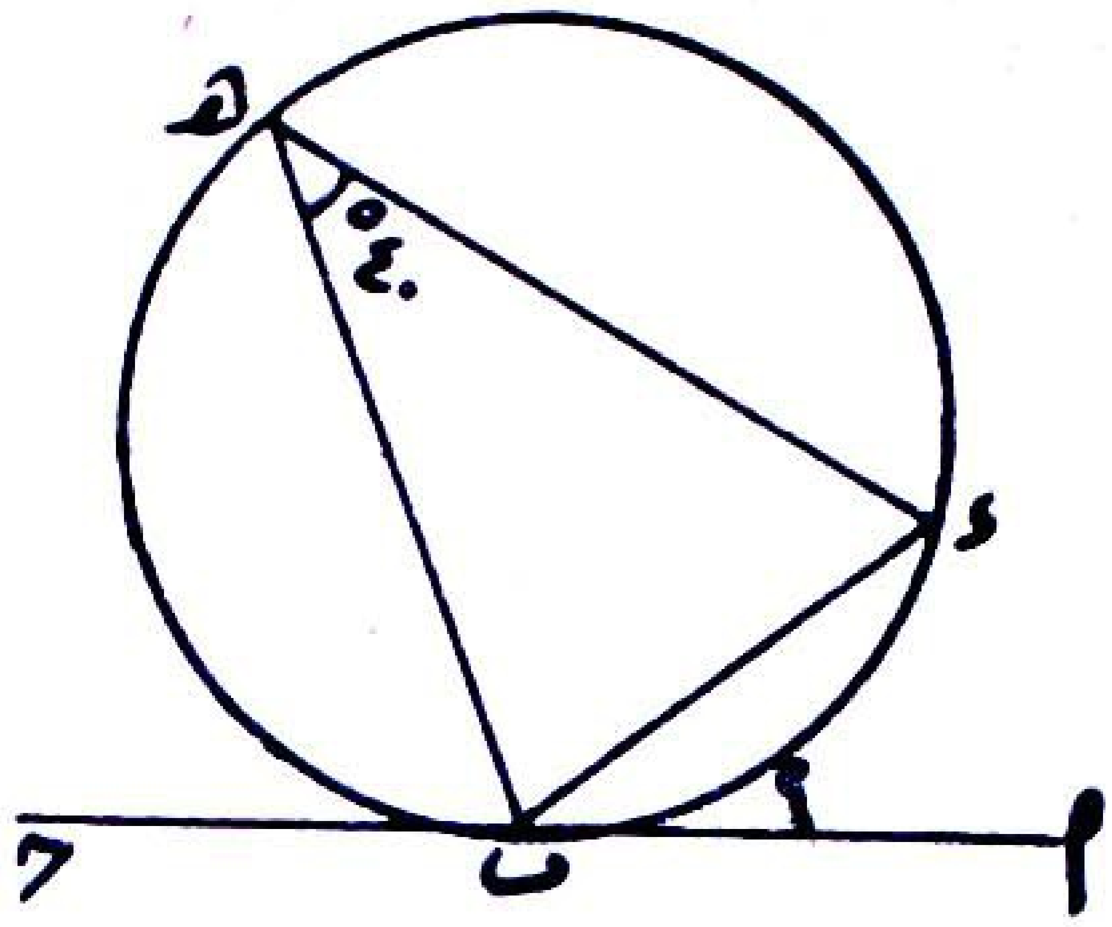
∠ ٣ = ∠ ٤ ∴ ا حـ ينصف ∠ ب حـ ى

، ∠ ٥ = ∠ ٤ ∴ ا ب يمس الدائرة ب هـ حـ

وهو المطلوب

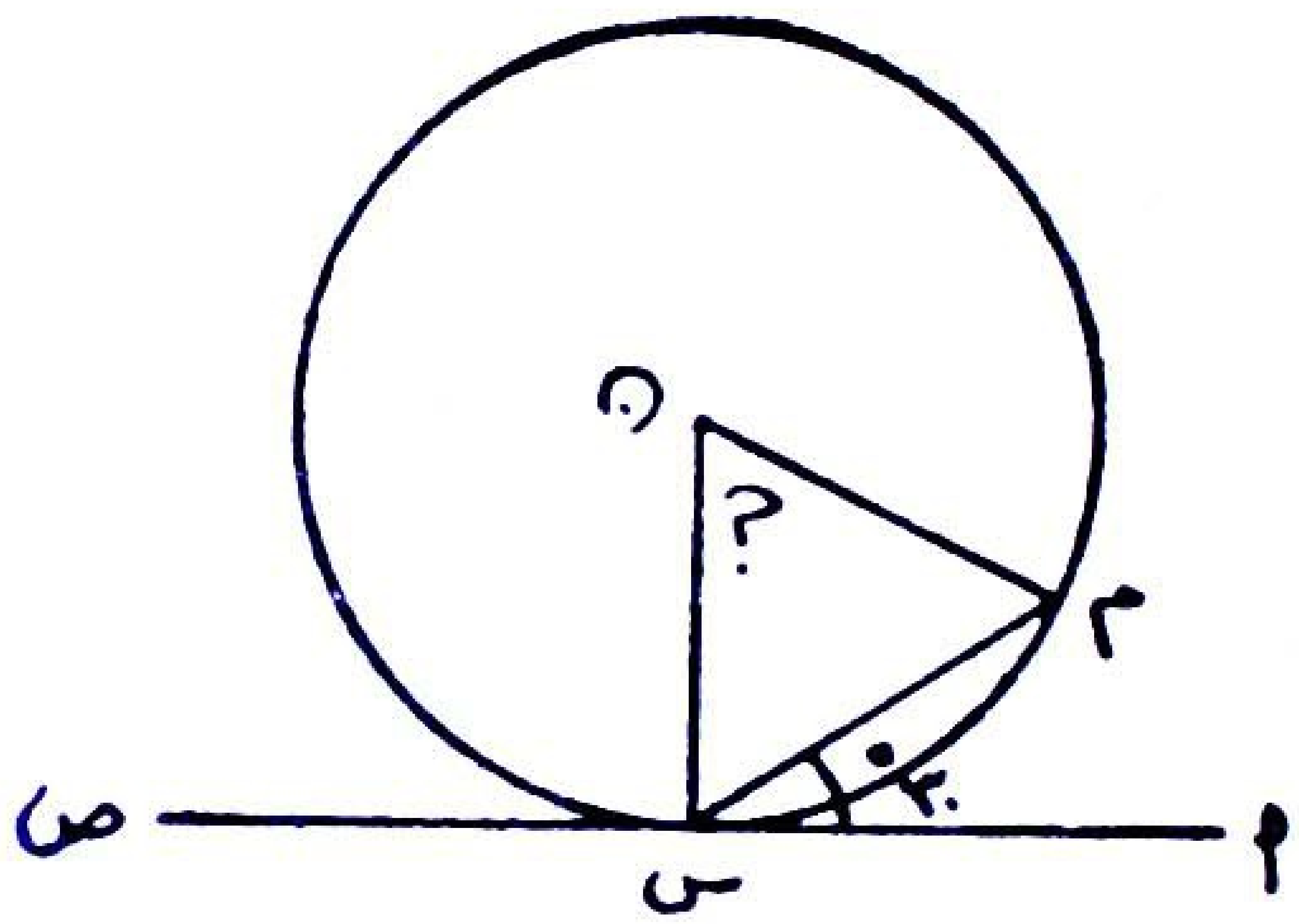
تمرين (٢٩)

١ – أولا : ا ب حـ مماس للدائرة
في ب ، ∠ ء هـ ب = ٤٠°
اوجد قيمة ∠ ا ب ء
الشكل (١٩١)



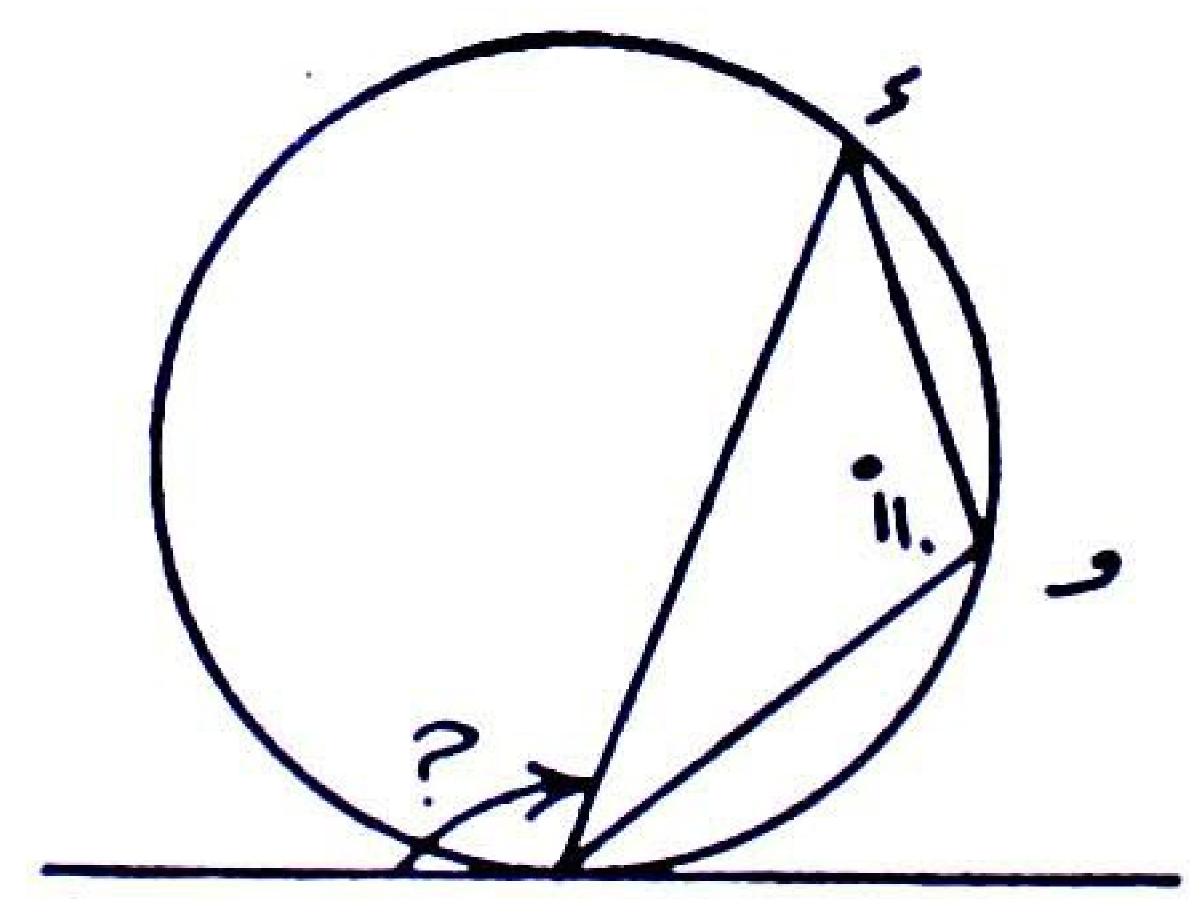
الشكل (١٩١)

ثانيا : ا س ص مماس
للدائرة في س
∠ م س ا = ٣٠°
اوجد قيمة
∠ د المركزية
الشكل (١٩٢)



الشكل (١٩٢)

٢ – اولا : ا هـ حـ مماس للدائرة في
هـ ، ∠ ء و هـ = ١١٠°
اوجد قيمة ∠ ء هـ حـ
الشكل (١٩٣)



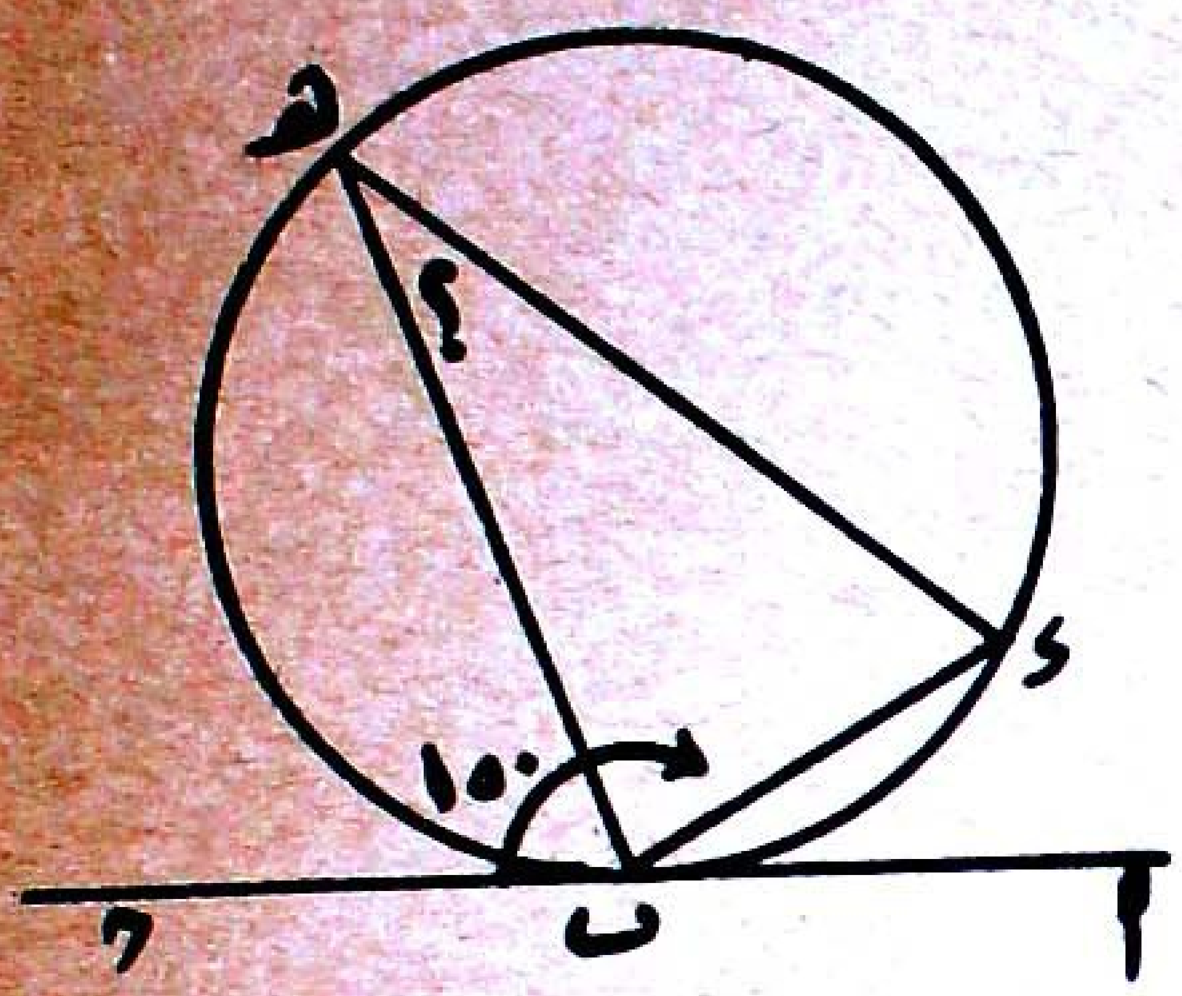
الشكل (١٩٣)

ثانيا : ا ب حـ مماس للدائرة في ب ،

∠ ء ب حـ = ١٥٠°

اوجد قيمة ∠ ء هـ ب

الشكل (١٩٤)



الشكل (١٩٤)

٣ – دائرة مرسومة داخل المثلث ا ب حـ فيه س ، ص ، ع نقط تماس الدائرة للمثلث ا ب حـ فاذا كانت

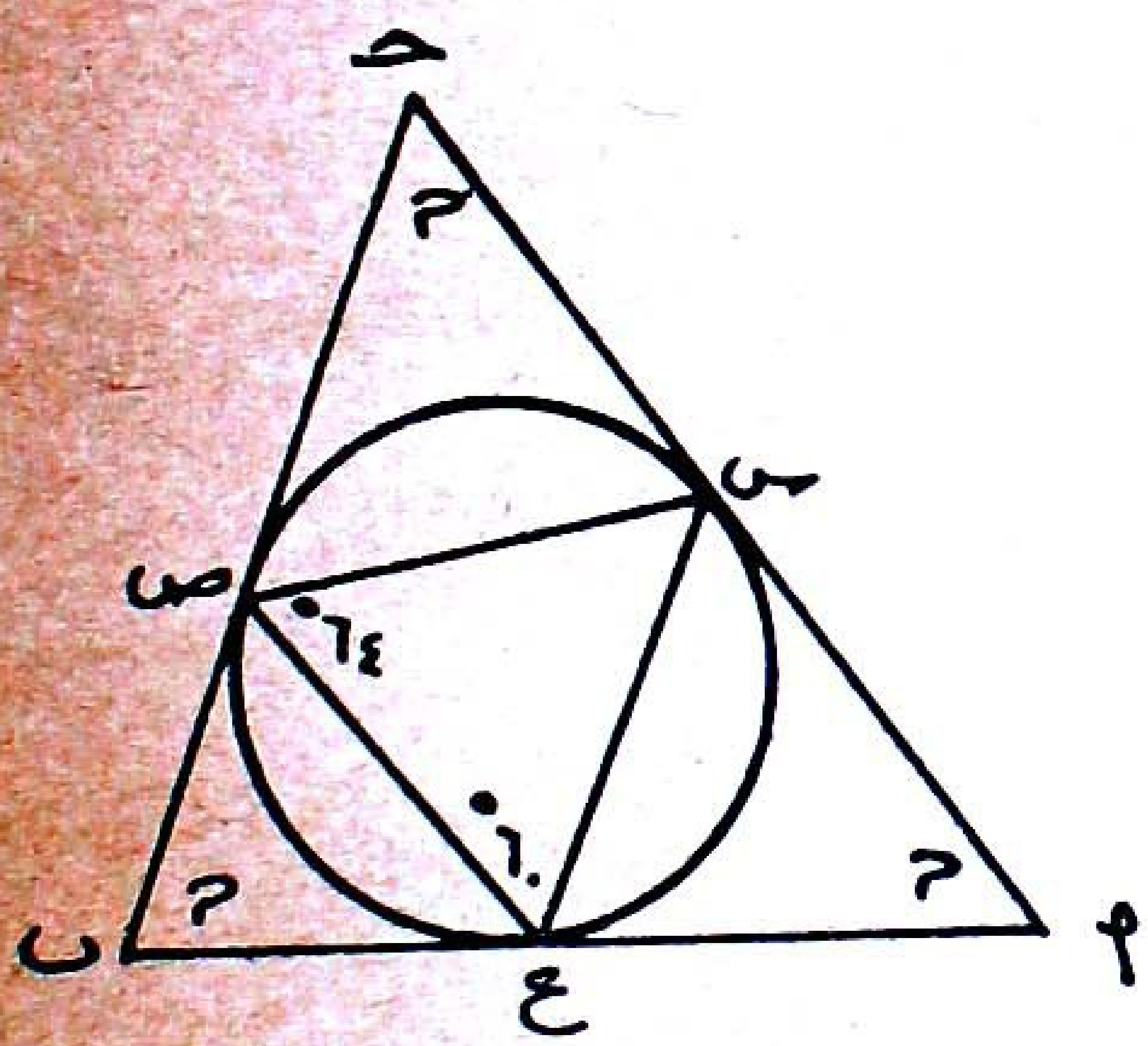
∠ س ص ع = ٦٤°

، ∠ س ع ص = ٦٠°

فأجد قيمة ∠ ا = ؟

∠ ب = ؟ ، ∠ حـ = ؟

الشكل (١٩٥)



الشكل (١٩٥)

٤ – دائرتان متقاطعتان في ا ، ب فرضت نقطة مثل د على احداهما ووصل د ا ، د ب فقطعا (او امتدادهما) محيط الدائرة الثانية في حـ ، ء برهن أن :

حـ ء // المماس المرسوم للدائرة الاولى في د

٥ – دائرتان متماستان من الداخل في م رسم القاطع ا ب حـ ء يقطع الدائرة

الكبرى في ا ، ى والصغرى في ب ، حـ ثم وصل م ا ، م ب ، م حـ ، م ى برهن أن :

$\angle$ ا م ب = $\angle$ حـ م ى

٦ – ا ، ب ، حـ ثلاث نقط على محيط دائرة مد ب ا الى أي نقطة ى ونصفت الزاويتان ب ا حـ ، حـ ا ى بمستقيمين قابلا ب حـ وامتداده في هـ ، س برهن أن المماس في ا ينصف هـ س

٧ – دائرتان متماستان من الداخل في ا ، ب حـ وتر في الدائرة الكبرى ويمس الصغرى في ى . اثبت أن ا ى ينصف $\angle$ ب ا حـ

٨ – ا ب حـ ى شكل رباعي مرسوم داخل دائرة وكان المماس للدائرة عند ا يوازي ب ى . اثبت أن ا حـ ينصف $\angle$ ب حـ ى

٩ – ا ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة رسم ا ى $\perp$ ب حـ ليقابله في ى ، من ى رسم مستقيم // ا ب ويقابل المماس للدائرة عند ا في النقطة هـ اثبت أن :

(١) الشكل ا ى حـ هـ رباعي دائري (٢) حـ هـ $\perp$ المماس ا هـ

١٠ – ا ب وتر مشترك في دائرتين م ، د تمر احداهما د بمركز الاخرى م برهن ان م ا ينصف الزاوية المحصورة بين هذا الوتر المشترك والمماس للدائرة د في نقطة ا

١١ – ا ب وتر في دائرة نصف القوس ا ب في س . رسم ى س مماس للدائرة في س اثبت ان ى س // ا ب

١٢ – س نقطة خارج دائرة رسم منها س حـ مماسا للدائرة في حـ ، س ب ا قاطعا لها في ب ، ا ثم رسمت دائرة مركزها حـ وتمر بالنقطة ب فقطعت ا ب في هـ برهن أن $\angle$ ا حـ هـ = $\angle$ ا س حـ

١٣ – ا ب ، ا حـ مماسان لدائرة مركزها م يمسانها في ب ، حـ رسم م ى $\perp$ م ا فقابل امتداد ا حـ في ى ثم وصل ب م . ومد فقابل المحيط في هـ برهن ان

اولا : $\angle$ ء م حـ $= \frac{1}{2} \angle$ ب ا حـ

ثانيا : ء هـ يمس الدائرة في هـ

١٤ – ا ب حـ $\triangle$ مرسوم داخل دائرة نصفت $\angle$ حـ بمستقيم لاقى ا ب في ء ونصف ء حـ في س وأقيم س هـ $\perp$ ء حـ فلاقى امتداد ا ب من احدى جهتيه في هـ اثبت ان هـ حـ يمس الدائرة ا ب حـ

تمارين عامة للمراجعة في الهندسة

تمارين (٣٠)

١ – ا : اذا كان $\triangle$ ا ب حـ قائم الزاوية في ب فطبق نظرية فيثاغورث على هذا المثلث (بدون برهان) .

ب : ا نقطة خارج دائرة مركزها حـ رسم المماس ا ب ليمسها في ب فكان طول ا ب = ١٢ سم . ثم وصل ا حـ فقطع محيط الدائرة في ء وكان ا حـ = ١٣ سم . اوجد طول ا ء

٢ – ا : اكمل بدون برهان العبارة الآتية :
الزاوية المحصورة بين المماس والوتر المار بنقطة التماس تساوي ...

ب : ا ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة اسقط العمود ا ء على حـ ب والعمود حـ هـ على المماس المرسوم للدائرة في ا اثبت ان هـ ء يوازي ا ب

٣ – ا : اكمل : اذا تساوت زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها امكن .....

ب : ا ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة رسم ا ء $\perp$ ب حـ ليلاقيه في ء ثم رسم من ء مستقيم يوازي ب ا ويقابل المماس للدائرة عند ا في هـ اثبت ان $\angle$ ا هـ حـ = ق

٤ — ا : الزاويتان المتقابلتان في الشكل الرباعي الدائري متكاملتان

ب : دائرتان متقاطعتان في نقطتي ا ، ب . رسم المستقيمان المتوازيان س ا حـ ، ص ب ء يقابلان محيط احدى الدائرتين في نقطتي س ، ص ومحيط الاخرى في حـ ، ء ثم وصل س ص ، ء حـ . اثبت ان س حـ ء ص متوازي الاضلاع

٥ — ا حـ قطر في الدائرة و رسم و ب عموداً على ا حـ فقطع المحيط في ب ثم رسم ا ء هـ يقطع و ب في (ء) والمحيط في هـ . اثبت ان ا ب يمس الدائرة هـ ء ب

٦ — ا : اذا كانت الزاويتان المتقابلتان في الشكل الرباعي متكاملتين كان هذا الشكل رباعيا دائريا

ب : (ا ب) وتر في دائرة مركزها م نصف في (ء) ومد على استقامته الى أي نقطة مثل حـ ورسم من حـ المماس حـ هـ للدائرة ثم وصل حـ م فقطع محيط الدائرة في و ، مـد على استقامته فقطع المحيط مرة أخرى في س برهن ان :

١ — النقط الاربع ء ، م ، هـ ، حـ تقع على محيط دائرة واحدة

٢ — الزاوية و هـ حـ $= \frac{١}{٢}$ $\angle$ هـ ء حـ

٧ — ا : نقطة تماس دائرتين تقع على المركزين

ب : م ، د دائرتان متماستان من الخـارج في س . وقطر الدائرة م ضعف قطر الدائرة د فإذا رسم القطر س ب في الدائرة د ثم رسم من ب مماس للدائرة م يمسها في ا ويقطع الدائرة د في ع . ووصل ع س ، ا م اثبت أن ب ع = ا ع

٨ — ا : اذكر بدون برهان العلاقة بين المربعات المنشأة على أضلاع المثلث القائم الزاوية

ب : ا ب حـ △ انزل من ا العمود ا ء على ب حـ فاذا كان
ا ب = ١٣ سم ، ا ء = ١٢ سم ، ء حـ = ١٦ سم فاوجد طول
كل من ب حـ ، ا حـ .

٩ — ا : اكمل مايأتي: في المثلث القائم الزاوية المربع المنشأ على الوتر يكافىء.

ب : م ، ن دائرتان متقاطعتان في ا ، ب فاذا كان نصف قطر الاولى
١٥ سم ونصف قطر الثانية ٤١سم وطول وترهما المشترك ١٨سم.
فما طول خط المركزين .

١٠ — ا : قطعة أرض مستطيلة الشكل طولها ٣٥٠ متراً وعرضها ٢٤٠ متراً
والمطلوب رسمها بمقياس رسم ١ : ٥٠٠٠ ثم أوجد من الرسم طول
قطر المستطيل وطول قطر قطعة الارض

ب : ا ب حـ △ قائم الزاوية في ب نصف ب حـ في ء برهن ان :

$$\overline{\text{ا حـ}}^{\,٢} - \overline{\text{ا ء}}^{\,٢} = ٣\ \overline{\text{ب ء}}^{\,٢}$$

١١ — ا : اثبت أن الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز الدائرة متساوية

ب : دائرتان متحدتا المركز في م فرضت نقطة ا خارجهما ورسم منها
المماسان ا س ، ا ص يمسان الدائرة الصغرى في س ، ص ويقطع
ا س الكبرى في حـ ، ء ويقطعها ا ص في هـ ، و . اثبت أن
حـ هـ // ء و

١٢ — ا : الزاوية المرسومة في نصف الدائرة قائمة

ب : ا ب حـ △ مرسوم داخل دائرة مركزها م . رسم القطر ا هـ ثم
وصل هـ حـ ورسم أيضاً ا ء يصنع مع ا ب زاوية تساوي زاوية
هـ ا حـ . ويقابل ب حـ في ء . اثبت أن ا ء ⊥ ب حـ

١٣ — ا : اكمل بدون برهان :
اذا مد احد أضلاع الشكل الرباعي الدائري على استقامته كانت

الزاوية الخارجية تساوي . . . . .

ب : ا ب حـ ى شكل رباعي مرسوم داخل دائرة مد ضلعاه اب ، ى حـ على استقامتيهما فتقابلا في د . ثم مد ضلعاه ى ا ، حـ ب على استقامتيهما فتقابلا في ط فاذا فرضت نقطة هـ على ط د بحيث كانت زاوية ط ا هـ = $\angle$ ط د حـ فأثبت :

اولا : الشكل ا ب هـ ط رباعي دائري

ثانيا : الشكل هـ ب حـ د رباعي دائري أيضاً

١٤ - ١ : ارتفاعات المثلث تتلاقى في نقطة واحدة

ب : ا ب حـ مثلث حاد الزوايا رسمت ارتفاعاته ا ى ، ب و ، حـ هـ وتقاطعت في م ثم مد م ى الى س بحيث كان ى س = م ى اثبت أن $\angle$ هـ م و = $\angle$ ب س حـ وأن الشكل ا ب س حـ رباعي دائري

١٥ - ١ : الزاوية المركزية ضعف الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس المحصور بين ضلعيها (برهن حالة واحدة فقط)

ب : دائرة مركزها م . رسم م س ، م ص نصفا قطرين فيها بحيث كانت $\angle$ س م ص = ٦٠° ووصل س ص ثم نصفت زاوية م س ص بمستقيم قابل المحيط في (ع) ووصل ص ع . برهن على أن : (١) Δ س م ص متساوي الاضلاع (٢) $\overline{\text{س ص}}^{\,٢}$ = $\overline{\text{ص ع}}^{\,٢}$ (٣) $\overline{\text{س ع}}^{\,٢}$ = ٣ $\overline{\text{س م}}^{\,٢}$

١٦ - : ا ب حـ ى متوازي أضلاع رسمت دائرة تمر بالنقطة ا فقطعت ا ب أو امتداده في س وقطعت ا ى أو امتداده في ص . فرضت نقطة ع على القوس س ص غير الواقعة عليه ا اثبت أن $\angle$ س ع ص = $\angle$ ا ى حـ

١٧ - ١ : المماس يكون عمودياً على نصف القطر المار بنقطة التماس

ب : ا نقطة خارج دائرة مركزها م فاذا رسم المماس ا ى والقاطع ا ب م حـ يقطع المحيط في ب ، حـ ثم رسم مماس الدائرة في ب فلاقى

المماس الاول في هـ . برهن على أن $\angle$ ا هـ ب = ٢ $\angle$ ا حـ ء

١٨ — ا : ا ب حـ $\triangle$ قائم الزاوية في ا أسقط ا ء $\perp$ ب حـ فاذا كان

ا حـ = ٣ سم ، ب حـ = ٥ سم فأوجد قيمة $\overline{\text{ا ب}}^{٢}$ ومن ذلك

أوجد طول ب ء

ب : حـ ا ب $\triangle$ قائم الزاوية في ا رسم المستقيمان المتوسطان حـ ء ،

ب هـ اثبت ان ٤ ($\overline{\text{حـ ء}}^{٢}$ + $\overline{\text{ب هـ}}^{٢}$) = ٥ $\overline{\text{ب حـ}}^{٢}$

١٩ — ا ب حـ $\triangle$ مرسوم داخل دائرة رسم ا هـ يمس الدائرة في ا وأسقط العمود ا ء على ب حـ والعمود حـ هـ على المماس ا هـ اثبت أن ء هـ // ا ب

٢٠ — ا نقطة تماس دائرتين تقع على خط المركزين

ب : دائرتان متماستان من الخارج في ص وقطر احداهما ضعف قطر الاخرى فإذا رسم في الدائرة الصغرى القطر س ص ثم رسم من س مماس للدائرة الكبرى في ع برهن على أن $\angle$ ع س ص = ٣٠°

٢١ — ا هـ قطر في دائرة ، ب ، حـ نقطتان على المحيط في جهتين مختلفتين من ا هـ . اسقط العمود ا ء على ب حـ برهن أن $\angle$ ب ا هـ = $\angle$ حـ ا ء

٢٢ — ا ب قطر في دائرة ، حـ نقطة على المحيط مد ب ا بحيث كان ا ء = ا حـ ثم أقيم ء هـ عموداً على ا ء فقابل امتداد حـ ا في هـ اثبت أن ا هـ = ا ب

٢٣ — ا نقطة خارج دائرة ، ا ب ، ا حـ مماسان لها يمسانها في ب ، حـ فرضت أي نقطة مثل ل على القوس الاصغر ب حـ ثم انزلت الاعمدة ل و على ا ب ، ل هـ على ا حـ ، ل د على ب حـ اثبت أن :

١) و ل د ب شكل رباعي دائري ٢) $\angle$ ل د هـ = $\angle$ ل حـ هـ

٣) $\angle$ ل د هـ = $\angle$ ل و د

٢٤ - ا حـ قطر في دائرة مركزها م رسمت الدائرة ى بحيث تقطع الدائرة م في ا ، ب ويمر محيطها بمركز الدائرة م اخذت النقطة ى على محيط الدائرة م بحيث كان حـ ى = حـ ب اثبت أن ى ا يمس الدائرة ى في نقطة ا (نصل ا ب ، م ب)

٢٥ - ا : برهن على أن الاعمدة النازلة من الرؤوس فى مثلث على الاضلاع المقابلة لها تتلاقى في نقطة واحدة .

ب : ا ب حـ △ فيه النقط س ، ص ، ع منتصفات الاضلاع ا ب ، ب حـ ، حـ ا على الترتيب وكانت نقطة م ملتقى ارتفاعات المثلث ونصف ا م في ى . برهن على ان س ص ع ى رباعي دائري .

٢٦ - دائرتان متماسان من الخارج في ا رسم لها مماس مشترك يمس الدائرة الاولى في ب والثانية في حـ ثم وصل ب ا ومد على استقامته حتى قابل محيط الدائرة الثانية في هـ ثم مد حـ ا على استقامته حتى قابل محيط الدائرة الاولى في ى اثبت ان :

اولا : ى ب // هـ حـ ثانيا : ى ب قطر في الدائرةالاولى

(العمل : ارسم ا س مماساً مشتركاً يقابل ب حـ في س)

٢٧ - ا : الزوايا المرسومة في قطعة واحدة من الدائرة متساوية

ب : ا ب حـ ى شكل رباعي دائري تقاطع قطراه في م فإذا كانت

∠ ب ا حـ = ٤٥° ، ∠ ب م حـ = ١١٥° ، ∠ ا ى ب = ٣٥°

فأوجد قيمة ∠ ب حـ ى

٢٨ - ا ب قطر دائرة مركزها م رسم ا حـ مماساً للدائرة من نقطة ا بحيث كان ا حـ = ا م ووصل ب حـ ثم رسم م ى عموداً على ب حـ قابله في ى ووصل ا ى ومد حتى قابل محيط الدائرة في هـ اثبت ان

اولا : ∠ ا م حـ = ∠ ا ى حـ ثانيا : △ هـ ى ب متساوي الساقين

٢٩ - ا : م دائرة فرضت نقطة ا خارجهارسم منها المماسان ا س ، ا ص برهن

اولا : ا س = ا ص ثانيا : ∠ ا م س = ∠ ا م ص

ب : م ٦ ن دائرتان متماستان من الخارج في ا رسم المماس المشترك عند ا ثم فرضت عليه نقطة س ورسم منها س ص يمس الدائرة م ٦ س ع يمس الدائرة ن ثم وصل ص ع فقطع الدائرة م في ى والاخرى في هـ اثبت ان ∠ ص ا ى = ∠ هـ ا ع

٣٠ – ا ب ٦ ا حـ وتران متساويان في دائرة رسم الوتران ا س ٦ ا ص قاطعين حـ ب في ى ٦ هـ على الترتيب اثبت ان الشكل ى س ص هـ رباعي دائري

٣١ – س ص ع ل شكل رباعي دائري فيه ص ع = ع ل فإذا كانت زاوية س ص ع = ١٠٠° ٦ ∠ س ع ل = ٤٠° فأثبت ان

∠ س ل ص = ٢٠° = $\frac{١}{٣}$ ∠ ص ع ل

٣٢ – ا : اذكر بدون برهان منطوق نظرية فيثاغورث

ب : ا ب حـ ى شكل رباعي فيه ا ب = ٣ سم ٦ ب حـ = ٤ سم ٦ حـ ى = ١٢ سم فاذا كانت زاوية ا ب حـ = ∠ ا حـ ى = ق فأوجد طول ا ى

٣٣ – ا : متى يكون الشكل الرباعي دائرياً ؟

ب : ما العلاقة بين المماس ونصف القطر المار بنقطة التماس ؟

حـ : ا ب وتر في دائرة مركزها م نصف ا ب في حـ اخذت نقطة س على القوس الاصغر ا ب ورسم الوتر س ص ماراً بنقطة (حـ) ومد ا ب على استقامته من جهتيه فقابل المماسين المرسومين من س ٦ ص للدائرة فى نقطتي هـ ٦ و على الترتيب اثبت ان كلا من الشكلين م حـ و ص ٦ م حـ س هـ رباعى دائري

٣٤ – ا : ا ب حـ △ فيه ا ب = ١٢ سم ٦ ب حـ = ٩ سم مد ب ا على استقامته الى و بحيث كان ا و = ٤ سم رسم و هـ // حـ ب فقابل امتداد حـ ا في هـ والمطلوب ايجاد اولاً – طول و هـ ثانياً – نسبة هـ ا : ا حـ

ب : وضع جسم طوله ٤ سم امـام عدسة محدبة وعلى بعد ٦ سم منها فتكونت له صورة مقلوبة وفي الجهة الاخرى منهـــا وتبعد عنها مسافة ١٢ سم فما طول الصورة ؟

٣٥ – ارسم الشكل الرباعي ا ب حـ ى على المستقيم ا ب الذي طوله ٨سم اذا علم ان ∠ ا = ٨٠° ، ∠ ب = ٧٠° ، ا ى = ٤و٤ سم ، ب حـ = ٣و٢ سم ثم ارسم صورة مكبرة له بحيث تكون نسبة طول كل ضلع في هـذه الصورة الى طول ما يناظره من الشكل ٥ : ٤ ثم أوجد النسبة بين طول القطر ا حـ في الشكل والصورة.

٣٦ – ا : ا ب حـ Δ فيه ا ب = ١٥ سم ، ب حـ = ٢٠ سم ، ا حـ = ٢٥سم برهن على أن Δ ا ب حـ قائم الزاوية في ب

ب : دائرة مركزها م نصف قطرها م ا=١٣سم رسم الوتر ا ب =٢٤سم برهن على أن طـــول العمود النـــازل من م على ا ب = ٥ سم ملاحظة : البرهان نظري والرسم تقريبي

٣٧ – ا : اذكر شرطين اذا توفر احدهما في الشكل الرباعي امكن ان يمر برؤوسه محيط دائرة واحدة

ب : ا ب حـ ى شكل رباعي مرسوم داخل دائرة تقاطع قطراه ا حـ ، ب ى في هـ فرضت نقطة س على ا حـ ورسم منها مستقيم يوازي ب حـ ويقابل ب ى في ص . برهن ان النقط ا ، س ، ص ، ى يمكن ان يمر بها محيط دائرة

٣٨ – اكمل بدون برهان (١) المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث تقع دائماً على بعدين متساويين من نقطتين معلومتين هو . . . . . .

(٢) المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث تقع دائمـــاً على بعدين متساويين من مستقيمين هو . . . . . .

تم بعون الله تعالى

فهرست

مطابع الاصفهانى وشركائه

مطابع الاصفهانى وشركائه